3er Grado Volumen II

MATEMÁTICAS III

Libro para el maestro

TELEsecundaria

3er Grado Volumen II

MATEMÁTICAS III

Libro para el maestro

TELEsecundaria

Matemáticas III. Libro para el maestro. Volumen II, fue elaborado en la Coordinación de Informática Educativa del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE), de acuerdo con el convenio de colaboración entre la Subsecretaría de Educación Básica y el ILCE.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
Josefina Vázquez Mota

SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN BÁSICA
José Fernando González Sánchez

Dirección General de Materiales Educativos
María Edith Bernáldez Reyes

Dirección de Desarrollo e Innovación de Materiales Educativos

Subdirección de Desarrollo e Innovación de Materiales Educativos para la Educación Secundaria

Dirección Editorial

INSTITUTO LATINOAMERICANO DE LA COMUNICACIÓN EDUCATIVA

Dirección General
Manuel Quintero Quintero

Coordinación de Informática Educativa
Felipe Bracho Carpizo

Coordinación Académica General
Aquiles Ávila Hernández

Coordinación Académica
Armando Solares Rojas

Asesoría Académica
María Teresa Rojano Ceballos (DME-Cinvestav)
Judith Kalman Landman (DIE-Cinvestav)

Autores
Ana Laura Barriendos Rodríguez, Ernesto Manuel Espinosa Asuar

Colaboradores
Araceli Castillo Macías, Rafael Durán Ponce, Silvia García Peña, José Cruz García Zagal, Olga Leticia López Escudero, Jesús Rodríguez Viorato

Apoyo técnico y pedagógico
María Catalina Ortega Núñez

Revisores académicos externos
David Francisco Block Sevilla, Diana Violeta Solares Pineda

Diseño de actividades tecnológicas
Mauricio Héctor Cano Pineda, Emilio Domínguez Bravo, Deyanira Monroy Zariñán

Coordinación editorial
Sandra Hussein Domínguez

Servicios editoriales
Dirección de arte:
Rocío Mireles Gavito

Diseño:
Zona gráfica

Diagramación:
Bruno Contreras, Victor Vilchis

Iconografía:
Cynthia Valdespino

Ilustración:
Curro Gómez, Victor Eduardo Sandoval, Gabriela Podestá, Juan Pablo Romo

Fotografía:
Bruno Contreras, Cynthia Valdespino, Fernando Villafán, Art explosion 2007

Primera edición, 2008 (ciclo escolar 2008-2009)

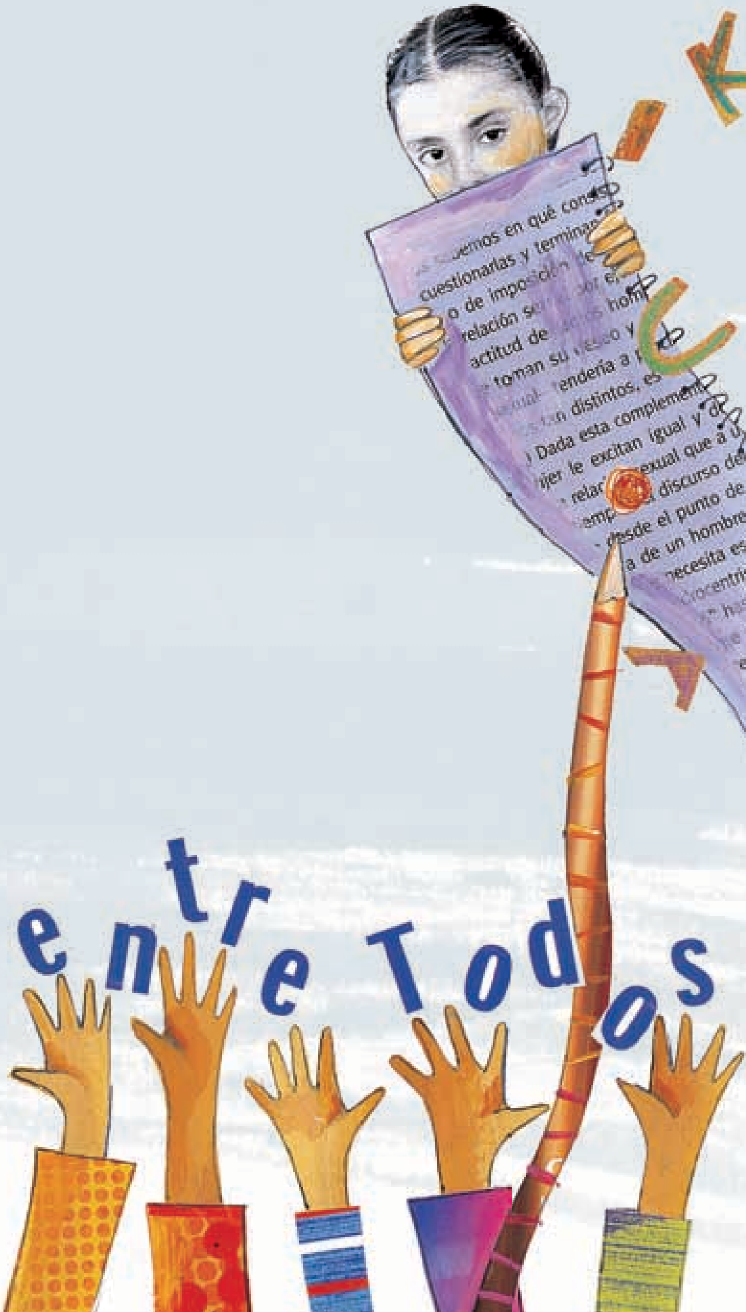
ISBN 978-968-01-1718-5 (obra completa)
ISBN 978-968-01-1720-8 (volumen II)

Impreso en México

Índice


cia entró a las artes
de dibujo a la pan-
avalancha de mer-
eada y digitalizada
ólo para considerar
ar la percepción ar-
el nombre del pri-

Cinco sugerencias para enseñar en la Telesecundaria



1 Crear un ambiente de confianza

Aprender significa tomar riesgos: Lo nuevo siempre causa cierta inseguridad e intentar algo por primera vez implica estar dispuesto a equivocarse. Por eso es importante crear un ambiente de confianza en el cual los alumnos puedan decir lo que piensan, hacer preguntas o intentar procedimientos nuevos sin temor. Algunas ideas para lograr esto son:

- Antes de calificar una respuesta, reflexione sobre su origen, en muchas ocasiones las preguntas tienen más de una solución. Por ello, es importante valorar planteamientos diferentes y no obligar a todos a llegar a una solución única. Ayude a los alumnos a aprender a escuchar a sus compañeros y a encontrar diferencias y semejanzas en las propuestas, analizando sus partes y detectando hasta qué punto se acerca a una respuesta satisfactoria. En Matemáticas, por ejemplo, muchas veces los alumnos obtienen soluciones diferentes, que corresponden a interpretaciones distintas del problema. Es una tarea colectiva comprender las distintas interpretaciones que pueden aparecer en la clase sobre un mismo problema.
- Los alumnos pueden aprender unos de otros: en el trabajo de equipo es conveniente que los alumnos tengan diferentes niveles de conocimientos y experiencias. Algunos serán lectores fluidos, otros sabrán argumentar con detalle sus ideas, otros dibujarán con mucha facilidad, otros harán cálculos y estimaciones con soltura. Formar equipos heterogéneos propicia que unos puedan compartir lo que saben con otros. Esto es particularmente útil para la realización de los proyectos de Ciencias, debido a que éstos integran contenidos conceptuales, habilidades y actitudes desarrolladas a lo largo de un bloque o al final del año escolar.

- Los docentes pueden modelar las actividades para los alumnos usando su propio trabajo para ejemplificar alguna actividad o situación que desea introducir al grupo. Si los alumnos tienen que escribir, leer en silencio, o trabajar de manera individual en alguna tarea, el maestro puede hacer lo mismo. Esto lo ayudará a darse cuenta de cuánto tiempo toma, qué retos especiales presenta o qué aspectos hay que tomar en cuenta para realizarla. Al compartir su propio trabajo, también puede escuchar comentarios, responder preguntas, ampliar información y tomar sugerencias.
- Mientras los alumnos trabajan en grupos, el maestro debe estar atento a qué ocurre en los equipos: aprovechar la oportunidad para hacer intervenciones más directas y cercanas con los alumnos, sin abordarlos de manera individual. Mientras ellos desarrollan una tarea, puede pasar a los equipos y escuchar brevemente, registrando frases o palabras de los alumnos para retomarlas en las discusiones generales; también puede participar en algunos grupos para conocer la dinámica del trabajo en equipo. Además, en algunos momentos, puede orientar el diálogo de los alumnos, si considera pertinente destacar algún contenido conceptual.
- Considere tiempo para mejorar los productos y/o las actividades: en ocasiones los alumnos concluyen una actividad y después de discutirla con otros se dan cuenta de que les gustaría modificarla. Puede resultar de gran provecho dar oportunidad a los alumnos para revisar algún aspecto de su trabajo. Cuando lo considere pertinente, déles tiempo para reelaborar y sentirse más satisfechos con su trabajo.

Cómo hacer una lluvia de ideas

Cómo coordinar la discusión de un dilema moral

2 Incorporar estrategias de enseñanza de manera permanente

Es importante usar diferentes prácticas académicas de manera constante y reiterada. Se trata de guiar la lectura de distintos tipos de textos, gráficas, esquemas, mapas, fórmulas e imágenes; demostrar diversas formas de expresar y argumentar las ideas, utilizar términos técnicos; plantear preguntas, elaborar textos, registrar datos y realizar operaciones matemáticas. Las siguientes estrategias pueden servir como lineamientos generales para la enseñanza en el aula:

- Invite a los alumnos a leer atentamente y dar sentido a lo que leen: las diferentes fórmulas, gráficas, mapas, tablas e imágenes que se les presentan en los libros para el alumno, libros de las Bibliotecas Escolares y de Aula, recursos digitales, videos, etc. Reflexione con ellos sobre por qué se incluyen estos recursos en la actividad, qué tipo de información aportan y en qué aspectos deben poner atención para comprenderlos mejor.
- Las actividades relacionadas con los mapas, imágenes, gráficas, problemas y textos incluidos en las secuencias, tienen la finalidad de favorecer la construcción colectiva de significados: en lugar de utilizarlas para verificar la comprensión de lectura o la interpretación de la información representada, se busca construir con el grupo, con la participación de todos, qué dice el texto o las otras representaciones, qué conocemos acerca de lo que dice, qué podemos aprender de ellos y qué nos dicen para comprender mejor nuestro mundo.
- Utilice diferentes modalidades de lectura: la lectura en voz alta constituye una situación privilegiada para escuchar un texto y comentarlo sobre la marcha, haciendo pausas para plantear preguntas o explicar su significado; la lectura en pequeños grupos crea oportunidades para que todos lean; la lectura en silencio favorece la reflexión personal y la relectura de fragmentos. Según la ocasión y el propósito, también puede preparar lecturas dramatizadas con todo el grupo o en equipos.
- Ayude a los alumnos a construir el sentido de sus respuestas: en lugar de ver estas actividades como pautas para verificar la comprensión de los estudiantes, utilícelas para construir, junto con ellos, los significados de los textos incluidos en las secuencias.
- Cuando los alumnos deben escribir respuestas o componer pequeños textos, puede modelarse cómo iniciar el escrito en el pizarrón: pida a dos o tres estudiantes que den ejemplos de frases iniciales para ayudar a todos a empezar a escribir.

Cómo concluir un diálogo o actividad

Cómo introducir otros recursos

Para hacer uso del diccionario

Cómo leer un mapa

Cómo apoyar la elaboración de resúmenes

- Invite a los alumnos a leer en voz alta los diferentes textos que van escribiendo: proporcione pautas para revisar colectivamente los escritos, dando oportunidad a los alumnos para reconsiderar sus textos y escuchar otras maneras de redactar lo que quieren expresar. Esto los ayudará a escuchar cómo se oyen (y cómo se entienden) sus escritos. Propicie la valoración y aceptación de las opiniones de los otros con el fin de mejorar la composición de textos. Modele y propicie el uso de oraciones completas, en lugar de respuestas breves y recortadas.
- Plantee preguntas relacionadas con los temas que tienden a extender el conocimiento disciplinario y sociocultural de los estudiantes: algunas preguntas pueden promover el pensamiento crítico en los estudiantes porque no sólo se dirigen a los contenidos conceptuales, también se involucra el desarrollo de actitudes, porque se promueve la reflexión de aspectos éticos, de salud, ambiente e interculturales, entre otros.
- Busque ejemplos de uso del lenguaje de acuerdo a la temática o contenido académico: para ejemplificar algún tipo de expresión, identifique fragmentos en los libros de las Bibliotecas Escolares y de Aula y léalos en clase. Incorpore la consulta puntual de materiales múltiples y la lectura de muchas fuentes como parte de la rutina en clase.
- Busque ejemplos del contexto cotidiano y de la experiencia de los alumnos, de acuerdo a la temática o contenido académico.
- Utilice la escritura como una herramienta de aprendizaje; no todo lo que se escribe en el aula tiene que ser un texto acabado: muchas veces, cuando intentamos poner una idea por escrito, nos damos cuenta de nuestras preguntas y dudas. También se puede usar la escritura para ensayar relaciones y procesos, hacer predicciones, formular hipótesis o registrar interrogantes que pueden retomarse en una ocasión posterior. En matemáticas, por ejemplo, el carácter formal o acabado del procedimiento de solución depende del problema que trata de resolverse. Por ejemplo, para un problema de tipo multiplicativo, la suma es un procedimiento informal, pero esta misma operación es un procedimiento experto para un problema de tipo aditivo. El conocimiento matemático está en construcción permanente.

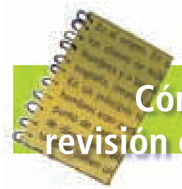
3 Fomentar la interacción en el aula

El diálogo e interacción entre los pares es una parte central en el proceso de aprendizaje: la participación con otros nos ayuda a desplegar nuestros conocimientos, demostrar lo que sabemos hacer, anticipar procesos, reconocer nuestras dudas, oír las ideas de los demás y compararlas con las propias. Por ello, es deseable:

- Fomentar la interacción en el aula con múltiples oportunidades para opinar, explicar, argumentar, fundamentar, referirse a los textos, hacer preguntas y contestar: las preguntas que se responden con "sí" o "no", o las que buscan respuestas muy delimitadas tienden a restringir las oportunidades de los alumnos para elaborar sus ideas. Las preguntas abiertas, en cambio, pueden provocar una variedad de respuestas que permiten el análisis, la comparación y la profundización en las problemáticas a tratar; también permiten explorar razonamientos diferentes y plantear nuevas interrogantes. Además, dan pie a un uso más extenso de la expresión oral.
- Crear espacios para que los alumnos expresen lo que saben sobre el tema nuevo o lo que están aprendiendo: en diferentes momentos de las secuencias (al inicio, desarrollo, al final) pueden abrirse diálogos, con el fin de que contrasten sus conocimientos con los de otros alumnos, y con ello enriquecer y promover la construcción compartida de conocimientos.

- Incorporar en las actividades cotidianas los diálogos en pequeños grupos: algunos estudiantes que no participan en un grupo grande, es más probable que lo hagan en un grupo más pequeño o en parejas.
- Utilizar ciertos formatos de interacción de manera reiterada, con materiales de apoyo escritos y/o gráficos para organizar actividades: algunos ejemplos de estos formatos son la presentación oral de reseñas de libros, la revisión de textos escritos por los alumnos, realización de debates, el trabajo en equipo en el que cada alumno tiene una tarea asignada (coordinador, relator, buscador de información, analista, etcétera).
- Realizar cierres de las actividades: obtener conclusiones que pueden ser listas de preguntas, dudas o diversas opiniones; los acuerdos del grupo; un registro de diferentes formas de expresión o propuestas de cómo "decir" algo; un resumen de lo aprendido, un diagrama, una tabla, un procedimiento eficaz para resolver un problema, entre otros.

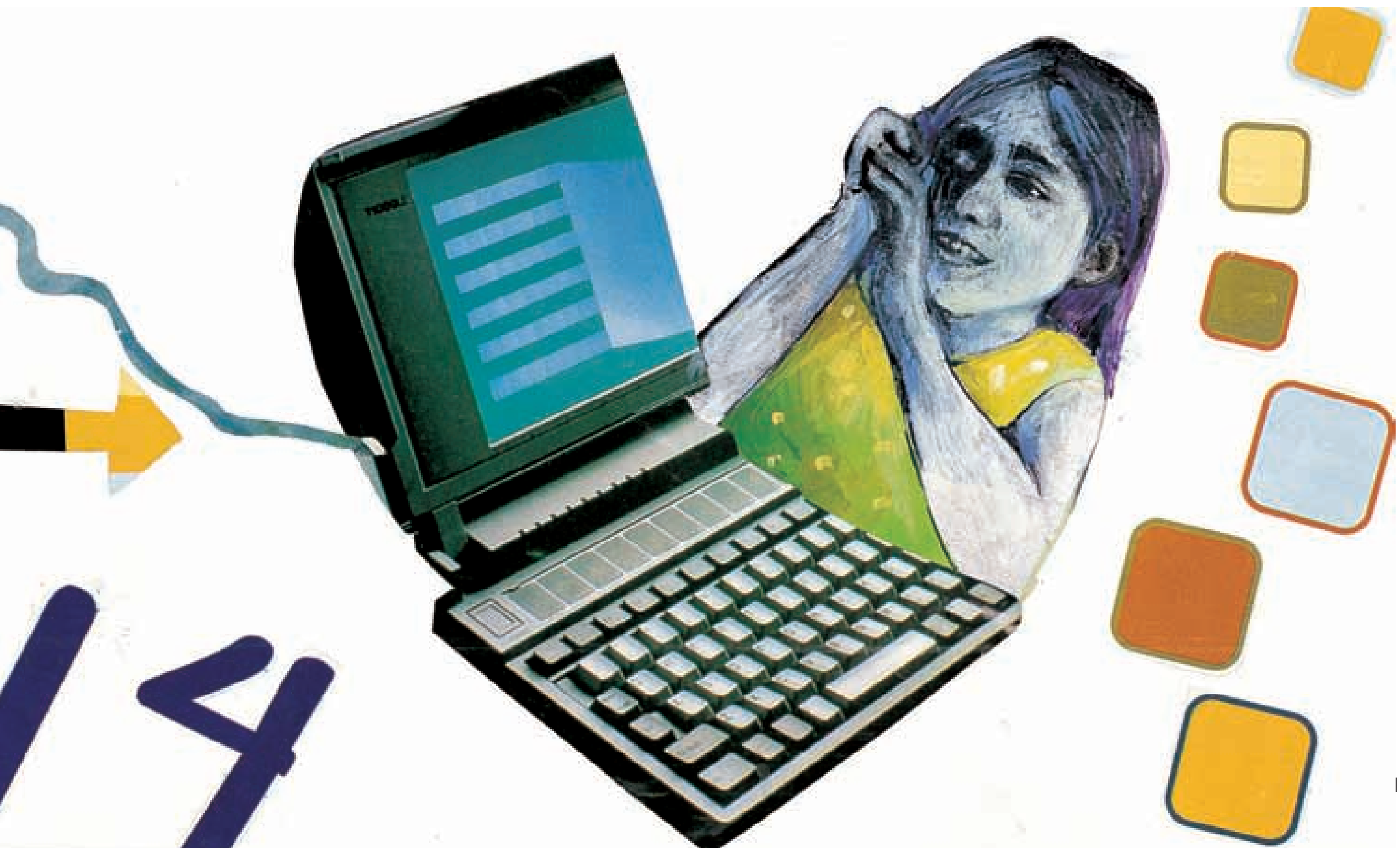
Cómo llevar a cabo un debate



Cómo conducir una revisión grupal de textos

Cómo conducir un diálogo grupal

Cómo coordinar la discusión de un dilema moral



4 Utilizar recursos múltiples

Una parte fundamental de la educación secundaria es aprender a utilizar recursos impresos y tecnológicos para conocer diversas expresiones culturales, buscar información y resolver problemas. Por ello es indispensable explorar y conocer diferentes materiales como parte de la preparación de las clases y

- Llevar al aula materiales complementarios: para compartir con los alumnos y animarlos a buscar y compartir con el grupo diferentes recursos.
- Promover el uso constante de otros recursos tecnológicos y bibliográficos disponibles en la escuela: si tienen acceso a computadoras, puede

fomentarse su uso para la realización de los trabajos escolares y, de contar con conectividad, para buscar información en Internet. Asimismo las colecciones de Bibliotecas Escolares y de Aula, la biblioteca de la escuela y la biblioteca pública son fuentes de información potenciales importantes. Por otro lado, el uso de recursos tecnológicos, como los videos, los simuladores para computadora y otras actividades ejecutables en pantalla facilitan la comprensión de fenómenos o procesos matemáticos, biológicos, físicos y químicos que muchas veces son difíciles de replicar en el laboratorio o a través de alguna actividad experimental.

5 Desplegar ideas en el aula para consultas rápidas

Las paredes del aula constituyen un espacio importante para exponer diferentes recursos de consulta rápida y constante. Por ejemplo, se puede:

- Crear un banco de palabras en orden alfabético de los términos importantes que se están aprendiendo en las distintas materias. Sirven de recordatorio para los estudiantes cuando tienen que resolver sus guías, escribir pequeños textos, participar en los diálogos, etc.
- Dejar apuntadas diferentes ideas aportadas por todos para resolver algún tipo de problema. Por ejemplo, puede hacerse un cartel para orientar qué hacer cuando uno encuentra una palabra desconocida en un texto:

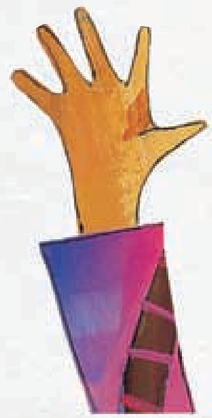
¿QUÉ HACER CUANDO NO SABES QUÉ SIGNIFICA UNA PALABRA?

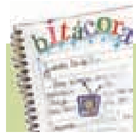
Tratar de inferir el significado del texto.

Buscarla en el diccionario.

Preguntar al maestro o a un compañero.

Saltarla y seguir leyendo.



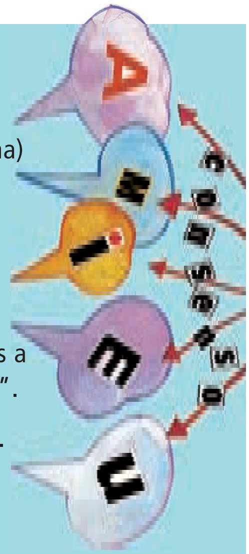


Cómo organizar la bitácora del grupo

- Colgar mapas, tablas, gráficas, fórmulas, diagramas y listas para la consulta continua.
- Puede involucrar a los alumnos en el registro de la historia del grupo y la evolución de las clases. Una forma de hacer esto es llevar una bitácora donde se escribe cada día lo que ocurrió en las diferentes clases. Los alumnos, por turnos, toman la responsabilidad de llevar el registro del trabajo y experiencias del día. La bitácora se pone a disposición de todos para consultar. Esta no es una actividad para calificar o corregir. Se trata de darle importancia y presencia a la memoria del grupo durante el año escolar. Cada alumno podrá seleccionar qué fue lo relevante durante el día y escribirá de acuerdo a su estilo y sus intereses.

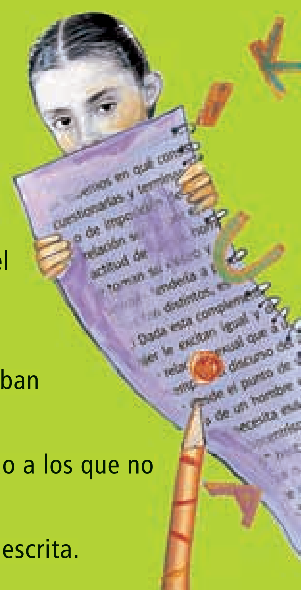
Pistas didácticas

Cómo conducir un diálogo grupal



- Acepte dos o tres intervenciones de los alumnos. Anote algunas respuestas en el pizarrón, para recuperarlas en la discusión o conclusiones.
- Acepte respuestas distintas; sugiera que se basen en lo que dice el texto (video, mapa o problema) o en situaciones parecidas.
- Para avanzar en el diálogo, resalte las diferencias y semejanzas entre las participaciones de los alumnos. Por ejemplo: "Juan dijo tal cosa, pero María piensa esta otra, ¿qué otras observaciones se podrían hacer?"
- Cierre cada punto y dé pie al siguiente inciso. Por ejemplo: "Ya vimos las características comunes a todos los seres vivos, ahora pasaremos a las diferencias entre un ser vivo y un objeto inanimado".
- En cada ocasión otorgue la palabra a distintos alumnos, incluyendo los que no levanten la mano.
- Señale claramente el momento de las conclusiones y el cierre de los comentarios.

Cómo conducir una revisión grupal de textos individuales

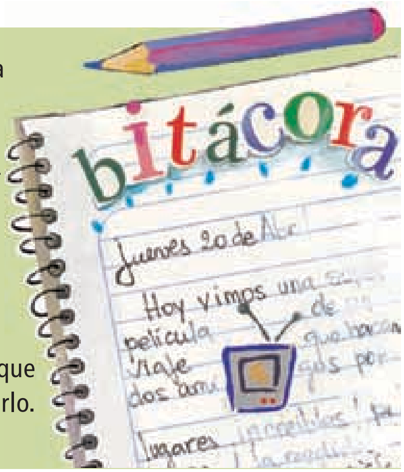


- Solicite un voluntario para leer su texto frente al grupo. Copie fragmentos breves de los textos en el pizarrón o usando el procesador de textos, para ejemplificar frases o expresiones que puedan ser mejoradas.
- Acepte dos o tres intervenciones, para hacer comentarios sobre el contenido cotejando lo que plantea el libro para los alumnos. En el pizarrón haga las modificaciones sugeridas por los comentaristas y pregunte al autor si está de acuerdo, si su texto mejora con las aportaciones o se le ha ocurrido otra idea para mejorarlo. Permita que sea el propio autor el que concluya cuál es la manera que mejor se acerca a lo que quiere relatar, la corrija en el pizarrón y después en su cuaderno.
- Solicite que todos relean y revisen sus textos, hagan las correcciones necesarias y lo reescriban con claridad para, posteriormente, poder leerlo con facilidad ante el grupo.
- En cada ocasión invite a alumnos distintos a revisar sus textos con todo el grupo, incluyendo a los que no se autopropongan.
- Siempre propicie actitudes positivas hacia la revisión para el mejoramiento de la expresión escrita.

Cómo anotar referencias de las fuentes utilizadas

- Cuando se utilizan textos o imágenes que aparecen en distintos medios, se cita su procedencia, usando alguno de los siguientes códigos:
- Libro: apellido del autor, nombre del autor, título, lugar de edición, editorial y año de publicación. Si se trata de un diccionario o enciclopedia, anotar también las palabras o páginas consultadas.
- Revista o periódico: título, número, lugar y fecha de publicación, páginas consultadas.
- Programa de TV: Nombre del programa, horario de transmisión y canal.

Cómo organizar la bitácora del grupo

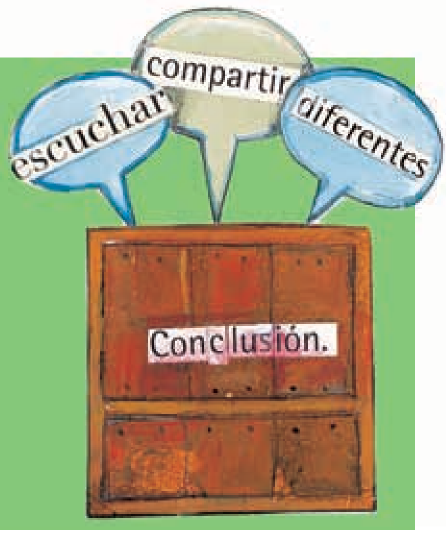


- La bitácora es una actividad compartida por todos los miembros del grupo. Se busca escribir día a día la vida del grupo escolar. Es una actividad libre de escritura en el sentido de que cada alumno puede elegir qué aspecto del día comentar y cómo comentarlo. **No se trata de corregirlo** sino de compartir las diferentes perspectivas acerca de los eventos centrales de la convivencia en el aula.
- Cada día un alumno diferente se hace responsable de escribir, dibujar, insertar fotografías, etcétera.
- Es una actividad que los alumnos pueden realizar en un procesador de palabras.
- Si cuenta con conectividad, se puede crear un blog (bitácora electrónica) del grupo que se despliegue en Internet. En la página **www.blogspot.com** se explica cómo hacerlo.

Cómo hacer una lluvia de ideas

- Plantee una pregunta abierta relacionada con una actividad, texto, imagen o situación (¿Qué pasaría si…? ¿Cómo podríamos…? ¿Por qué creen que esto ocurre así…? ¿Qué les sugiere esto?).
- Permita y promueva que los alumnos den su opinión, anote ideas y sugerencias y planteen dudas.
- Conforme los alumnos van participando, apunte en el pizarrón, de manera abreviada, sus comentarios y aportaciones. También puede anotar sus ideas en un procesador de palabras y proyectarlas en la pantalla.
- Cuando los alumnos han terminado de participar, revise con ellos la lista y busquen diferentes formas de organizar sus ideas (juntar todas las similares, ordenarlas cronológicamente, agruparlas por contenido, etcétera).
- Resuma con el grupo las principales aportaciones.
- Retome las participaciones cuando sea pertinente relacionarlas con otras intervenciones.

Cómo concluir un diálogo o una actividad



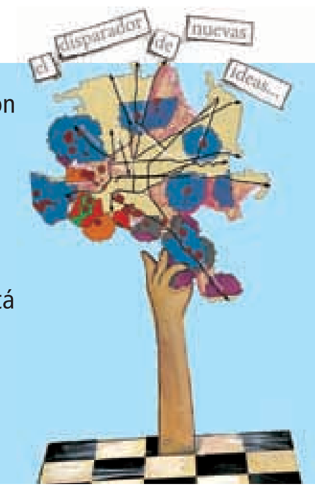
- Hacia el final del diálogo o de una actividad, resuma los comentarios de todos los participantes.
- Señale las principales semejanzas y diferencias en las aportaciones. Recuérdele al grupo cómo se plantearon y cómo se resolvieron.
- Ayude a los alumnos a definir las conclusiones, inferencias y acuerdos principales de la actividad y de sus reflexiones.

- Permita a los alumnos expresar sus dudas y contestarlas entre ellos.
- Anote en el pizarrón las ideas y conclusiones más importantes.

Cómo llevar a cabo un debate

- Antes de empezar, solicite a dos alumnos que desempeñen las funciones de moderador y de secretario, explicándoles en qué consiste su labor.
- Defina con claridad los aspectos del tema seleccionado que se van a debatir; debe plantearse con claridad cuál o cuáles son los puntos o aspectos que se están confrontando.
- El moderador anota en una lista los nombres de quienes desean participar e inicia la primera ronda de participaciones para que cada uno exprese su punto de vista y sus argumentos acerca del tema.
- El secretario toma notas de las participaciones poniendo énfasis en las ideas o conceptos que aportan.
- Al agotar la lista de participaciones, el moderador hace un resumen de los comentarios. De ser necesario y contar con tiempo, puede abrirse una nueva lista de participaciones; o bien, al final resume las principales conclusiones o puntos de vista para que el secretario tome nota de ellas.
- Cada vez que sea necesario, es importante que el moderador les recuerde a los participantes cuáles son los puntos centrales del debate, para evitar distracciones.
- Al final, el secretario lee sus anotaciones y reporta al grupo las conclusiones o puntos de vista.

Cómo introducir otros recursos



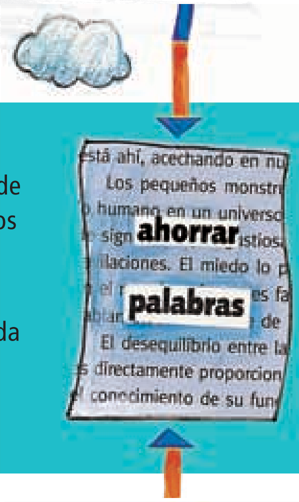
- Explore y lea con anticipación los materiales, seleccionando aquellos que desea compartir con el grupo.
- Presente el material (libro, revista, artículo de periódico, mapa, imagen, etcétera) al grupo, comentando qué tipo de material es, el autor o artista, el año.
- Lea o muéstrelo al grupo.
- Converse con los alumnos acerca de la relación de este material con el trabajo que se está desarrollando. Propicie la reflexión sobre la relación del material presentado con la actividad que se realiza o el contenido que se trabaja.
- Invítelos a revisar el material y conocerlo más a detalle, o que ellos sugieran, aporten, lleven o busquen material relevante para los temas que están abordando en el curso.

Cómo coordinar la discusión de un dilema moral

- Pida a los alumnos que lean el dilema individualmente y respondan las preguntas. Indique que los comentarios se harán más adelante.
- Aclare con el grupo el sentido del dilema, preguntándoles, ¿por qué es un dilema?, ¿cuál es el tema central?, ¿qué habrá pensado el personaje en cuestión?
- Invite a los alumnos a intercambiar ideas en plenaria.
- Explique previamente dos reglas básicas: a) Debatir argumentos y no agredir ni elogiar a personas, y b) turnarse el uso de la palabra, de modo que se ofrezcan equilibradamente argumentos a favor y en contra de cada postura.
- A medida que el grupo identifique las posturas y argumentos posibles, anótelos en el pizarrón e invite al grupo a organizarlos, mediante preguntas como: ¿Cuál es el mejor argumento a favor de X postura y por qué? ¿Habría otros argumentos?, ¿cuáles?
- Para cerrar, invite al grupo a redefinir o confirmar sus posturas iniciales, con base en los argumentos dados, y a buscar salidas diversas y más satisfactorias al dilema.

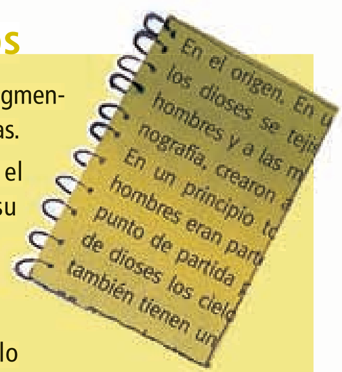
Cómo apoyar la elaboración de resúmenes

- Elija el texto que se va a resumir y léalo con el grupo.
- Solicite participaciones a partir de las preguntas: ¿cuál consideran que es la idea principal de cada párrafo?, ¿cuáles serán las ideas secundarias o ejemplos? Acepte participaciones de los alumnos, escriba algunas en el pizarrón o con el procesador de textos y después proponga usted sus respuestas a las mismas preguntas.
- A partir de las respuestas, ejemplifique en el pizarrón cómo retomar la idea principal de cada párrafo. Puede incluir definiciones textuales, vocabulario técnico y ejemplos del texto.
- De ser posible, muestre a los alumnos ejemplos de resúmenes elaborados por usted o por otros estudiantes.



Cómo conducir una revisión grupal de textos colectivos

- Solicite a un equipo voluntario para leer su texto frente al grupo y otro para comentarlo. Copie fragmentos breves del texto en el pizarrón para ejemplificar frases o expresiones que puedan ser mejoradas.
- Acepte dos o tres observaciones de los comentaristas, basadas en las pautas de revisión. En el pizarrón haga las modificaciones sugeridas y pregunte a los autores si están de acuerdo, si su texto mejora con las aportaciones o se les ocurre otra idea para mejorarlo. Permita que los autores sean quienes decidan sobre la manera que mejor se acerca a lo que quieren decir, reelaboren su idea en el pizarrón y luego en su cuaderno.
- Solicite que en cada equipo relean y revisen sus textos, hagan las correcciones necesarias y lo reescriban con claridad para, posteriormente, leerlo con facilidad ante el grupo.
- En cada ocasión, invite a equipos distintos a que revisen y comenten sus textos con todo el grupo. Siempre propicie actitudes positivas hacia la revisión para el mejoramiento de la expresión escrita.

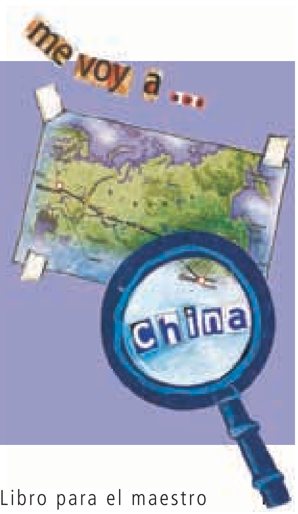


Para hacer uso del diccionario

- Haga una lista, con sus alumnos, de las palabras que no conocen o no comprenden.
- Búsquenlas en el diccionario en orden alfabético.
- Lea el significado e intenten utilizarlo dentro de un contexto. También pueden hacer uso de sinónimos.
- Relea las oraciones que contienen las palabras consultadas para comprenderlas ampliamente.
- Si aún quedan dudas, busque la palabra en un libro especializado.

Cómo leer un mapa

- Pida a los alumnos que identifiquen el título del mapa para saber qué tipo de información representa. Si se trata de un mapa histórico, solicite a los estudiantes que identifiquen de cuándo data y si representa hechos o procesos del pasado.
- Revise con los alumnos las referencias o simbología.
- Señale claramente cuál es la escala empleada en el mapa.
- Revise con el grupo la simbología utilizada y su explicación.
- Comente con el grupo la información que se puede obtener a partir del mapa o relacionándolo con otras informaciones previas.
- Interprete la orientación a partir de leer la rosa de los vientos.



Bloque 1

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
1. Productos notables y factorización. Efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas tales como: $(x + a)^2$; $(x + a)(x + b)$; $(x + a)(x - a)$. Factorizar expresiones algebraicas tales como: $x^2 + 2ax + a^2$; $ax^2 + bx$; $x^2 + bx + c$; $x^2 + a^2$.	1.1 A formar cuadrados	Programa 1		
	1.2 El cuadrado de una diferencia		Interactivo	
	1.3 La diferencia de dos cuadrados			
	1.4 A formar rectángulos	Programa 2		
	1.5 Un caso especial de factorización			
2. Triángulos congruentes y cuadriláteros. Aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros.	2.1 Lados opuestos iguales			La diagonal de un paralelogramo (Geometría dinámica)
	2.2 Puntos medios	Programa 3	Interactivo	Cómo verificar la congruencia de las figuras (Geometría dinámica)
3. Entre rectas y circunferencias. Determinar mediante construcciones las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias. Caracterizar la recta secante y la tangente a una circunferencia.	3.1 Puntos en común			
	3.2 Trazos de tangentes	Programa 4	Interactivo	Tangentes (Geometría dinámica)
	3.3 Entre circunferencias		Interactivo	
	3.4 Algunos problemas	Programa 5		
4. Ángulos en una circunferencia. Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.	4.1 Dos ángulos de una circunferencia			Ángulos inscritos en una circunferencia (Geometría dinámica)
	4.2 Relaciones a medias			
	4.3 Probemos que uno es la mitad del otro	Programa 6	Interactivo	
	4.4 Problemas de medida	Programa 7		
5. Problemas con curvas. Calcular la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.	5.1 Sólo una parte	Programa 8	Interactivo	
	5.2 Lo que resta			
	5.3 De todo un poco			
6. La razón de cambio. Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.	6.1 El incremento			¿Sabes que es una razón? (Hoja de cálculo)
	6.2 Pendiente y razón de cambio	Programa 9	Interactivo	
	6.3 Algunas razones de cambio importantes	Programa 10		
7. Diseño de experimentos y estudios estadísticos. Diseñar un estudio o experimento a partir de datos obtenidos de diversas fuentes y elegir la forma de organización y representación tabular o gráfica más adecuada para presentar la información.	7.1 Diseño de un estudio estadístico. ¿Qué materia te gusta más?	Programa 11	Interactivo	
	7.2 Un juego de letras. Otro estudio estadístico			
	7.3 ¿Qué cantidad de agua consumen diariamente los alumnos de tercer grado?	Programa 12		
EVALUACIÓN				

Bloque 2

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
8. Ecuaciones no lineales. Utilizar ecuaciones no lineales para modelar situaciones y resolverlas utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	8.1 El número secreto	Programa 13		Ecuaciones con más de una solución I (Calculadora)
	8.2 Cubos, cuadrados y aristas			
	8.3 Menú de problemas	Programa 14	Interactivo	
9. Resolución de ecuaciones por factorización. Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	9.1 ¿Cuánto miden los lados?	Programa 15		
	9.2 Los factores de cero		Interactivo	
	9.3 El adorno	Programa 16		
	9.4 Apliquemos lo aprendido			
10. Figuras semejantes. Construir figuras semejantes y comparar las medidas de los ángulos y de los lados.	10.1 Un corazón muy especial	Programa 17	Interactivo	
	10.2 Aplicaciones de la semejanza	Programa 18	Interactivo	
11. Semejanza de triángulos. Determinar los criterios de semejanza de triángulos. Aplicar los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos. Aplicar la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles.	11.1 Explorando la semejanza de triángulos	Programa 19		
	11.2 Criterios de semejanza de triángulos I			Idea de triángulos semejantes (Geometría dinámica)
	11.3 Criterios de semejanza de triángulos II			
	11.4 Cálculo de distancias	Programa 20	Interactivo	
12. Índices. Interpretar y utilizar índices para explicar el comportamiento de diversas situaciones.	12.1 El índice nacional de precios al consumidor	Programa 21		
	12.2 Índices en la escuela			
	12.3 ¿Quién es el pelotero más valioso?	Programa 22		
	12.4 Más sobre índices		Interactivo	
13. Simulación. Utilizar la simulación para resolver situaciones probabilísticas.	13.1 Simulación	Programa 23		
	13.2 Aplicando la simulación			
	13.3 Simulación y tiros libres	Programa 24	Interactivo	Simulación con el modelo de urna (1) (Hoja de cálculo)
EVALUACIÓN				

Bloque 3

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
14. Relaciones funcionales y expresiones algebraicas. **[28-37]** Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica.	14.1 El área de la imagen		Interactivo	
	14.2 El corral de los conejos	Programa 25		
	14.3 El medio litro de leche	Programa 26		
15. Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general. **[38-51]** Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la fórmula general.	15.1 La fórmula general			
	15.2 El beisbolista	Programa 27	Interactivo	
	15.3 Cuántas soluciones tiene una ecuación			
	15.4 La razón dorada	Programa 28		
16. Teorema de Tales. **[52-63]** Determinar el teorema de Tales mediante construcciones con segmentos. Aplicar el teorema de Tales en diversos problemas geométricos.	16.1 La culpa es de las paralelas	Programa 29	Interactivo	Teorema de Tales (Geometría dinámica)
	16.2 Proporcionalidad contra paralelismo			Recíproco del teorema de Tales (Geometría dinámica)
	16.3 Ahí está el teorema de Tales	Programa 30		
17. Figuras homotéticas. **[64-73]** Determinar los resultados de una homotecia cuando la razón es igual, menor o mayor que 1 o que −1. Determinar las propiedades que permanecen invariantes al aplicar una homotecia a una figura. Comprobar que una composición de homotecias con el mismo centro es igual al producto de las razones.	17.1 Especialmente semejantes	Programa 31	Interactivo	La homotecia como aplicación del teorema de Tales (Geometría dinámica)
	17.2 Depende de la razón	Programa 32	Interactivo	
18. Gráficas de relaciones funcionales. **[74-83]** Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos.	18.1 Plano inclinado	Programa 33	Interactivo	
	18.2 La ley de Boyle	Programa 34		
	18.3 La caja			
19. Algunas características de gráficas no lineales. **[84-109]** Establecer la relación que existe entre la forma y la posición de la curva de funciones no lineales y los valores de las literales de las expresiones algebraicas que definen a estas funciones.	19.1 ¡Abiertas y más abiertas!		Interactivo	Funciones cuadráticas (Hoja de cálculo)
	19.2 ¡Para arriba y para abajo!		Interactivo	
	19.3 Las desplazadas	Programa 35	Interactivo	
	19.4 ¡Ahí les van unas cúbicas!	Programa 36	Interactivo	
	19.5 ¡Ahí les van unas hipérbolas!	Programa 37	Interactivo	
	19.6 Efectos especiales		Interactivo	
20. Gráficas por pedazos. **[104-119]** Interpretar y elaborar gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	20.1 Las albercas		Interactivo	
	20.2 Diversos problemas	Programa 38	Interactivo	
EVALUACIÓN				

Bloque 4

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
21. Diferencias en sucesiones. **[122-135]** Determinar una expresión general cuadrática para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de diferencias.	21.1 Números figurados	Programa 39	Interactivo	
	21.2 Las diferencias en expresiones cuadráticas			
	21.3 El método de diferencias	Programa 40		
	21.4 Apliquemos lo aprendido			
22. Teorema de Pitágoras. **[136-145]** Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.	22.1 ¿Qué nos dice el teorema de Pitágoras?	Programa 41	Interactivo	Teorema de Pitágoras (Geometría dinámica)
	22.2 Aplicaciones del teorema de Pitágoras I	Programa 42	Interactivo	
	22.3 Aplicaciones del teorema de Pitágoras II			
23. Razones trigonométricas. **[146-161]** Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.	23.1 La competencia		Interactivo	Ángulo de elevación y depresión (Hoja de cálculo)
	23.2 Cosenos y senos	Programa 43		
	23.3 30°, 45° y 60°			
	23.4 A resolver problemas	Programa 44	Interactivo	
24. El crecimiento exponencial y el lineal. **[162-175]** Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial de diversas situaciones.	24.1 Crecimiento de poblaciones	Programa 45	Interactivo	
	24.2 Interés compuesto			
	24.3 Gráfica de una sucesión exponencial	Programa 46		
	24.4 La depreciación de las cosas	Programa 47	Interactivo	
25. Representación de la información. **[176-183]** Analizar la relación entre datos de distinta naturaleza, pero referidos a un mismo fenómeno o estudio que se presenta en representaciones diferentes, para producir nueva información.	25.1 Muchos datos	Programa 48	Interactivo	
	25.2 De importancia social			
EVALUACIÓN				

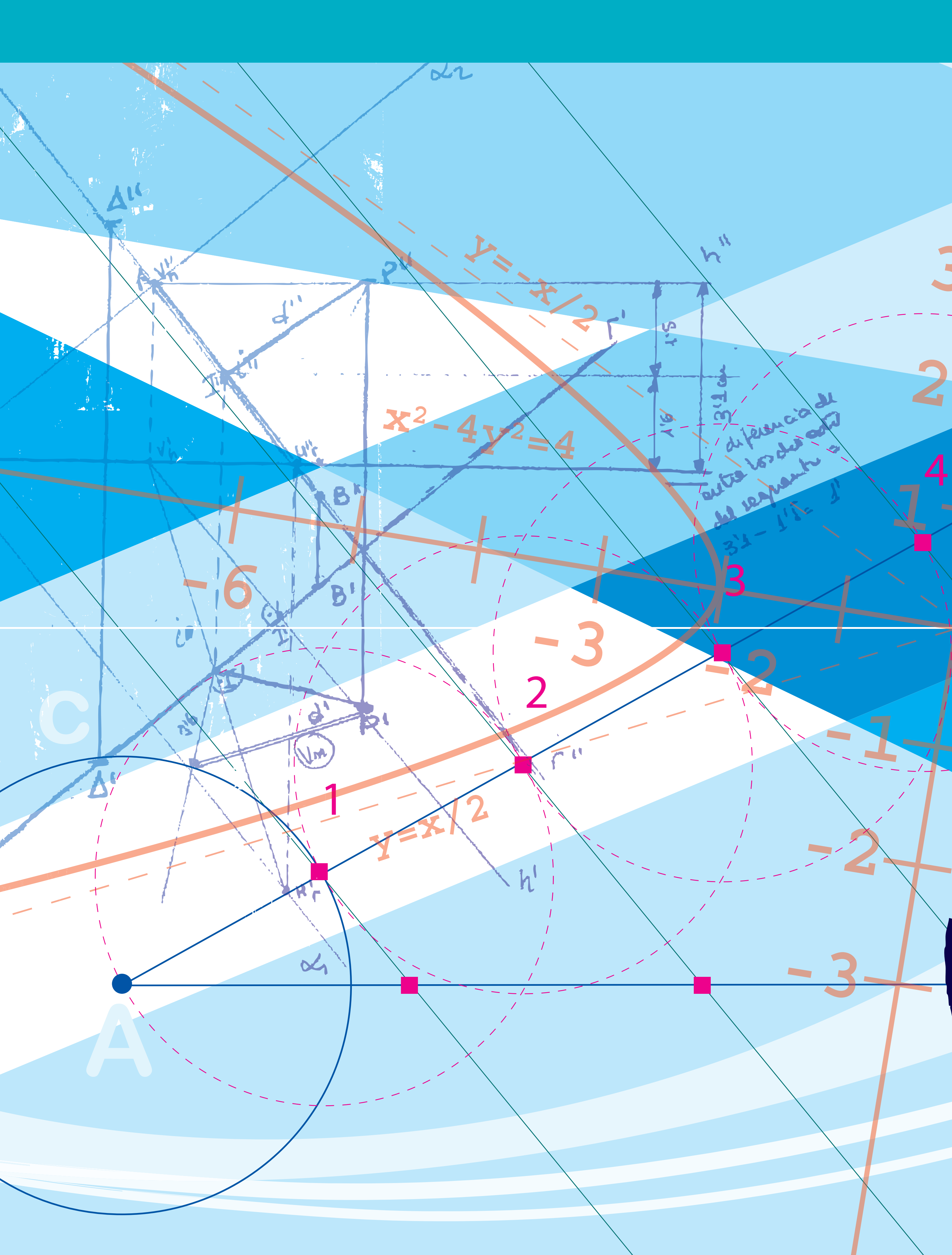
Bloque 5

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
26. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. **[186-191]** Dado un problema, determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se puede resolver, y viceversa, proponer una situación que se modele con una de esas representaciones.	26.1 Los discípulos de Pitágoras			
	26.2 Ecuaciones y geometría	Programa 49	Interactivo	
27. Conos y cilindros. **[192-201]** Anticipar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras. Construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Determinar la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera cono recto.	27.1 Sólidos de revolución	Programa 50	Interactivo	
	27.2 Cilindros rectos			
	27.3 Conos rectos	Programa 51		
	27.4 Secciones de corte		Interactivo	
28. Volumen del cono y del cilindro. **[202-207]** Construir las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.	28.1 Tinacos de agua		Interactivo	
	28.2 Conos de papel	Programa 52	Interactivo	
29. Estimar volúmenes. **[208-209]** Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos. Calcular datos desconocidos dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.	29.1 Problemas prácticos	Programa 53	Interactivo	
		Programa 54		
30. Gráfica cajabrazos. **[210-221]** Interpretar, elaborar y utilizar gráficas de cajabrazos de un conjunto de datos para analizar su distribución a partir de la mediana o de la media de dos o más poblaciones.	30.1 Interpretación de datos	Programa 55		
	30.2 Construcción de la gráfica cajabrazos	Programa 56	Interactivo	
	30.3 Comparación de datos mediante la gráfica de cajabrazos	Programa 57		
EVALUACIÓN				

EJE 1:	Sentido numérico y pensamiento algebraico
EJE 2:	Forma, espacio y medida
EJE 3:	Manejo de la información

Clave de logos

Trabajo individual	Sitios de Internet
En parejas	Bibliotecas Escolares y de Aula
En equipos	Programa de Televisión
Todo el grupo	Interactivo
Conexión con otras asignaturas	Audiotexto
Glosario	Aula de Medios
Consulta otros materiales	Otros Textos
CD de recursos	



$Y=-x/2$
$x^2-4y^2=4$
$y=x/2$
-6
-3
-2
-1
C
A
1
2
3
4

BLOQUE 3

Propósito de la sesión. Establecer la expresión que describe la relación entre el área de una imagen proyectada y la distancia del proyector a la pantalla.

Propósito del Interactivo. Presentar problemas de la vida real y modelarlos mediante expresiones algebraicas.

Analizar las expresiones algebraicas mediante el uso de tablas.

Sugerencia didáctica. Una vez que hayan leído este párrafo, analicen juntos las imágenes: haga notar que cuando el proyector está a una distancia de 1 m de la pantalla, la imagen tiene una altura de 0.5 m; mientras que cuando el proyector está al doble de distancia (2 m), la imagen tiene el doble de altura (1 m). Por ello se afirma que es una relación de proporcionalidad directa.

Haga la siguiente pregunta: Si el proyector se encuentra a 5 m de distancia ¿cuál sería la altura de la imagen?

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos escriban una expresión que describa la relación entre la distancia a la que se encuentra el proyector y el tamaño de la imagen.

Respuestas.

a) El lado medirá 1 m y el área 1 m^2.

b) A tres metros, el área sería 2.25 m^2 porque el lado mediría 1.5 m.

c) A medio metro, el área sería 0.0625 m^2 porque el lado mediría 0.25 m.

SECUENCIA 14

Relaciones funcionales y expresiones algebraicas

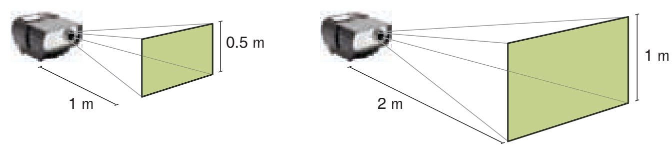
En esta secuencia encontrarás las expresiones algebraicas que corresponden a distintas relaciones funcionales.

SESIÓN 1

EL ÁREA DE LA IMAGEN

>>> Para empezar

Cuando una imagen se proyecta sobre una pantalla, su tamaño aumenta. Dicho aumento puede ser mayor o menor dependiendo de la distancia a la que se encuentre el proyector respecto de la pantalla.



Más aún, la relación entre la distancia a la que se coloca el proyector y las dimensiones de la imagen (largo y ancho) es de proporcionalidad directa. Es decir, si se duplica, triplica, reduce a la mitad, etc. la distancia a la que se encuentra el proyector, se duplicarán, triplicarán, reducirán a la mitad, etc. el largo y el ancho de la imagen.

>>> Consideremos lo siguiente

En la imagen superior se está proyectando un cuadrado. Cuando el proyector se coloca a 1 m de distancia de la pantalla, la imagen proyectada resulta ser un cuadrado de lado 0.5 m.

a) Si el proyector se colocara a 2 m de distancia, ¿cuánto medirá el lado del cuadrado proyectado? ________________ m; ¿cuál sería su área? __________ m^2.

b) Si el proyector se colocara a 3 m, ¿cuál sería el área de la imagen proyectada? ________________ m^2.

c) ¿Y si se colocara a $\frac{1}{2}$ m? ________________ m^2.

12

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de las literales.
Subtema
Relación funcional.
Antecedentes
Desde el primer grado de secundaria los alumnos han estudiado las relaciones entre cantidades que varían una en función de la otra. En esta secuencia continuarán trabajando ese tema resolviendo situaciones de otras disciplinas.

Propósitos de la secuencia
Reconocer en otras disciplinas la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la variación mediante una tabla o una expresión algebraica.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**El área de la imagen** Establecer la expresión que describe la relación entre el área de una imagen proyectada y la distancia del proyector a la pantalla.	Interactivo
2	**El corral de los conejos** Utilizar una relación cuadrática para encontrar el área máxima de un corral con perímetro fijo.	Programa 25
3	**El medio litro de leche** Conocer otras expresiones algebraicas que modelan distintos fenómenos.	Programa 26

d) Escribe una expresión que sirva para calcular el área de la imagen proyectada a partir de la distancia a la que se encuentra el proyector. ______________________

Ayúdate de la expresión anterior para contestar la siguiente pregunta:

e) Si el proyector se colocara a 1.4 m de distancia, ¿cuál sería el área del cuadrado? ____________ m^2.

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla.

Distancia del proyector a la pantalla (m)	Longitud del lado del cuadrado proyectado (m)	Área del cuadrado proyectado (m^2)
0.5	0.25	0.625
1.0	0.5	0.25
1.5	0.75	0.5625
2.0	1	1
2.5	1.25	1.5625
3.0	1.5	2.25

II. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué operación hay que hacer para completar la segunda columna a partir de la primera? ______________________

b) Si se denota con la letra x a la distancia entre el proyector y la pantalla, ¿cuál es la expresión que representa la longitud del lado del cuadrado?

Lado = ________

c) ¿Qué operación hay que hacer para completar la tercera columna a partir de la segunda? ______________

d) ¿Qué operaciones hay que hacer para completar la tercera columna a partir de la primera? ______________________

e) Si denotamos con la letra y el área de la imagen proyectada, ¿cuál es la expresión que relaciona y con x? $y =$ __________

Comparen sus respuestas y comenten si la relación entre la x y la y es de proporcionalidad directa.

13

Respuestas.

d) Si x es la distancia a la que se encuentra el proyector, y y el área de la imagen, entonces la expresión sería $y = 0.25x^2$.

e) 0.49 m^2

Posibles respuestas para la pregunta d). La expresión $y = 0.25x^2$ puede escribirse de otras maneras, como:

$y = (0.5x)^2$

$y = (0.5x)(0.5x)$

$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$y = \frac{x^2}{4}$

Posibles dificultades. Quizá los alumnos escriban $y = 0.5x$ para expresar la relación entre la distancia del proyector y el área de la imagen, pero sería erróneo. La expresión en realidad sirve para hallar el lado del cuadrado de la imagen (y) conociendo la distancia a la que se encuentra el proyector (x).

Otro posible fuente de error ocurre cuando al querer denotar la operación "multiplicar 0.5 por x y el resultado elevarlo al cuadrado", escriben $y = 0.5x^2$. La jerarquía de operaciones prioriza la exponenciación sobre la multiplicación, por lo que primero debe elevarse x al cuadrado, y luego multiplicarse por 0.5. Si se le agregan paréntesis, la expresión es correcta: $y = (0.5x)^2$.

Sugerencia didáctica. Si los alumnos escriben distintas expresiones correctas, pídales que pasen al pizarrón a explicarlas y que las comparen. Si encuentran una sola forma correcta de escribir la expresión, o si no logran escribir ninguna, permítales avanzar en la sesión, más adelante podrán retomarlas y hacer correcciones.

Sugerencia didáctica. Aunque algunos de los estudiantes no hayan logrado escribir una expresión correcta, es importante que se cercioren de que la que escribieron en realidad denote las operaciones que quieren hacer. Es decir, deben estar seguros de que no han cometido errores como olvidar la jerarquía de operaciones.
Para hacer esta verificación, pídales a todos que escriban sus expresiones en el pizarrón. Descarte las repetidas, y para todas las demás, digan cuánto vale y si x es igual a 1, 2 y 4, por ejemplo. Lo importante en este punto no es decir quién escribió una expresión correcta, sino corregir errores algebraicos.

Sugerencia didáctica. Para analizar la relación que existe entre la distancia a la que se coloca el proyector y el tamaño de la imagen, diga a los alumnos que observen la tabla que llenaron en el apartado *Manos a la obra*. Cuando x vale 1, y vale 0.25. Si la relación fuera de proporcionalidad directa, se esperaría que cuando x vale el doble (2) y valiera el doble (0.5), pero esto no ocurre. Analicen varios casos para que quede claro que la relación no es de proporcionalidad directa.

Respuestas.

a) Dividir entre 2 o multiplicar por 0.5

b) Lado = $0.5x$, también podría escribirse Lado = $\frac{x}{2}$

c) Elevar al cuadrado.

d) Dividir entre dos y después elevar al cuadrado, o bien, multiplicar por 0.5 y después elevar al cuadrado.

e) $y = (0.5x)^2$

$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ o alguna otra equivalente.

Sugerencia didáctica. Diga a los alumnos que revisen la expresión que escribieron en el apartado *Consideremos lo siguiente* y que hagan correcciones si fuera necesario.
Este puede ser también un buen momento para que les plantee expresiones equivalentes a $y = (0.5x)^2$ como:

$y = 0.25x^2$

$y = (0.5x)(0.5x)$

$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$y = \frac{x^2}{4}$

Utilicen cada expresión para obtener el valor de y asignando tres o cuatro valores a x y compárenlas. Se espera que logren decir cosas como:

- Es lo mismo escribir $(0.5x)^2$ que $(0.5x)(0.5x)$, y si se efectúa esa multiplicación, se obtiene otra de las expresiones de la lista $0.25x^2$.
- Es lo mismo $(0.5x)^2$ que $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ porque da igual multiplicar por 0.5 que dividir entre 2.
- La expresión $\frac{x^2}{2}$ es equivalente a $0.25x^2$ porque da lo mismo dividir entre 4 que multiplicar por 0.25.
- Cuando terminen de comparar las expresiones, plantéeles como reto que escriban otra que sea equivalente a las anteriores.

Respuestas.

a) $3.4225\ m^2$

b) Aproximadamente a 2.8 m.

Posibles procedimientos. Para contestar la pregunta del inciso b) los alumnos deberán emplear de distinta forma la expresión $y = 0.25x^2$.

- Si ya se conoce el área (y), para encontrar la distancia a la que se encuentra el proyector (x), la expresión sería $x = y\sqrt{0.25}$
- Los alumnos ya saben utilizar operaciones inversas, por lo que podrían plantearse $2 = 0.25x^2$ ¿cuánto debe valer x para obtener $y = 2$?

2

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a estas dos actividades.

Respuestas.

1. Si el lado de la imagen mide 30 cm, entonces su área es de $900\ cm^2$ o $0.09\ m^2$. La expresión sería $y = 0.09x^2$.
2. Ya se sabe que las medidas de los lados de la imagen y distancia a la que se encuentra el proyector (x), tienen una relación de proporcionalidad directa: para cualquier valor de x los lados del rectángulo medirán $0.6x$ y $0.4x$. Entonces, basta multiplicar esas dos expresiones para obtener el área: $y = (0.6x)(0.4x) = 0.24x^2$.

Ahora bien, si $x = 4.3$, entonces $y = 0.24\ (4.3)^2 = 4.4376\ m^2$.

SECUENCIA 14

III. Usen la expresión que encontraron para contestar lo siguiente:

a) Si el proyector se colocara a 3.7 m, ¿cuál sería el área de la imagen? ________

b) Si se quiere que la imagen tenga un área de $2\ m^2$, ¿a qué distancia deberá colocarse el proyector? ________

>>> A lo que llegamos

En algunas situaciones, como en el caso de la proyección, la relación entre dos cantidades x, y puede ser escrita de la forma $y = ax^2$, donde a es un número fijo. A esta relación se le conoce como relación cuadrática, pues la variable y depende del cuadrado de la variable x, es decir, de x^2.

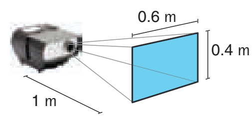
A diferencia de las relaciones de proporcionalidad directa, al incrementar al doble el valor de x no se duplica el valor de y, sino que se cuadruplica.

>>> Lo que aprendimos

1. Un proyector despliega un cuadrado de lado 30 cm al colocarse a 1 m de la pantalla. Al colocar el proyector a otra distancia x se producirá un cuadrado de una cierta área y en metros cuadrados, ¿cuál es la expresión que relaciona x con y?

$y =$ ________

2. En la siguiente figura se muestran las medidas de un rectángulo que se proyectó a una distancia de 1 m. ¿Cuál sería el área de la imagen si se proyectara a una distancia de 4.3 m de la pantalla? ________



14

Posibles dificultades. Es probable que los alumnos encuentren difícil el problema 2. Para resolverlo, lo primero que les tiene que quedar claro es que la relación entre la distancia del proyector y el tamaño de los lados de la imagen, es de proporcionalidad directa. Si lo considera necesario, plantee algunas preguntas como: cuando el proyector está a 2 m ¿de qué tamaño son los lados del rectángulo?, ¿y si está a 2.5 m? También pueden llenar una tabla similar a la que hicieron en el apartado *Manos a la obra*:

Distancia del proyector a la pantalla (m)	Longitud del lado menor del rectángulo proyectado (m)	Longitud del lado mayor del rectángulo proyectado (m)	Área del cuadrado proyectado (m^2)
0.5			
1.0	0.4	0.6	0.24
1.5			
2.0			
2.5			
3.0			

Cuando terminen de llenar la tabla, escriba en el pizarrón lo siguiente: cuando $x = 1$, el lado menor del rectángulo mide $0.4x$ y el lado mayor $0.6x$. Pregúnteles si ocurrirá lo mismo cuando x tiene otros valores, ¿es cierto que si $x = 3$ los lados del rectángulo miden $0.4x$ y $0.6x$? Cuando estén seguros de que lo anterior es cierto, explíqueles que para obtener el área del rectángulo, hay que multiplicar las dos expresiones que ya obtuvieron: $(0.6x)\ (0.4x) = 0.24x^2$. Verifiquen la expresión dando distintos valores a x.

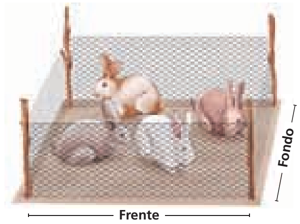
EL CORRAL DE LOS CONEJOS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Don Chon tiene una malla de 100 m de longitud para hacer un cerco. Ha decido usar el material para hacerle un corral rectangular a sus conejos. No sabe todavía de qué dimensiones hacerlo, pues quiere que sus conejos tengan el mayor terreno posible.

a) ¿De qué medidas se puede construir el corral rectangular usando los 100 m de malla? Encuentren cuatro posibilidades para el frente y cuatro para el fondo y anótenlas en las columnas **A**, **B**, **C** y **D**.



Rectángulo	A	B	C	D
Frente (m)				
Fondo (m)				

b) Calculen el área de cada uno de los corrales que propusieron.

Área de **A** = ____________ m². Área de **B** = ____________ m².

Área de **C** = ____________ m². Área de **D** = ____________ m².

c) ¿Cuál de los cuatro rectángulos que propusieron tiene mayor área? ____________

Comparen las medidas de los corrales que propusieron y elijan de entre todos ellos cuál es el que tiene mayor área.

>>> Consideremos lo siguiente

Para encontrar las medidas del corral que encierra la mayor área posible, conviene tener una expresión para el área.

Denoten con x la longitud del frente del corral. Recuerden que el corral debe usar los 100 m de malla.

a) ¿Cuál deberá ser la medida del fondo? **Fondo** = ____________

b) Representen con la letra y el área del corral que mide x metros de frente y escriban una expresión que relacione x con y. y = ____________

Verifiquen que las expresiones que escribieron sirven para calcular el área de los corrales **A**, **B**, **C** y **D** a partir de las medidas de sus frentes.

15

Propósito de la sesión. Utilizar una relación cuadrática para encontrar el área máxima de un corral rectangular con perímetro fijo.

Posibles respuestas. Los alumnos deben dar las medidas de cuatro rectángulos con perímetro 100 m, buscando que las áreas a las que den lugar dichos rectángulos, sean las mayores posibles. Es buena idea que los alumnos hagan en su cuaderno una tabla con las medidas de cada rectángulo que se les vaya ocurriendo.

Como la actividad es en parejas, pueden incluir en la tabla del libro dos posibilidades de un compañero, y dos del otro.

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos comparen las medidas que surjan en el salón. Aunque desde la escuela primaria aprendieron que dos figuras con igual perímetro no necesariamente tienen igual área, lo que hay que resaltar en este momento es cuáles fueron las medidas que dieron lugar a la mayor área.

Propósito de la actividad. Que los alumnos obtengan una expresión cuadrática para obtener el corral con mayor área posible.

Posibles respuestas.

a) Los alumnos pueden expresar la medida del fondo del corral de distintas maneras:

$50 - x$

$\frac{(100 - 2x)}{2}$

b) Los alumnos ya saben que el frente del corral mide x y en el inciso a) obtuvieron la medida del fondo. El área será el resultado de multiplicar ambas medidas, y pueden expresarla de distintas maneras, como:

- $y = x\,(50 - x)$, y al efectuar las multiplicaciones quedaría $y = 50x - x^2$.
- $y = \frac{x\,(100 - 2x)}{2}$ y al efectuar las multiplicaciones quedaría $y = \frac{100x - 2x^2}{2}$

Sugerencia didáctica. Pida a cada pareja de alumnos que use los datos de la tabla llenada en el apartado *Para empezar* para ver si la expresión a la que llegaron es correcta. Recuerden que x es igual a la medida del "Frente" del corral (entonces, en la tabla tienen 4 valores distintos para x). Utilizando la expresión a la que llegaron, deben obtener el área de ese rectángulo. En el caso que no concuerde algún valor, podrá comentarse con todo el grupo. La dificultad podría estar en:

- Una ecuación mal escrita.
- Que el rectángulo no tenga perímetro 100 m.
- Un cálculo erróneo.

Respuesta. La opción a).

Posibles dificultades. Para decidir cuál es la expresión correcta, los alumnos podrían comparar las 4 opciones con la que obtuvieron en la actividad anterior. Sin embargo, esto podría requerir de una buena habilidad algebraica si la expresión no les quedó idéntica a la correcta. Para evitar esta dificultad, sugiera a los alumnos que evalúen las cuatro opciones con las medidas de los terrenos A, B, C y D de la tabla del apartado *Para empezar*.

Sugerencia didáctica. Este momento puede aprovecharse para explicar algebraicamente por qué las diferentes expresiones presentadas como posibles respuestas a la pregunta b) del apartado *Consideremos lo siguiente*, son equivalentes a la expresión $y = 50x - x^2$.

1) $x(50 - x) = 50x - x^2$ (efectuando la multiplicación).

2) $\frac{x(100 - 2x)}{2} = \frac{100x - 2x^2}{2}$ (efectuando la multiplicación).

3) $\frac{x(100 - 2x)}{2} = \frac{100x}{2} - \frac{2x^2}{2}$ (efectuando la multiplicación y dejando señalada la división de cada término entre 2).

4) $\frac{x(100 - 2x)}{2} = 50x - x^2$ (efectuando la multiplicación y la división de cada término entre 2).

Propósito de la actividad. La tabla y las siguientes preguntas pretenden apoyar el análisis del comportamiento de la expresión obtenida: para cierto valor de x se obtiene un área máxima, pero si se sigue aumentando x el área disminuye.
Es importante que no adelante a los alumnos esta información, permita que lo verifiquen por sí mismos.

Respuestas.
a) 25

b) Sí es posible. Las explicaciones que den los alumnos pueden ser muy variadas, pero se espera que giren en torno a lo siguiente: en la tabla es posible ver que cuando x vale 20, $y = 600$.

c) No es posible, sin embargo, para los alumnos puede ser difícil explicar por qué. Lo importante es que observen que al mover el valor de x desde casi 0 hasta 25, el valor de y va creciendo y luego se reduce. También puede afirmarse que la ecuación $50x - x^2 = 650$ no tiene solución, aunque las herramientas matemáticas necesarias para justificarlo no están al alcance de los alumnos.
Lo que aprendan en la siguiente secuencia les servirá para argumentar mejor esta cuestión.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos por otros valores de y que no aparecen en la tabla. Por ejemplo: ¿es posible que $y = 609$?, ¿cuánto vale x es ese caso?

SECUENCIA 14

>>> Manos a la obra

I. De las siguientes expresiones, ¿cuál es la que permite calcular el área y a partir de la medida del frente x? Subráyenla.

a) $y = 50x - x^2$

b) $y = 50x + x^2$

c) $y = x^2 - 50x$

d) $y = 50x^2 - x$

Recuerden que:

Se dice que dos expresiones son equivalentes si dan el mismo resultado al evaluarlas para todo valor.

Por ejemplo, al evaluar la expresión $2x + 2$ *en* $x = 5$ *da como resultado* **12**. *Ese mismo resultado se obtiene al evaluar la expresión* $2(x + 1)$ *en* $x = 5$. *Y al evaluar esas dos expresiones en cualquier otro valor de* x, *darán el mismo resultado. Por esa razón, las expresiones* $2x + 2$ *y* $2(x + 1)$ *son equivalentes.*

Comparen sus respuestas, comenten cómo hicieron para elegirla y decidan si esa expresión es equivalente a la que habían contestado en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

II. Escriban la expresión que eligieron en la actividad I en la casilla correspondiente a continuación, y después completen la tabla usando esa expresión.

x	5	10	15	20	25	30	35	40
$y =$ $50x - x^2$	225	400	525	600	625	600	525	400

a) Si y vale 625, ¿cuál debe ser el valor de x? ______________

b) ¿Puede ser y igual a 600? ________ . ¿Por qué? ______________

c) ¿Puede ser y igual a 650? ________ . ¿Por qué? ______________

Comparen sus respuestas y comenten si el valor de y puede ser mayor que 625.

>>> A lo que llegamos

Las relaciones de la forma $y = ax^2 + bx$ y, en particular, $y = ax^2$, son llamadas relaciones cuadráticas. Como se puede observar, la expresión para y contiene x^2, equis cuadrada.

Por ejemplo, las siguientes expresiones corresponden a relaciones cuadráticas:

- $y = 50x - x^2$
- $y = 50x + x^2$
- $y = x^2 - 50x$
- $y = 50x^2 - x$

16

Para saber más. Aunque con esta actividad lo que se pretende es que los alumnos observen qué ocurre con los valores que toma y cuando la x crece o decrece, es posible explicar por qué la expresión $50x - x^2$ no puede ser mayor a 625. Si usted lo considera conveniente, compártala con sus alumnos, pero no es obligatorio que la aprendan.

$y = 50x - x^2$

Sumando y restando 625 se obtiene:

$y = 625 - 625 + 50x - x^2$

Factorizando el signo menos se obtiene la expresión equivalente:

$y = 625 - (625 - 50x + x^2)$

La parte entre paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto por lo que la expresión puede cambiarse a:

$y = 625 - (x - 25)^2$

En esta última expresión puede verse que a 625 se le está restando "algo", y ese "algo" es un número mayor o igual a cero (no puede ser negativo porque está elevado al cuadrado). Esa es la razón por la que el valor de y no puede ser mayor que 625: para cualquier valor de x es cierto que $(x - 25)^2 \geqslant 0$.

Notemos lo importante de señalar que "algo" es mayor o igual a cero, pues de ser negativo incrementaría el valor de y por encima de 625. En una expresión como $y = 10 - x$ no se puede afirmar que y es menor que 10, ya que x podría ser igual –1 y en tal caso y sería 11.

La factorización del trinomio cuadrado perfecto fue parte clave de este razonamiento, pues gracias a ésta se pudo expresar y como la resta de 625 menos "algo" que ciertamente es mayor o igual a cero.

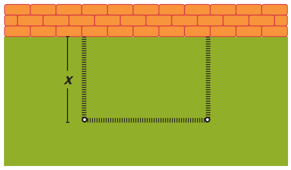
Para conocer más de las relaciones cuadráticas, pueden ver el programa *El área máxima*.

III. A don Chon le pareció que 625 m² era demasiada superficie y prefiere que el corral se reduzca a 400 m². De qué medidas puede hacerse el corral, haciendo uso de los 100 m de malla (sin que sobre malla) y cubriendo los 400 m² que quiere don Chon.

Frente = ______________ **Fondo** = ______________

>>> Lo que aprendimos

Se quiere cercar una región pegada a la paed de un jardín para sembrar chayotes, como se muestra en la figura. Pero sólo se cuenta con 50 m de malla para cercar y se quiere usar toda la malla. Escriban una expresión para calcular el área de la región de siembra a partir de la longitud x que se marca en la figura.



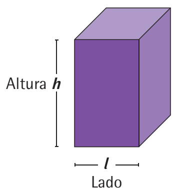
y = ____________________

EL MEDIO LITRO DE LECHE

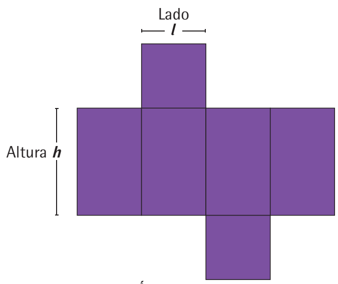
SESIÓN 3

>>> Para empezar

Una empresa empacadora de leche quiere hacer un recipiente de 500 ml. La forma del recipiente deberá ser un prisma rectangular con base cuadrada, como se muestra en la figura. El deseo de los fabricantes es hacer el empaque con la menor cantidad de material posible.



Volumen



Área

Propósito del programa 25. Modelar situaciones que tienen asociada una expresión cuadrática.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la actividad. Esta actividad permite que el alumno plantee una ecuación cuadrática y que la resuelva con sus propios métodos.

Sugerencia didáctica. La solución no es exacta, por lo que es conveniente que los alumnos busquen sólo una aproximación. Pueden emplear métodos personales y otros aprendidos en las sesiones 7 y 8 (como el tanteo, las operaciones inversas y la factorización).

Respuesta. La ecuación es $50x - x^2 = 400$. El corral tendría aproximadamente 10 m de frente y 40 m de fondo; o al revés, 40 m de frente y 10 m de fondo.

Integrar al portafolios. Guarde una copia de la respuesta de los alumnos a esta actividad.

Respuesta. Como el total de malla es 50 m y 2 de los lados medirán x, entonces el otro pedazo de malla mide $50 - 2x$. Por otro lado, como la región es rectangular, el área sería $x(50 - 2x)$.

Propósito de la sesión. Conocer otras expresiones algebraicas que modelan distintos fenómenos.

Sugerencia didáctica. Al observar el desarrollo plano, los alumnos podrían notar la falta de pestañas. Aclároles que en general, se da por hecho que las pestañas deben ponerse para construir el prisma, pero que es tan poco el material que se emplea en ellas, que no se toma en cuenta a la hora de calcular el área.

Propósito de la actividad. Que los alumnos escriban la expresión que describe la relación entre la longitud del lado de la base y el área del desarrollo plano para la caja de leche.

Posibles dificultades. Para encontrar al menos dos prismas que cumplan con la condición de tener un volumen de 500 cm³, los alumnos deberán percatarse de que hay una dependencia entre la medida del lado l y la de la altura h. Si lo considera necesario, indíqueles que primero den un valor a una de las medidas: si l midiera 10 cm, h tendría que medir 5 cm.

También les puede ser de ayuda leer la información del *Recuerden que*.

Respuesta. Partiendo de la fórmula $l^2h = 500$, los alumnos deberán despejar h para obtener

$$h = \frac{500}{l^2}$$

Posibles dificultades. Hacer un despeje en una fórmula puede ser difícil para los alumnos. Es importante que ellos comprendan la mecánica del despeje, no basta con que se aprendan una serie de pasos.

Para ello, puede ser útil que les plantee el problema con números en vez de con literales, por ejemplo, en lugar de $V = l^2h$ anote en el pizarrón 6 = 3 × 2, que es una expresión "similar". Debajo, escriba 6 = 3 × $\square$ y pregunte ¿cómo encontrarían el número que falta? Hay que despejar la expresión, para que quede $\square$ = 6 ÷ 3.

Para la fórmula $V = l^2h$ hay que hacer un tratamiento similar con lo que se obtiene $h = \frac{V}{l^2}$. Como ya se sabe que $V = 500$, quedaría $h = \frac{500}{l^2}$

SECUENCIA 14

Para empezar a trabajar este problema, tenemos que recordar algunas cosas. Primero, el volumen de un prisma de base cuadrada se puede calcular multiplicando la medida de la altura por el cuadrado del lado de la base. Segundo, el material necesario para hacer la caja de leche se puede calcular usando el desarrollo plano del prisma (ver figura anterior). Por último, 500 ml equivalen a 500 cm³.

En resumen, los productores de leche están buscando un prisma rectangular de base cuadrada con volumen de 500 cm³ y cuyo desarrollo plano tenga la menor área posible.

>>> Consideremos lo siguiente

Diseñen un empaque de leche con la menor cantidad de material posible.

a) Busquen varias posibilidades y escriban en la siguiente tabla dos de sus mejores propuestas para obtener los empaques **A** y **B**.

Empaque	Lado (cm)	Altura (cm)	Volumen (cm³)	Área del desarrollo plano (cm²)
A			500	
B			500	

Recuerden que:

El volumen de un prisma de base cuadrada se puede calcular usando la siguiente fórmula:

$V = l^2h$

Representen con la letra l el lado de la base y con la letra h la altura del empaque de 500 cm³.

b) Escriban una expresión que permita calcular h a partir de l.

h = ____________________

c) Escriban una expresión que permita calcular el área **A** del desarrollo plano únicamente a partir de l (la medida del lado de la base).

A = ____________________

Recuerden que:

Para calcular el área del desarrollo plano de un prisma rectangular se usa la siguiente fórmula:

$A = 4lh + 2l^2$

Comparen las medidas de sus diseños propuestos y decidan cuál de ellos requiere menor cantidad de material. Por último, verifiquen si la expresión que encontraron en el inciso c) sirve para calcular el área del desarrollo plano a partir del lado l en cada uno de los empaques **A** y **B**.

18

Posibles dificultades. En este inciso es importante explicar el significado de la palabra "únicamente". Se pretende que los alumnos escriban una expresión para calcular el área A sin que en ella utilicen el valor de h. Para hacerlo, deben utilizar la expresión para calcular h que obtuvieron en el inciso anterior.

La fórmula $A = 4lh + 2l^2$ quedaría así:

$$A = 4l\left(\frac{500}{l^2}\right) + 2l^2$$

Si los alumnos no logran obtenerla, dígales que sigan resolviendo la sesión, más adelante encontrarán ayuda para hacerlo.

Respuesta. Al escribir una expresión algebraica siempre es posible escribir otras que sean equivalentes, pero en este caso al sustituir h se obtiene la expresión:

$$A = 4l\left(\frac{500}{l^2}\right) + 2l^2$$

Esta expresión puede ser reducida en el primer término, cancelando l con uno de los factores de l^2 y multiplicando 4 por 500:

$$A = \frac{2000}{l} + 2l^2$$

>>> Manos a la obra

I. Para encontrar la expresión que permita calcular h a partir de l, contesten las siguientes preguntas.

a) Si el lado de la base es de 4 cm, ¿cuánto debe medir la altura? ______

b) Si el lado de la base es de 5 cm, ¿cuánto debe medir la altura? ______

c) Si lado de la base es muy grande, ¿qué ocurre con la altura? ______

d) Si el lado de la base es muy pequeño, ¿qué ocurre con la altura? ______

e) ¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular h a partir de l? Subráyenla.

- $h = 500 + l^2$
- $h = \frac{500}{l^2}$
- $h = 500\, l^2$
- $h = \frac{500}{l}$

Comparen sus respuestas. Verifiquen que la expresión que escogieron sí sirve para algunos valores de l.

II. La fórmula $A = 4l\,h + 2l^2$ permite calcular el área A del desarrollo plano de un prisma rectangular de base cuadrada, donde l es el lado de la base y h es la altura del prisma. Esta fórmula no es la que sirve para calcular A únicamente a partir de l, pues se necesita además el valor de h.

En esta fórmula, sustituyan la expresión que encontraron para calcular h a partir de l. Completen:

$$A = 4l\left(\frac{500}{l^2}\right) + 2l^2$$

La expresión ahora obtenida sí sirve para calcular A únicamente a partir de l.

Usando la expresión que encontraron, contesten las siguientes preguntas:

a) Si el lado de la base es de 4 cm, ¿cuál deberá ser el área del desarrollo plano?

______

b) ¿Y si el lado de la base es de 5 cm? ______

c) Usando la expresión que encontraron, llenen la siguiente tabla:

l	2	4	6	8	10	12	14
$A = 4l\left(\frac{500}{l^2}\right) + 2l^2$	1008.0	532.0	405.3	378.0	400.0	454.6	534.8

Comparen sus respuestas. Comenten:

¿Siempre es posible calcular el área sabiendo cuánto mide el lado?, ¿qué ocurre con el área cuando el valor de l es muy pequeño?, ¿qué pasa con el área cuando el valor de l es muy grande?

19

Propósito de las preguntas. A través de estas preguntas se pretende hacer notar la relación que existe entre el lado de la base y la altura: cuando una varía la otra también debe variar.

Respuestas.

a) 31.25 cm. El prisma debe tener un volumen de 500 cm³, si el lado del cuadrado de la base mide 4 cm, el área de la base es 16 cm², entonces la altura se encuentra al dividir 500 entre 16.

b) 20 cm, hay que dividir 500 entre 25.

c) La altura será muy pequeña.

d) La altura será muy grande.

Sugerencia didáctica. Aproveche este momento para que los alumnos revisen la expresión que escribieron en el inciso b) del apartado *Consideremos lo siguiente* y hagan correcciones si fuera necesario.

Respuestas.

a) 532 cm²

b) 450 cm²

Sugerencia didáctica. Dedique un tiempo suficiente para que comenten las respuestas a estas preguntas, serán de gran ayuda para continuar analizando la situación de la construcción del envase de leche.

Respuestas.

Primera pregunta. Sí es posible, sin embargo, si el lado del cuadrado fuera mayor o igual que $\sqrt{500}$, el prisma ya no podría tener 500 cm³. Puede ser interesante que los alumnos intenten obtener la altura del prisma si la base del cuadrado mide 25 cm, se darán cuenta de que no es posible construirlo.

Segunda pregunta. Se hace muy grande el área, pues aunque $2l^2$ se hace cada vez más pequeño (casi cero), el valor de $4l\left(\frac{500}{l^2}\right) = \frac{2000}{l^2}$ se hace cada vez más grande.

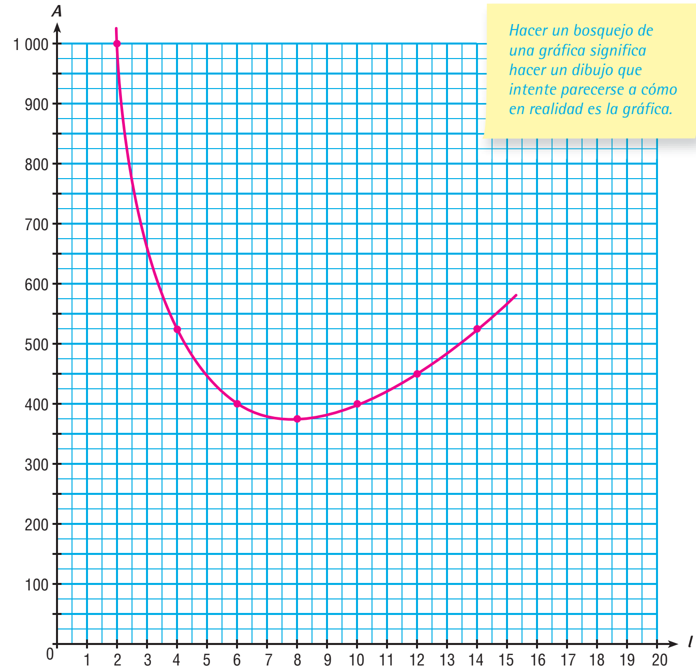
Tercera pregunta. También se hace grande el área. Es un fenómeno muy parecido al anterior, pero en este caso es $2l^2$ quien se hace muy grande.

Propósito de la actividad. Que los alumnos observen el comportamiento de la relación a través de un bosquejo de la gráfica, y que se apoyen en éste para dar una solución aproximada al problema planteado.

Respuesta. Se espera que los alumnos tracen una curva que pase por los puntos pintados de rojo en la figura de la izquierda. Es posible que algunos alumnos tracen sólo segmentos de recta, lo que no sería correcto, pues eso significaría que la relación es lineal por pedazos (como ocurre en el caso de el llenado de cisternas que se estudió en la secuencia 20 de Matemáticas II), incluso desde la expresión es posible adelantar que el fenómeno no es lineal.

Respuesta. La respuesta que den los alumnos dependerá qué tan precisa sea su gráfica, pero el valor que encuentren debe coincidir con lo que en el bosquejo sea el punto más bajo de la gráfica. La respuesta es exactamente la raíz cúbica de 500, que es aproximadamente 7.93, por lo que es natural aproximar con $l = 8$.

III. Con los datos en la tabla hagan la gráfica de la relación.



Hacer un bosquejo de una gráfica significa hacer un dibujo que intente parecerse a cómo en realidad es la gráfica.

Observen la gráfica que construyeron y traten de encontrar un valor de l donde el valor de A sea más chico de lo que han encontrado. l = ______________

>>> A lo que llegamos

Algunas relaciones entre cantidades no son lineales ni cuadráticas. Por ejemplo, la relación $y = \frac{2\,000}{x} + 2x^2$ no es lineal, pues su gráfica no es una recta, y tampoco es cuadrática. Las cuadráticas son únicamente aquellas que se pueden expresar en la forma $y = ax^2 + bx + c$ (b y c pueden ser cero) y la expresión $y = \frac{2\,000}{x} + 2x^2$ no cumple esta condición.

2

Para conocer más ejemplos de relaciones no lineales , pueden ver el programa *Usos de las relaciones funcionales*.

>>> Lo que aprendimos

1. Denota con x la medida (en cm) de la arista de un cubo y con la letra y el área de su desarrollo plano (en cm²). Escribe una expresión que relacione x con y.

   $y =$ ________________

   Si el desarrollo plano tiene un área de 600 cm², ¿cuánto debe medir la arista?

   ____

2. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son cuadráticas? Subráyalas.

   a) $y = 2x^2 + 3$

   b) $y = 6x + 2$

   c) $y = x\,(x + 1)$

   d) $y = x\,(x^2 + 1)$

>>> Para saber más

Sobre problemas de máximos y mínimos, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/ac_maximos/index.htm
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes, Ministerio de Educación y Ciencia, España.

Propósito del programa 26. Mostrar ejemplos de relaciones funcionales en distintas disciplinas

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad.

Respuesta.

La expresión sería $y = 6x^2$ y la arista mediría 10 cm.

Respuesta. Las expresiones a) y c) son cuadráticas.

a) Sí es cuadrática pues es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, para $a = 2$, $b = 0$ y $c = 3$.

b) No es cuadrática sino lineal, no tiene ningún término cuadrático.

c) Sí es, pues al desarrollar el producto se obtiene $y = x^2 + x$, que es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, para $a = 1$, $b = 1$ y $c = 0$.

d) No es, pues al desarrollar el producto se obtiene una x^3.

Propósito de la sesión. Usar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

SECUENCIA 15

Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general

En esta secuencia aprenderás a resolver problemas que corresponden a ecuaciones cuadráticas en las que se utiliza la fórmula general para encontrar sus soluciones.

SESIÓN 1

LA FÓRMULA GENERAL

>>> Para empezar

En las secuencias 8 y 9 de **Matemáticas III**, volumen I, resolviste ecuaciones cuadráticas usando tus propios procedimientos, operaciones inversas o la factorización.

Hace varios siglos los matemáticos dedujeron una fórmula para resolver cualquier ecuación cuadrática. Esta fórmula puede ser muy útil para resolver aquellas ecuaciones en las que resulta difícil utilizar alguno de los procedimientos anteriores.

Respuesta. Luz pudo haber pensado el $-\frac{1}{2} = -0.5$, o bien, el $\frac{1}{5} = 0.2$

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos comenten los procedimientos que utilizaron para resolver la ecuación, aunque no lo hayan logrado.

Posibles procedimientos. Quizá algunos se acerquen a la solución usando una tabla como lo hicieron en la secuencia 8. Aunque no hayan solucionado el problema permítales seguir resolviendo la sesión para que paso a paso aprendan a utilizar la fórmula general.

>>> Consideremos lo siguiente

Resuelve el siguiente acertijo:

Luz pensó un número, lo elevó al cuadrado y multiplicó el resultado por 10.

A lo obtenido le sumó tres veces el número que pensó y, al final, para su sorpresa, obtuvo 1.

Se sabe que Luz realizó correctamente todas las operaciones.

Hay dos números que pudo haber pensado Luz: ________ o bien ________

Comparen sus soluciones y comenten:

a) ¿Pudieron encontrar los posibles números que pensó Luz?

b) ¿Qué procedimientos usaron para encontrarlos?

22

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de las literales.
Subtema
Ecuaciones.
Antecedentes
En las secuencias 8 y 9 los alumnos resolvieron ecuaciones de segundo gra-do usando sus propios procedimientos y la factorización. En esta secuencia estudiarán la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante el uso de la fórmula general.

Propósitos de la secuencia
Modelar fenómenos mediante ecuaciones cuadráticas y resolverlas usando la fórmula general.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**La fórmula general** Usar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.	
2	**El beisbolista** Usar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas en las que el valor del discriminante sea un número decimal.	Programa 27 Interactivo
3	**¿Cuántas soluciones tiene una ecuación cuadrática?** Determinar cuántas soluciones tienen una ecuación cuadrática mediante el análisis del discriminante.	
4	**La razón dorada** Usar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas en las que la solución es irracional.	Programa 28

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para tratar de resolver la ecuación $10x^2 + 3x = 1$ y encontrar los posibles números que pensó Luz. En la última columna calculen el valor que obtienen al evaluar la expresión algebraica del lado izquierdo de la ecuación, para cada uno de los valores de x.

Valor de x	x^2	$10x^2$	$3x$	$10x^2 + 3x$
1	$(1)^2 = 1$	10 (1) = 10	3 (1) = 3	13
3	$(3)^2 = 9$	10 (9) = 90	3 (3) = 9	99
2	$(2)^2 = 4$	10 (4) = 40	3 (2) = 6	46
0	$(0)^2 = 0$	10 (0) = 0	3 (0) = 0	0
0.5	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$10\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{10}{4}$	$3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$	$\frac{8}{2} = 4$
–1	$(-1)^2 = 1$	10 (1) = 10	3 (–1) = -3	7

a) ¿Entre qué números enteros creen que se encuentra uno de los números que pensó Luz? _______________. Justifiquen su respuesta.

b) ¿Entre qué números fraccionarios creen que se encuentra uno de los números que pensó Luz? _______________. Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas y comenten las dificultades que tuvieron para encontrar las dos soluciones de la ecuación $10x^2 + 3x = 1$.

II. Para encontrar los dos posibles números que pensó Luz, resuelvan la ecuación $10x^2 + 3x = 1$ primero escribiéndola en su ***forma general*** y luego usando la ***fórmula general***. Esto es:

Dada una ecuación en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones se encuentran con la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En esta fórmula a y b son los coeficientes de los términos de segundo y primer grado respectivamente, mientras que c es el término independiente.

El signo ± que antecede al radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ indica que una vez obtenido el valor numérico de $b^2 - 4ac$, una de las soluciones se obtiene al considerar el signo "+" y la otra el signo "–". Las dos soluciones de la ecuación $10x^2 + 3x = 1$ son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Recuerden que:

Una ecuación cuadrática puede tener hasta dos soluciones.

23

Sugerencia didáctica. Antes de empezar a llenar la tabla, cerciórese de que los estudiantes seleccionaron la ecuación correcta.

Si fuera necesario, repase la información del problema:

- un número elevado al cuadrado (x^2),
- que se multiplica por 10 ($10x^2$),
- al que se le suma tres veces el número que se pensó ($+ 3x$),
- y da como resultado 1 ($10x^2 + 3x = 1$).

Posibles respuestas. Para estas preguntas puede haber distintas respuestas correctas, ya que pueden ubicar a los números que buscan entre distintos rangos. Lo importante es que sepan que los números que buscan están entre –1 y $\frac{1}{2}$.

Sugerencia didáctica. Si hubo alumnos que lograron encontrar las soluciones pídales que expliquen en el pizarrón cómo lo hicieron.

Posiblemente probaron con más números en la tabla. Si ya saben que con $x = \frac{1}{2}$ da 4, entonces pueden probar con un número menor.

Así, podrán llegar a una de las soluciones: $x = \frac{1}{5}$ o 0.2

La otra tiene que estar entre 0 y –1. Si prueban con –0.5 obtendrán 1.

Sugerencia didáctica. A lo largo de la sesión los alumnos emplearán la fórmula general para resolver distintas ecuaciones. En este momento, lo que es importante que comprendan es que:

- Para poder utilizarla deben escribir la ecuación en su forma general, así podrán saber cuál término le corresponde a cada letra (a, b o c).
- Hay que realizar las operaciones señaladas en la fórmula general de acuerdo a lo que aprendieron sobre la jerarquía de operaciones: primero la resta $b^2 - 4ac$, luego se obtiene su raíz cuadrada, éste resultado se le resta y se le suma $a - b$ y finalmente lo obtenido se divide entre $2a$. Anote en el pizarrón la fórmula general y analicen este orden en las operaciones.
- Como ya vieron en las secuencias 8 y 9, las ecuaciones cuadráticas pueden tener dos soluciones diferentes, una solución doble, o ninguna solución. Para obtenerlas, en la fórmula se señala que el término $-b$ debe sumarse y también restarse al resultado de $\sqrt{b^2 - 4ac}$. Es decir, la fórmula podría verse como dos fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

Sugerencia didáctica. Los alumnos ya estudiaron en la secuencia 9 cómo escribir una ecuación en su forma general. Es importante que sepan hacerlo para que puedan utilizar la fórmula general, así que haga un repaso si fuera necesario.

Posibles dificultades. Es muy importante que se detenga en este punto de la sesión para explicar cuál es el término independiente y los coeficientes para que los alumnos los puedan "acomodar" en la fórmula general. También es importante que cuiden los signos.

Respuesta. La ecuación es $10x^2 + 3x - 1 = 0$, entonces:

- El coeficiente del término de segundo grado es 10 (a en la fórmula general).
- El coeficiente del término de primer grado es 3 (b en la fórmula general).
- El término independiente es –1 (c en la fórmula general).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

3

a) Pasen la ecuación $10x^2 + 3x = 1$ a su forma general.

$10x^2 + 3x - 1$ = 0

b) Encuentren los valores del término independiente y de los coeficientes de los términos cuadrático y lineal.

a = 10

b = 3

c = –1

c) En la fórmula general, sustituyan a, b, c por sus respectivos valores y realicen las operaciones hasta obtener las dos soluciones de la ecuación.

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(-1)(10)}}{2(10)} = \frac{-(3) \pm \sqrt{9 + 40}}{2(10)} = \frac{-(3) \pm \sqrt{49}}{20} = \frac{-3 \pm 7}{20}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$x_2 = \frac{-3 - 7}{20} = \frac{-10}{20} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

d) Verifiquen sus soluciones sustituyéndolas en la ecuación $10x^2 + 3x = 1$.

Sustituyan por el valor de x_1:	Sustituyan por el valor de x_2:
$10\,(0.2)^2 + 3(0.2) = 1$	$10\,(-0.5)^2 + 3(-0.5) = 1$
$10\,(0.04) + 0.6 = 1$	$10\,(0.25) - 1.5 = 1$
$0.4 + 0.6 = 1$	$2.5 - 1.5 = 1$
$1 = 1$	$1 = 1$

Comparen sus soluciones y comenten: ¿cuáles son los números que pudo haber pensado Luz?

>>> A lo que llegamos

La **fórmula general** se puede usar para resolver cualquier ecuación de segundo grado. Por ejemplo, para resolver una ecuación como $5x^2 + 6x = -1$, se hace lo siguiente:

1° Se escribe la ecuación en su forma general. $5x^2 + 6x + 1 = 0$

2° Se obtienen los valores de a, b, c. $a = 5, \quad b = 6, \quad c = +1$

3° En la fórmula general, se sustituyen a, b, c por sus respectivos valores.

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4\,(5)\,(1)}}{2\,(+5)}$$

4° Se realizan las operaciones indicadas.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} = \frac{-6 \pm 4}{10}$$

5° Se obtienen las soluciones.

$$x_1 = \frac{-6 + 4}{10} = \frac{-2}{10} = -0.2$$

$$x_2 = \frac{-6 - 4}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

6° Se verifican las soluciones en la ecuación original $5x^2 + 6x = -1$.

Para $x_1 = -0.2$

$$5\,(-0.2)^2 + 6\,(-0.2) = -1$$
$$5\,(+0.04) - 1.2 = -1$$
$$0.2 - 1.2 = -1$$
$$-1 = -1$$

Para $x_2 = -1$

$$5\,(-1)^2 + 6\,(-1) = -1$$
$$5\,(+1) - 6 = -1$$
$$+5 - 6 = -1$$
$$-1 = -1$$

III. ¿Qué procedimiento usarían (factorización, operaciones inversas o la fórmula general), para resolver cada una de las siguientes ecuaciones? Justifiquen su respuesta.

Ecuación	Procedimiento	Justificación
$7x^2 + 4x = 1$	Fórmula general	Es difícil realizar la factorización y el coeficiente de x^2 es diferente de 1.
$2x^2 = 50$	Operaciones inversas	Como $2x^2 = 50$ resulta que $x^2 = 25$, por lo tanto, $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$
$3x^2 + 6x = 0$	Factorización	Es fácil factorizar $3x^2 + 6x = 3x\,(x + 2)$, por lo tanto, $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$

Sugerencia didáctica. Los alumnos pueden tener distintas opiniones, lo importante es que comenten que hay métodos más económicos para resolver algunas ecuaciones (como las operaciones inversas), pero hay casos en los que no es posible utilizarlos y hay que emplear otros. Entonces:

- Si una ecuación puede resolverse fácilmente usando operaciones inversas o procedimientos personales, proceder de esa forma.
- En caso contrario, igualarla a cero y factorizar.
- Si tampoco es fácil factorizar, usar la fórmula general.

Posibles dificultades. Comente con los alumnos la importancia de poner el signo correcto de los coeficientes y el término independiente al utilizar la fórmula general.

En este caso, el término independiente debe tener signo negativo, porque para usar la fórmula la ecuación debe escribirse en su forma general.

Quedaría $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Respuestas.

a) Como $4x^2 + 4x + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto, se puede factorizar así $(2x + 1)^2$.

Si $(2x + 1)^2 = 0$, al sacar la raíz cuadrada se obtiene $2x + 1 = 0$, por lo tanto, $x = -\frac{1}{2}$.

b) Es cero.

Discutan las ventajas y desventajas de los siguientes procedimientos para resolver una ecuación de segundo grado.

- Usando operaciones inversas o procedimientos aritméticos.
- Factorización.
- Fórmula general.

>>> Lo que aprendimos

Resuelve las siguientes ecuaciones usando la fórmula general. Verifica las soluciones en tu cuaderno.

1. $4x^2 + 4x = -1$

$a =$ 4 $b =$ 4 $c =$ 1

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{-4 \pm 0}{8}$$

$$x_1 = \frac{-4+0}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4-0}{8} = -\frac{1}{2}$$

a) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ____________

b) ¿Cuál es el valor de $b^2 - 4ac$? ____________

2. $2x^2 + 8x - 4.5 = 0$

$a =$ 2 $b =$ 8 $c =$ −4.5

$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(2)(-4.5)}}{2(2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{4} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-8 \pm 10}{4}$$

$$x_1 = \frac{-8+10}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$x_2 = \frac{-8-10}{4} = \frac{-18}{4} = -4.5$$

3. $5x^2 - 20 = 0$

$a =$ 5 $b =$ 0 $c =$ −20

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(5)(-20)}}{2(5)} = \frac{0 \pm \sqrt{0+400}}{10} = \frac{0 \pm \sqrt{400}}{10} = \frac{0 \pm 20}{10}$$

$$x_1 = \frac{0+20}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$x_2 = \frac{0-20}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

Sugerencia didáctica. Haga notar a los alumnos que esta ecuación ya está escrita en su forma general, por lo que los signos deben quedar iguales en la fórmula.

Posibles dificultades. Como la ecuación es incompleta los alumnos podrían confundirse y creer que −20 corresponde al parámetro b. Hágales ver que −20 es el término independiente (o sea, c en la fórmula), y que el coeficiente b puede pensarse como $0x$. Es decir, que la ecuación podría escribirse así:

$5x^2 + 0x - 20 = 0$, por lo que $a = 5$, $b = 0$ y $c = -20$.

EL BEISBOLISTA

SESIÓN 2

>>> Consideremos lo siguiente

Un bateador conecta un elevado, y la pelota de beisbol cae al suelo sin que ningún jugador del equipo contrario logre atraparla.

Cuando el bateador golpea la pelota, ésta se encuentra a una altura de 0.605 m.

La trayectoria que sigue la pelota está dada por la ecuación:

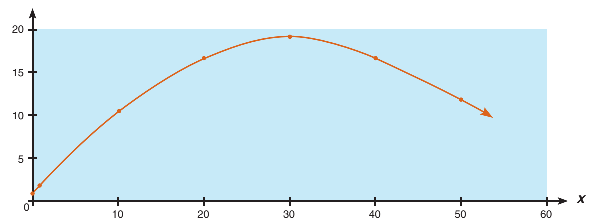
$$y = -0.02x^2 + 1.2x + 0.605$$

x representa la distancia horizontal recorrida por la pelota.

y representa la altura a la que se encuentra la pelota.

En la gráfica 1 se muestra una parte de la trayectoria que siguió la pelota.

Gráfica 1



¿Cuántos metros avanzó horizontalmente la pelota desde que fue golpeada por el bateador hasta que cayó al suelo? __________

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Observen la gráfica 1 y usen la siguiente tabla para tratar de encontrar cuántos metros recorrió horizontalmente la pelota.

a) ¿Por qué la gráfica de la trayectoria no pasa por el origen del plano cartesiano (0,0)? __________

b) ¿Cuál es el valor de y cuando la pelota cae al suelo? __________

c) ¿Entre qué números enteros se encontrará el valor de x para que el valor de y sea 0? __________. Justifiquen su respuesta.

d) Usen la calculadora y prueben con tres valores para tratar de encontrar alguna de las soluciones de la ecuación. Registren sus resultados en la tabla.

x	y
0	0.605
10	10.605
20	16.605
30	18.605
40	16.605
50	10.605
60	0.605
61	−0.615
60.5	0

27

Propósito de la sesión. Usar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas en las que el valor del discriminante sea un número decimal.

Propósito del Interactivo. Guiar al alumno en la resolución de ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general.

Ayudarle a entender por qué a veces hay dos soluciones, a veces ninguna y a veces sólo una.

Sugerencia didáctica. Este problema puede ser difícil para algunos alumnos. Permita que lo resuelvan mediante los procedimientos que prefieran sin sugerirles utilizar la fórmula general para ecuaciones cuadráticas que acaban de aprender. Más adelante podrán ver que utilizar la fórmula es una manera económica para resolver este problema, pero no la única.

Respuesta. Avanzó entre 60 y 61.

Respuestas.

a) Porque cuando $x = 0$, $y = 0.605$, o sea, cuando el bateador le pega a la pelota, ésta se encuentra a 0.605 m del suelo.

b) Analizando la gráfica se puede anticipar que caerá cuando y tenga aproximadamente un valor de 60.

c) Cayó después de recorrer 60 m, a esa distancia aún se encontraba a una altura de 0.605 m.

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos den un valor aproximado para responder la pregunta b).

Para el inciso c) sugiérales observar cuidadosamente la tabla:

- Después de $x = 30$ la ordenada empieza a disminuir.
- Las ordenadas para $x = 40$ y $x = 20$ son iguales.
- Las ordenadas para $x = 50$ y $x = 10$ son iguales.
- La ordenada para $x = 60$ debe ser igual a la de $x = 0$ que es 0.605, es decir, la pelota todavía no cae al suelo.

En uno de los renglones vacíos de la tabla, sugiera evaluar $x = 60$ para que se den cuenta de lo anterior. Si prueban con valores mayores que 60.5 para x obtendrán resultados negativos, lo que en la situación de la pelota significaría que ésta se encuentra por debajo del nivel del suelo. Recuérdeles que deben hallar a qué distancia horizontal (x) la pelota está cayó al suelo ($y = 0$).

Sugerencia didáctica. Comenten por qué es cierto que la ecuación que tienen que resolver es $0.02x^2 + 1.2x + 0.605 = 0$.

También puede preguntar a los alumnos ¿Qué pasó con la y que apareció al principio de la sesión en esa misma ecuación, porqué se "convirtió" en un cero?, cuando apareció con la y ¿estaba escrita en la forma general?

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos expresen sus puntos de vista, también puede ser de ayuda dibujar la trayectoria de la pelota en el pizarrón e invitarlos a imaginar qué pasaría si la pelota fuera "de reversa". De esta manera podrán comprender que la solución negativa significa que si la pelota fuera en reversa estaría en el suelo medio metro horizontalmente antes de ser golpeada.

Propósito del programa 27. Resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

SECUENCIA 15

Comparen sus respuestas y comenten cómo encontraron el valor de x cuando la pelota toca el suelo.

II. De lo anterior se desprende que la ecuación que tienen que resolver para encontrar la distancia horizontal recorrida por la pelota desde que fue golpeada hasta que cayó al suelo es: $-0.02x^2 + 1.2x + 0.605 = 0$.

Resuelvan la ecuación usando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pueden realizar las operaciones con una calculadora.

$$x = \frac{-(1.2) \pm \sqrt{(1.2)^2 - 4(-0.02)(0.605)}}{2(-0.02)} = \frac{-1.2 \pm \sqrt{(1.44) + 0.0484}}{-0.04} = \frac{-1.2 \pm \sqrt{1.4884}}{-0.04} = \frac{-1.2 \pm 1.22}{-0.04}$$

$$x_1 = \frac{-1.2 + 1.22}{-0.04} = \frac{0.02}{-0.04} = -0.5$$

$$x_2 = \frac{-1.2 - 1.22}{-0.04} = \frac{-2.42}{-0.04} = 60.5$$

Comparen sus respuestas y comenten cómo interpretan la solución negativa de la ecuación.

>>> Lo que aprendimos

Para conocer más ejemplos del uso de la formula general pueden ver el programa *Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general.*

1. La trayectoria que sigue la pelota al ser bateada por otro jugador está dada por la ecuación: $y = -0.02x^2 + 1.2x + 0.605$, donde x representa la distancia horizontal recorrida por la pelota y donde y representa la altura a la que se encuentra la pelota.

¿A qué distancia horizontal del bateador se encuentra la pelota cuando está a 5.085 m de altura? ______________

2. Resuelve las ecuaciones siguientes usando la fórmula general. Verifica las soluciones en tu cuaderno.

a) $x^2 + 12x = -9$

$$x = \frac{-(12) \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 36}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{108}}{2} \cong \frac{-12 \pm 10.39}{2}$$

$$x_1 \cong \frac{-12 + 10.39}{2} \cong \frac{-1.61}{2} \cong -0.805$$

$$x_2 \cong \frac{-12 + 10.39}{2} \cong \frac{-22.61}{2} \cong -11.195$$

28

Respuesta. A 4 y a 56 m.

Para contestar esta pregunta es necesario que los alumnos planteen la siguiente ecuación:

$-0.02x^2 + 1.2x + 0.605 = 5.085$

Que al ser escrita en su forma general resulta:

$-0.02x^2 + 1.2x - 4.48 = 0$

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos qué significa que haya dos soluciones en este problema, o sea, por qué se obtiene como respuesta que cuando la pelota está a 5.085 m de altura se encuentra a 4 m del bateador y también a 56 m del mismo. Si lo considera útil, dibuje la trayectoria en el pizarrón para explicarlo.

Sugerencia didáctica. Explique a los alumnos que al redondear la raíz cuadrada de 108 se usa el signo ≅ para indicar que se trata de una aproximación al número exacto. Por ello, al verificar las soluciones el lado izquierdo de la igualdad no será 9 sino una aproximación a este número. Esta situación se verá con mayor profundidad en la sesión 4.

Integrar al portafolios. Pida a los estudiantes una copia de sus respuestas y procedimientos a estas tres ecuaciones.

b) $2x^2 + 8x - 4.5 = 0$

$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(2)(-4.5)}}{2(2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{4} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-8 \pm 10}{4}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 10}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$x_2 = \frac{-8 - 10}{4} = \frac{-18}{4} = -4.5$$

c) $x^2 - 3x + 0.6875 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(0.6875)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 2.75}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{6.25}}{2} = \frac{3 \pm 2.5}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 2.5}{2} = \frac{5.5}{2} = 2.75$$

$$x_2 = \frac{3 - 2.5}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

SESIÓN 3

¿CUÁNTAS SOLUCIONES TIENE UNA ECUACIÓN?

>>> Para empezar

Mientras que las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen a lo más una solución, las ecuaciones de segundo grado con una incógnita pueden tener dos, una o ninguna solución.

En las sesiones anteriores trabajaste con ecuaciones donde casi todas tenían dos soluciones, ahora trabajarás con ecuaciones que tienen dos, una o ninguna solución. Cuando se usa la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática, se puede saber fácilmente cuántas soluciones tiene. ¡Sólo hay que analizar el valor del ***discriminante***: $b^2 - 4ac$!

>>> Consideremos lo siguiente

Escribe un término independiente de modo que la ecuación tenga tantas soluciones como se indica en el paréntesis de la derecha. Escribe en cada caso las soluciones.

a) $3x^2 + 4x$ ________ = 0. (dos soluciones). Las soluciones son: ______ y ______

b) $3x^2 + 4x$ ________ = 0. (una solución). La solución es: ______

c) $3x^2 + 4x$ ________ = 0. (ninguna solución). No tiene solución porque ________

____

Comparen sus soluciones y compartan los procedimientos que siguieron para obtenerlas.

29

Propósito de la sesión. Determinar cuántas soluciones tienen una ecuación cuadrática mediante el análisis del discriminante.

Sugerencia didáctica. Explique a los alumnos que en la fórmula general se le llama "discriminante" a lo que se encuentra dentro de la raíz cuadrada. Tiene ese nombre justamente porque permite discriminar (entendido como diferenciar) entre aquellas ecuaciones que tienen una, dos o ninguna solución.

Propósito de la actividad. Mediante la exploración de distintos valores del discriminante, se pretende que los estudiantes analicen en qué casos las ecuaciones de segundo grado tienen una, dos o ninguna solución.

Sin embargo, puede ser difícil para los alumnos encontrar dichos valores para el discriminante. Quizá empiecen probando números al azar. Permítales utilizar cualquier método que elijan aunque no logren hallar valores que cumplan la condición. Más adelante aprenderán lo necesario para lograrlo.

Respuestas.

a) Menor que $\frac{4}{3}$

b) Igual a $\frac{4}{3}$

c) Mayor que $\frac{4}{3}$

En los incisos a) y c) puede haber muchas soluciones correctas. Permita que los alumnos escriban las que encuentren para ver si pueden llegar a una generalización sobre el valor del discriminante.

Las soluciones de las ecuaciones dependen del valor que le asigne al término independiente, sólo en el inciso b) la solución es $x = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

Sugerencia didáctica. Dé tiempo suficiente para que los alumnos comenten al grupo sus soluciones. Será especialmente útil cuando existan dos o más soluciones correctas para los incisos a) y c).

>>> Manos a la obra

I. Usen la fórmula general para resolver la ecuación $2x^2 + 3x + 1 = 0$.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

a) ¿Qué valor tiene el discriminante? $b^2 - 4ac =$ ________

b) ¿Cuántas soluciones diferentes tiene la ecuación? ________

Respuestas.

a) 1

b) Dos soluciones.

II. Resuelvan la ecuación $5x^2 + 2x + 0.2 = 0$

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(5)(0.2)}}{2(5)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{10} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{10} = \frac{-2 \pm 0}{10}$$

$$x_1 = \frac{-2+0}{10} = \frac{-2}{10} = -0.2$$

$$x_2 = \frac{-2-0}{10} = \frac{-2}{10} = -0.2$$

a) ¿Qué valor obtuvieron para el discriminante? $b^2 - 4ac =$ ________

b) ¿Son iguales o diferentes las soluciones? ________

c) De acuerdo con lo anterior, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación? ________

Respuestas.

a) Cero.

b) Iguales.

c) Tuvo una solución doble, aunque los alumnos también podrían expresarlo como dos soluciones iguales.

III. Ahora resuelvan la ecuación $5x^2 + 2x + 3 = 0$.

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(5)(3)}}{2(5)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-60}}{10} = \frac{-2 \pm \sqrt{-56}}{10}$$

$x_1 =$

$x_2 =$

a) ¿Qué valor tiene el discriminante? $b^2 - 4ac =$ ________

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ________

30

Respuestas.

a) –56

b) Ninguna porque no existe un número real que elevado al cuadrado sea igual a –56.

Posibles dificultades. Es posible que al calcular la raíz de –56, los alumnos no consideren el signo. Si teclean en la calculadora [56] [√] obtendrán 7.48, redondeando. A este número podrían decidir ponerle el signo menos, pero sería erróneo porque cualquier número negativo elevado al cuadrado da como resultado un número positivo.

Si sus alumnos creen que la raíz cuadrada de –56 es –7.48, invítelos a comprobar el resultado con la calculadora tecleando: [+/–] [7.48] [x^2]. Se darán cuenta de que el resultado es positivo.

Otra manera de darse cuenta que –56 no tiene raíz cuadrada real, es oprimir [56] [+/–] [√], la calculadora marcará ERROR.

Para saber más. El conjunto de los números reales comprende a los naturales, enteros, racionales e irracionales. Los números reales están contenidos en un conjunto mayor, que es el de los números complejos.

Comparen sus soluciones y comenten:

a) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene el número 1? ________ . ¿Cuáles son? __________

b) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene 0? ________ . ¿Cuáles son? __________

c) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene el número negativo –56? ________ ¿Cuáles son las raíces cuadradas de –56? ____

IV. Contesten lo que se les pide a continuación.

a) Para la ecuación $3x^2 + 4x + c = 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al discriminante? Tomen en cuenta que los valores de a y de b están dados en la ecuación.

- 42 – 4(3)(0)
- $3 - 4c$
- $16 - 12c$

b) ¿Cuánto tiene que valer c para que el discriminante de la ecuación $3x^2 + 4x + c = 0$ sea igual a cero? c = ______________

c) Sustituyan el valor que obtuvieron para c y solucionen la ecuación correspondiente.

$$3x^2 + 4x + \left(\frac{4}{3}\right) = 0$$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)\left(\frac{4}{3}\right)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{6} = \frac{-4 \pm 0}{6}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 0}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{-4 - 0}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

d) Encuentren un valor de c para que el discriminante de la ecuación $3x^2 + 4x + c = 0$ sea positivo. c = __________

e) Sustituyan el valor que obtuvieron para c y resuelvan la ecuación correspondiente.

$$3x^2 + 4x + \left(\frac{15}{12}\right) = 0$$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)\left(\frac{15}{12}\right)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 15}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{-4 \pm 1}{6}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 1}{6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} = -0.5 \qquad x_2 = \frac{-4 - 1}{6} = -\frac{5}{6}$$

f) Encuentren un valor de c para que el discriminante de la ecuación $3x^2 + 4x + c = 0$ sea negativo. c = __________

31

Respuestas.

a) Tiene dos, el 1 y el –1.

b) Una, el 0.

c) Ninguna.

Respuestas.

b) Se busca que $16 - 12c$ sea igual a cero. A 16 hay que restarle algo que sea igual a 16 para que dé como resultado 0, así que $12c$ debe ser igual a 16. El número que multiplicado por 12 es igual a 16, es $\frac{4}{3}$. Quedaría

$$16 - 12\left(\frac{4}{3}\right)$$

d) Cualquier valor menor que $\frac{4}{3}$ hace que el discriminante sea positivo.

e) Para resolver la ecuación se tomó $c = \frac{15}{12}$ pero los alumnos podrían utilizar cualquier otro valor menor que $\frac{4}{3}$.

f) Cualquier valor mayor que $\frac{4}{3}$ hace que es discriminante sea negativo.

Respuesta.

g) Se tomó $c = 2$, pero sirve cualquier otro valor mayor que $\frac{4}{3}$.

5

Sugerencia didáctica. Algunos alumnos pueden elegir un procedimiento para resolver una ecuación y otros pueden optar por uno distinto, lo importante es que logren solucionarlas mediante el método que les parezca más económico y con el que se sientan más seguros.

Es posible que haya estudiantes que con ver la ecuación ya sepan cuál método conviene e incluso anticipen las soluciones, pero para otros será necesario probar para elegir un procedimiento y hacer los cálculos necesarios para obtener las soluciones. Deles tiempo suficiente para hacerlo.

Integrar al portafolios. Diga a sus alumnos que le entreguen una copia de esta tabla una vez que la hayan resuelto. Valore si es necesario repasar algún tema de lo visto hasta ahora.

g) Sustituyan el valor que obtuvieron para c y solucionen la ecuación correspondiente.

$3x^2 + 4x + (\ 2\ ) = 0$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

x_1 = No hay solución x_2 = No hay solución

>>> A lo que llegamos

Podemos determinar el número de soluciones que tiene una ecuación cuadrática con una incógnita a partir del valor del discriminante, $b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución. En este caso se dice que la solución es doble.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene ninguna solución que sea un número entero, fracción común o decimal.

>>> Lo que aprendimos

A partir de los datos de cada renglón, escribe la ecuación, el procedimiento que usarías para resolverla o las soluciones que tiene.

Ecuación	Procedimiento recomendable para resolverla	Soluciones
$x^2 - 3x - 28 = 0$	Factorización	-4 y 7
$5x^2 = 60$	Operaciones inversas	$\sqrt{12}$ y $-\sqrt{12}$
$3x^2 - 4x + 10 = 0$	Fórmula general	Ninguna
$x^2 + 2x - 35 = 0$	Factorización	-7 y 5
$x^2 + 3x - 10 = 0$	Factorización	2 y -5
$x^2 - 7x + 12.25 = 0$	Fórmula general	-3.5
$0.25x^2 - 4x + 16 = 0$	Factorización	8
$x^2 - x + 1 = 0$	Fórmula general	Ninguna
$2x^2 - x - 0.125 = 0$	Fórmula general	$\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ y $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$
$x^2 + 3x + 3 = 0$	Fórmula general	Ninguna

Posibles dificultades. Este puede ser un ejercicio complejo para los alumnos. Si lo considera necesario, recuérdeles que cuando en una ecuación de segundo grado hay sólo una solución, es que el discriminante es igual a 0. Entonces deben probar en la fórmula general con valores para los coeficientes a, b y c hasta que logren obtener cero en el discriminante, y además, que el valor del coeficiente de b entre $2a$ sea igual a -3.5

Posibles respuestas. Además de la ecuación que en este libro se señala, ecuaciones equivalentes también pueden ser soluciones correctas, por ejemplo, $2x^2 - 14x + 25 = 0$.

Posibles dificultades. Si los estudiantes no saben cómo resolver este ejercicio, dígales que se fijen en las soluciones:

- El denominador en la fórmula general se obtiene multiplicando $2a$. En las soluciones es el denominador es 4, entonces $2a = 4$, así que $a = 2$.
- Como el primer término del numerador es 1 quiere decir que $b = -1$.
- Como el segundo término del numerador es la raíz cuadrada de 2, quiere decir que el discriminante $b^2 - 4ac = 2$. Sustituyendo se tiene:

$(-1)^2 - 4\ (2)\ (c) = 2$

$1 - 8c = 2$

$-8c = 2 - 1$

$c = \frac{1}{-8} = -0.125$

Posibles respuestas. El planteamiento de ecuaciones que no tienen solución pueden realizarlo mediante operaciones inversas. Por ejemplo:

$2x^2 = -18$

$5x^2 + 125 = 0$

Si utilizan la fórmula general, el valor del discriminante debe ser menor que cero.

LA RAZÓN DORADA

SESIÓN 4

Propósito de la sesión. Usar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas en las que las soluciónes son números irracionales.

>>> Para empezar

Grandes pintores clásicos tales como Leonardo da Vinci, Rafael y Miguel Ángel, entre otros, usaron la ***razón dorada*** (una relación entre las medidas del largo y del ancho de un rectángulo de tal manera que la figura resultara agradable a la vista), para hacer sus extraordinarias obras.

Para que el rectángulo **ABCD** sea un rectángulo dorado, debe ser semejante al rectángulo **EBCF**, que se construye con las medidas indicadas en la figura 1.

Propósito del programa 28. Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula general. Explicar qué es la razón áurea.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

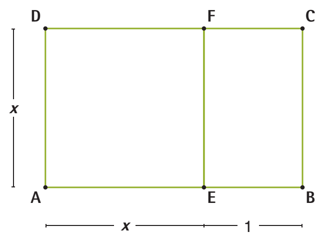


Figura 1

El valor de x se conoce como la ***razón dorada*** y se obtiene al resolver la siguiente proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{x} = \frac{x}{\overline{EB}}$$

Donde $x = \overline{AD} = \overline{EF}$

>>> Consideremos lo siguiente

Para encontrar el valor de la razón dorada, se puede resolver la ecuación de segundo grado que se obtiene de la razón de semejanza de rectángulos **ABCD** y **EBCF** de la figura 1. Al sustituir los datos de la figura 1 en la proporción anterior resulta la ecuación:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

¿Cuál es el valor de la razón dorada? ______________________

Respuesta. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Sugerencia didáctica. Para resolver este problema los alumnos necesitan primero escribir una ecuación en la que puedan utilizar la fórmula general. Si no saben cómo hacerlo, dígales que resuelvan el siguiente apartado, ahí encontrarán elementos que pueden ayudarles.

Comparen sus soluciones y comenten: ¿Qué ecuación se obtiene al aplicar los productos cruzados en la ecuación $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$? ______________________

33

Respuesta. $(x + 1)(1) = x(x)$

Sugerencia didáctica. En la secuencia 19 del libro **Matemáticas II** los estudiantes utilizaron el método de los productos cruzados. Si lo considera útil, vuelvan a revisarla.

Respuesta.

a) A partir de la ecuación que obtuvieron al aplicar los productos cruzados, quedaría:

$(x + 1)\,(1) = x\,(x)$

$x + 1 = x^2$

$x^2 - x - 1 = 0$

Sugerencia didáctica. Aclare a los alumnos que al resolver esta ecuación encontrarán números que no tienen raíz cuadrada exacta como $\sqrt{5}$. A estos números que no pueden expresarse mediante una fracción común se les llama irracionales.

Para hacer operaciones con estos números se puede encontrar un número decimal aproximado. Por ejemplo $\sqrt{5}$ es un poco mayor que 2.236 pero es menor que 2.237

Respuestas.

La razón dorada es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

el número con tres cifras decimales que más se aproxima es 1.618

La otra solución se descarta porque una longitud no puede ser negativa.

Para obtener una aproximación aceptable, se puede multiplicar por 1.618. Por ejemplo, si un rectángulo dorado mide 10 cm de ancho. su largo se aproxima a 16.18 cm.

>>> Manos a la obra

a) Escriban la ecuación $x + 1 = x^2$ en su forma general: ______________

b) Usen la fórmula general para obtener las dos soluciones de la ecuación. Pueden usar la calculadora para realizar las operaciones.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \cong \frac{1 \pm 2.236}{2}$$

$$x_1 \cong \frac{1 + 2.236}{2} = \frac{3.236}{2} \cong 1.618$$

$$x_2 \cong \frac{1 - 2.236}{2} = \frac{-1.236}{2} \cong -0.618$$

Recuerden que:

La raíz cuadrada de 5 tiene una infinidad de cifras decimales:
$\sqrt{5} = 2.23606679...$

Una aproximación con 3 cifras decimales es $\sqrt{5} \cong 2.236$, donde el símbolo $\cong$ se lee:

"es igual aproximadamente a".

Comparen sus soluciones y comenten:

a) ¿Cuál de las dos soluciones de la ecuación $x + 1 = x^2$ no es la razón dorada? Argumenten su respuesta.

b) ¿Por cuánto hay que multiplicar la medida del ancho para obtener el largo de un rectángulo dorado?

>>> A lo que llegamos

Es posible que, al aplicar la fórmula general de segundo grado, la raíz cuadrada ($\sqrt{b^2 - 4ac}$) tenga un número infinito de cifras decimales que no siguen un patrón o regularidad. Por ejemplo, para resolver la ecuación:

$$3x^2 + 5x + 1 = 0,$$

usando la fórmula general se tiene:

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4\,(3)\,(1)}}{2\,(3)} = \frac{-(5) \pm \sqrt{13}}{6}$$

Como $\sqrt{13} = 3.6055512...$ tiene un número infinito de cifras decimales que no siguen algún patrón o regularidad, las soluciones se pueden dejar indicadas como:

$$x_1 = \frac{-(5) + \sqrt{13}}{6} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-(5) - \sqrt{13}}{6}.$$

También se pueden expresar como una aproximación que tenga cierto número de cifras decimales:

$$x_1 = \frac{-(5) + \sqrt{13}}{6} = 0.101$$

$$x_2 = \frac{-(5) - \sqrt{13}}{6} = -1.101$$

34

>>> Lo que aprendimos

Usa la razón dorada para encontrar la medida faltante de cada objeto, luego en tu cuaderno haz sus correspondientes dibujos de forma tal que la tarjeta de presentación quede dentro de la ficha bibliográfica y ésta dentro de la ficha de investigación (observa otra vez la figura 1 del apartado *Para empezar*).

Objeto	Largo del rectángulo	Ancho del rectángulo
Ficha de investigación	20.3 cm	12.5 cm
Ficha bibliográfica	12.5 cm	7.7 cm
Tarjeta de presentación	9.2 cm	5.7 cm

>>> Para saber más

Sobre la resolución de ecuaciones de segundo grado, consulta:
http://www.emathematics.net/es/ecsegundogrado.php?a = 1&tipo = numero
Ruta 1: Ecuaciones de 2° grado → Resolución ecuación completa
Ruta 2: Ecuación de 2° grado → Problemas
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].

También puedes consultar:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/index.htm
Ruta 1: Solución general
Ruta 2: Problemas de aplicación
Ruta 3: Ejercicios
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Hernández, Carlos. "Funciones cuadráticas" en *Matemáticas y deportes*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

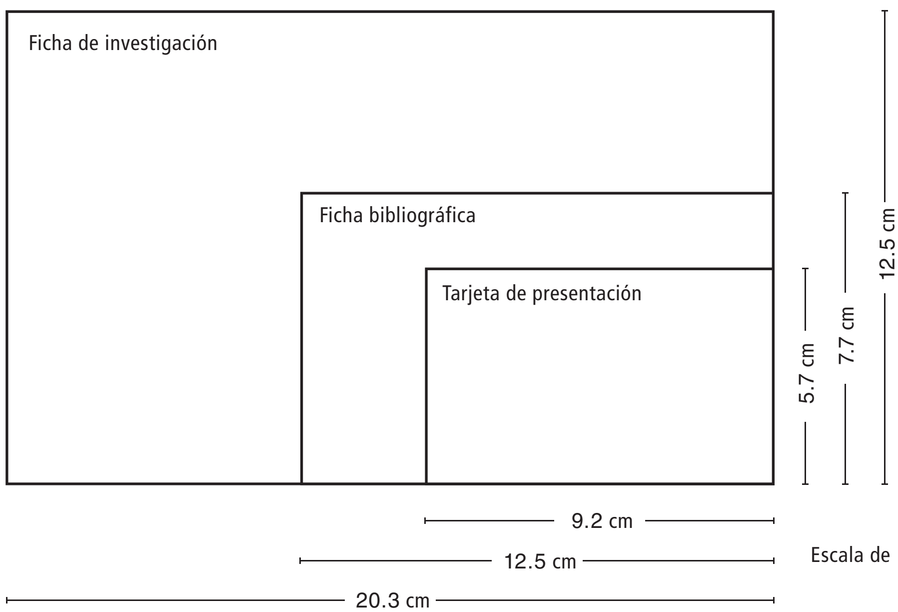
Ruiz, Concepción y Sergio de Regules. "Leonardo y los conejos" en *El piropo matemático, de los números a las estrellas*. México: SEP/Editorial Lectorum, Libros del Rincón, 2003.

Ruiz, Concepción y Sergio de Regules. "Ecuaciones cuadráticas" en *Crónicas algebraicas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

35

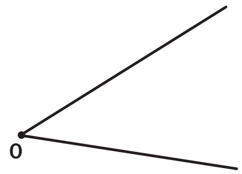
Posibles dificultades. Para completar esta tabla los alumnos deben hallar las medidas de distintas tarjetas que tienen como característica común el que todas son rectángulos dorados, es decir, que guardan una misma proporción entre sus lados. Así que, los tamaños de las tarjetas serán proporcionales y la constante de proporcionalidad será en este caso, la razón dorada que acaban de obtener, cuya aproximación decimal con tres cifras es 1.618.

Entonces, si se tiene la medida del largo del rectángulo, hay que dividir entre la razón dorada para encontrar la del ancho. Si se tiene la medida del ancho, entonces hay que multiplicar por la razón dorada para hallar la del largo.



Escala de 1:0.5

Propósito de la sesión. Identificar que, cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más paralelas, las medidas de los segmentos determinados por las paralelas en una de las rectas son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra.
En toda la secuencia se trabaja con dos semirrectas que se prolongan a partir del punto en el que se intersecan.



Materiales. Instrumentos geométricos (para toda la secuencia).

Propósito del programa 29. Mostrar el teorema de proporcionalidad de los segmentos entre paralelas, llamado también Teorema de Tales.
Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Presentar el resultado fundamental de la semejanza, es decir, el teorema de Tales.
Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 1.

Posibles procedimientos. Se espera que los alumnos identifiquen que se forman triángulos semejantes y con base en esto determinen las medidas que faltan. También podrían medir los segmentos en la figura y hacer la conversión a las medidas faltantes por medio de la escala.
Sugerencia didáctica. Observe los procedimientos de los alumnos, pero no les anticipe la respuesta. En particular, si los alumnos identifican los triángulos semejantes, pídales que justifiquen por qué lo son.

SECUENCIA 16

Teorema de Tales

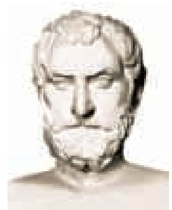
En esta secuencia determinarás el teorema de Tales y conocerás cómo dividir un segmento en una razón dada.

SESIÓN 1

LA CULPA ES DE LAS PARALELAS

>>> Para empezar

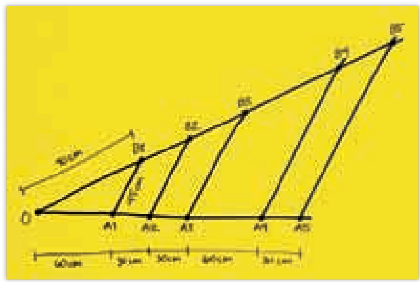
Tales de Mileto



Tales es considerado uno de los siete sabios de la antigüedad, junto con Bías de Priene, Quilón de Esparta, Cleóbulo de Lindos, Periandro de Corinto, Pitaco de Mitilene y Solón de Atenas. Tales fue comerciante, filósofo, astrónomo y matemático. A él se atribuye haber enunciado y probado el resultado matemático llamado *Teorema de Tales*, que estudiarás en esta secuencia.

>>> Consideremos lo siguiente

Marta quiere comprar los vidrios para la ventana de su estudio. Hizo un dibujo para anotar las medidas de los vidrios pero no pudo tomarlas todas. Decidió mostrar su dibujo al señor de la vidriería para pedirle que fuera él a terminar de medir los vidrios. Cuando el señor vio el dibujo, observó que los segmentos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 y A_5B_5 eran paralelos y le dijo a Marta que con las medidas anotadas se podían conocer las faltantes. El dibujo de Marta es el siguiente.



36

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Formas geométricas.
Subtema
Semejanza.
Antecedentes
Durante los tres grados de la secundaria los alumnos han trabajado la proporcionalidad. En las secuencias 5 y 6 de **Matemáticas II**, volumen I, estudiaron las rectas paralelas y los ángulos que se forman entre dos paralelas cortadas por una transversal. En las secuencias 10 y 11 de **Matemáticas III**, volumen I, estudiaron la semejanza de figuras y los criterios de semejanza de triángulos. En esta secuencia van a vincular los conocimientos que poseen sobre estos temas.

Propósitos de la secuencia
Determinar el Teorema de Tales. Resolver problemas geométricos en los que se utilice este teorema.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**La culpa es de las paralelas** Identificar que, cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más paralelas, las medidas de los segmentos determinados por las paralelas en una de las rectas son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra.	Aula de medios Interactivo Programa 29
2	**Proporcionalidad contra paralelismo** Identificar que en dos rectas que se intersecan, segmentos proporcionales determinan en sus extremos rectas paralelas.	Aula de medios Teorema de Tales
3	**Ahí está el teorema de Tales** Utilizar el teorema de Tales para resolver problemas geométricos.	Programa 30

a) ¿Estás de acuerdo que con las medidas anotadas se pueden obtener las que faltan? __________ . ¿Por qué? ______________________________

____

b) Anota en el dibujo de Marta las medidas faltantes.

c) Describe el procedimiento que utilizaste para determinar la medida del segmento A_5B_5. ______________________________

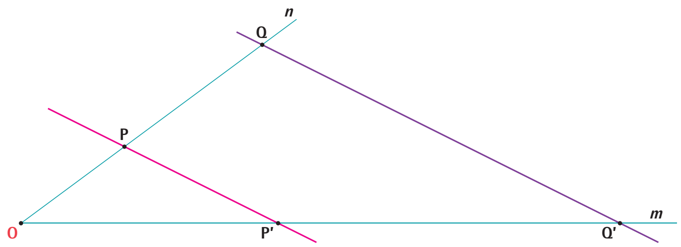
____

____

Comparen sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. En el siguiente dibujo las rectas ***n*** y ***m*** se intersecan en el punto **O**. Las rectas paralelas **PP'** y **QQ'**, forman parte de los triángulos **OPP'** y **OQQ'**.



a) ¿El triángulo **OPP'** es semejante al triángulo **OQQ'**? __________ . Justifica tu respuesta. ______________________________

____

b) Elige un punto de la recta ***n*** y llámalo **R**. Traza una paralela a la recta **PP'** que pase por **R**. Al punto de intersección de esta paralela con la recta ***m*** llámalo **R'**.

Sin medir, determina si los triángulos **ORR'** y **OPP'** son semejantes y argumenta tu respuesta. ______________________________

____

Comenten y argumenten: ¿Son semejantes los triángulos **ORR'** y **OQQ'**?

Cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más paralelas, se cumple que los triángulos formados son semejantes.

37

Sugerencia didáctica. Si algunos alumnos midieron los segmentos en la figura pregunte al grupo cuál creen que sea el problema con ese procedimiento (el dibujo está hecho a mano, por lo que las medidas no son precisas).

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen que cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por rectas paralelas, se forman triángulos semejantes.

Si lo considera conveniente pida a los alumnos que revisen el procedimiento para trazar rectas paralelas que estudiaron en la secuencia 5 de **Matemáticas II**, volumen I y que revisen la secuencia 6 de ese mismo grado para que recuerden las relaciones entre los ángulos que se forman en dos rectas paralelas cortadas por una transversal.

Respuesta. Los triángulos sí son semejantes.

Posibles procedimientos. Los alumnos pueden medir los lados de los triángulos y darse cuenta de que las medidas de los lados correspondientes son proporcionales. También pueden identificar los ángulos que se forman entre las rectas paralelas para determinar que los ángulos correspondientes en los triángulos son iguales.

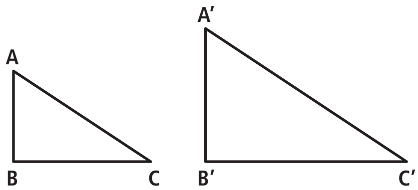
Sugerencia didáctica. Verifique que los alumnos determinen su respuesta sin medir los lados de los triángulos. Si tienen dificultades, puede preguntarles cómo son los ángulos que se forman entre dos paralelas cuando son cortadas por una transversal.

Propósito del Interactivo.

- Ilustrar el Teorema de Tales.
- Utilizar el Teorema de Tales para resolver problemas geométricos.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que dibujen un ejemplo en su cuaderno con tres rectas paralelas, y que señalen cuáles son los triángulos semejantes.

Propósito de la actividad. En la secuencia 11 los alumnos determinaron que, cuando dos triángulos son semejantes, las medidas de los lados correspondientes son proporcionales. Por ejemplo:



Se pueden establecer las siguientes igualdades:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

Con esta actividad van a determinar que la razón entre dos lados de uno de los triángulos es la misma que la razón entre los dos lados correspondientes del otro triángulo. Es decir que, en el ejemplo, se establecen las siguientes igualdades:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'A'}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{C'A'}}$$

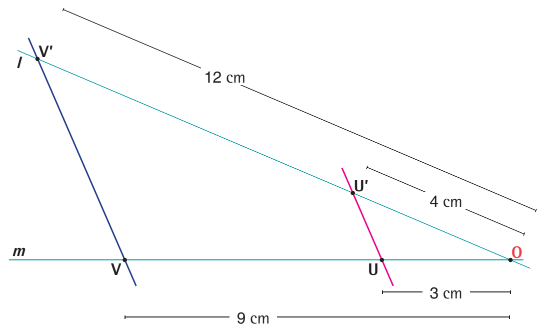
Es importante que los alumnos identifiquen que estas tres igualdades, por lo general, son distintas entre sí.

SECUENCIA 16

II. En el siguiente esquema se trazaron rectas paralelas **UU'** y **VV'** para formar los triángulos semejantes **OUU'** y **OVV'**.

Recuerda que:

La razón de semejanza de un triángulo A con respecto a un triángulo B se calcula dividiendo la medida de un lado del triángulo A entre la medida del lado correspondiente en el triángulo B.



a) ¿Cuál es la razón de semejanza del triángulo **OVV'** con respecto al triángulo **OUU'**? _______________

b) Sólo una de las siguientes igualdades es verdadera. Enciérrala en un círculo.

$(\overline{OV})\ (\overline{OV'}) = (\overline{OU})\ (\overline{OU'})$ $\qquad \frac{\overline{OV}}{\overline{OV'}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{OU'}}$ $\qquad \frac{\overline{OV}}{\overline{OU'}} = \frac{\overline{OV'}}{\overline{OU}}$

c) De la semejanza de los triángulos **OVV'** y **OUU'** se obtiene la igualdad $\frac{\overline{OV}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OV'}}{\overline{OU'}}$.

Describe un procedimiento para llegar de $\frac{\overline{OV}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OV'}}{\overline{OU'}}$ a la igualdad que encerraste.

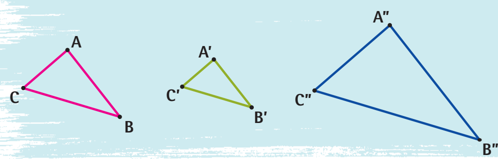
____

____

____

El procedimiento anterior muestra que:

En un conjunto de triángulos semejantes, la razón entre las medidas de dos lados de un triángulo es igual a la razón entre las medidas de los dos lados correspondientes de cada uno de los otros triángulos.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A''C''}}$$

38

Respuestas.

a) La razón de semejanza es 3.

b) La segunda igualdad.

c) Se multiplica ambos lados de la igualdad

$\frac{\overline{OV}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OV'}}{\overline{OU'}}$ por $\overline{OU}$

$$(\overline{OU})\left(\frac{\overline{OV}}{\overline{OU}}\right) = (\overline{OU})\left(\frac{\overline{OV'}}{\overline{OU'}}\right)$$

para obtener $\overline{OV} = \frac{\overline{OV'}\ \overline{OU}}{\overline{OU'}}$

después se divide entre $\overline{OV'}$

ambos lados de la igualdad $\frac{\overline{OV}}{\overline{OV'}} = \frac{\overline{OV'}\ \overline{OU}}{\overline{OU'}\ \overline{OV'}}$

de donde se obtiene la igualdad $\frac{\overline{OV}}{\overline{OV'}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{OU'}}$

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban otras dos igualdades posibles para que comparen entre sí todos los lados de los triángulos.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{B''C''}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{A''C''}}$$

Comente con el grupo que estas igualdades también pueden plantearse con los recíprocos, por ejemplo:

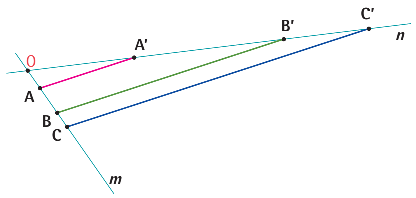
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A''C''}}{\overline{A''B''}}$$

III. En la siguiente figura se trazaron las rectas ***m*** y ***n*** que se intersecan en **O** y, también, se trazaron las paralelas **AA′**, **BB′**, **CC′**, las cuales en su intersección con la recta ***m*** forman los segmentos **OA**, **AB**, **BC**, **OB**, **AC** y **OC**.

a) Escribe los segmentos que forman las paralelas en su intersección con la recta ***n***

____

b) ¿Cuál es el segmento correspondiente a $\overline{OA}$? __________ ¿Y el segmento correspondiente a $\overline{BC}$? __________



c) Considera las medidas que se dan de algunos de los segmentos y completa la tabla.

Recta *m*	Recta *n*	Razón entre las medidas de los segmentos formados por las paralelas	
$\overline{OA} = 5$	$\overline{OA'} = 25$	$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}-\overline{OA}}{\overline{OB'}-\overline{OA'}} = \frac{12-5}{60-25} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$
$\overline{OB} = 12$	$\overline{OB'} = 60$	$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$	$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OC}-\overline{OB}}{\overline{OC'}-\overline{OB'}} = \frac{16-12}{80-60} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$
$\overline{OC} = 16$	$\overline{OC'} = 80$	$\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{OC}-\overline{OA}}{\overline{OC'}-\overline{OA'}} = \frac{16-5}{80-35} = \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$

d) ¿Qué segmentos utilizaste para obtener $\overline{B'C'}$? ____________________

e) ¿Qué segmentos utilizaste para obtener $\overline{A'C'}$? ____________________

f) ¿Las medidas de los segmentos formados por las paralelas en la recta ***m*** son proporcionales a las medidas de los segmentos formados en la recta ***n***? ________

Justifica tu respuesta. ____________________________________

____

____

Propósito de la actividad. Identificar las razones o cocientes que permiten determinar que, cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más paralelas, se cumple que las medidas de los segmentos determinados por las paralelas en una de las rectas son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra.

Respuestas.

a) $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{A'C'}$ y $\overline{OC'}$.

b) $\overline{OA'}$ y $\overline{B'C'}$.

Posibles procedimientos. Los alumnos pueden identificar que la medida de $\overline{OA'}$ es cinco veces la medida de $\overline{OA}$, y esta relación se mantiene entre las medidas de $\overline{OB'}$ y $\overline{OB}$ y de $\overline{OC'}$ y $\overline{OC}$.

También pueden identificar que los triángulos **OAA′**, **OBB′** y **OCC′** son semejantes.

Para encontrar las medidas que faltan pueden escribir las razones entre los lados correspondientes, por ejemplo para encontrar la medida de $\overline{OB}$:

$$\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{60}{25} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{x}{5}.$$

Respuestas.

d) A $\overline{OC'}$ se le resta $\overline{OB'}$.

e) A $\overline{OC'}$ se le resta $\overline{OA'}$.

f) Son proporcionales porque el valor de todas las razones es el mismo.

Integrar al portafolio. Pida a los alumnos que resuelvan esta actividad en una hoja aparte. Cuando terminen puede pedirles que intercambien su respuesta con otro alumno para que cada uno comente la respuesta de su compañero en el intercambio grupal. Recupere las hojas de respuestas para el portafolio.

Sugerencia didáctica. Pida a algunos alumnos que expliquen la respuesta de su compañero en el inciso g). Deben identificar las razones o cocientes que justifican que las medidas de los segmentos son proporcionales.

Comente con los alumnos que hay dos maneras de establecer las razones o cocientes (pueden intercambiar los numeradores con los denominadores), pero lo importante es que los segmentos correspondientes tengan el mismo orden.

Propósito de la actividad. Los alumnos podrán revisar sus respuestas. Verifique que todos entiendan qué quiere decir utilizar el teorema de Tales en ese ejemplo (ya no deben justificar la respuesta con base en que hay triángulos semejantes o con base en los ángulos entre las paralelas, es suficiente con que sepan que las rectas transversales son paralelas para poder determinar las medidas que faltan directamente, ya que el teorema de Tales indica que las medidas de los segmentos son proporcionales).

Una vez que hayan revisado sus procedimientos, pida a los alumnos que observen que la medida de $\overline{B_1B_2}$ es la mitad de $\overline{OB_1}$ y que, de manera similar, la medida de $\overline{A_1A_2}$ es la mitad de la de $\overline{OA_1}$. También puede observarse que la medida de $\overline{B_3B_4}$ es igual a la medida de $\overline{OB_1}$ y la medida de $\overline{A_3A_4}$ es igual a la de $\overline{OA_1}$.

1

Observa que para formar las razones entre las medidas de los segmentos correspondientes, siempre se tomaron las medidas de los segmentos formados en la recta ***m*** como numeradores y las de los segmentos formados en la recta ***n*** como denominadores. ¿Qué pasa si se toman al revés?, ¿los segmentos en ***m*** siguen siendo proporcionales a los segmentos correspondientes en ***n***?

g) Traza en tu cuaderno dos rectas que se intersequen y denótalas con ***p*** y ***q*** respectivamente; traza a demás tres rectas transversales que intersequen a ***p*** y ***q*** y paralelas entre sí. ¿Son proporcionales las medidas de los segmentos formados por las paralelas que intersecan a la recta ***p*** con respecto a las medidas de los segmentos formados por las paralelas que intersecan a la recta ***q***?

__________ . Justifica tu respuesta. ______________________________

____

____

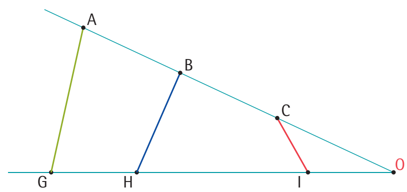
Observen que sólo algunos de los segmentos que se forman son lados de triángulos, el resto son segmentos comprendidos entre dos paralelas. De la actividad **III** se puede concluir lo siguiente:

>>> A lo que llegamos

Cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más paralelas, se cumple que las medidas de los segmentos formados por las paralelas que intersecan a una de las rectas son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes formados por las paralelas que intersecan a la otra. A este enunciado se le conoce como teorema de Tales.

Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y utilicen el teorema de Tales para verificar sus respuestas.

IV. Mide los segmentos y determina las razones.



a) $\frac{OI}{OC}$ = __________ $\frac{IH}{CB}$ = __________ $\frac{HG}{BA}$ = __________

40

Propósito de la actividad. Identificar que cuando las rectas transversales no son paralelas, las medidas de los segmentos determinados no son proporcionales.

Respuesta.

a) $\frac{\overline{OI}}{\overline{OC}} = \frac{2}{3}$.

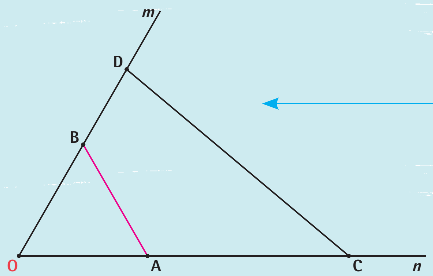
$\frac{\overline{IH}}{\overline{CB}} = \frac{4}{2.5}$.

$\frac{\overline{HG}}{\overline{BA}} = \frac{2}{2.5}$.

b) ¿Las medidas de los segmentos formados sobre una de las rectas son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes en la otra recta? ________ . ¿Por qué? ________

c) ¿Los segmentos **AG**, **BH** y **CI** son paralelos entre sí? ________

Si dos rectas que se intersecan son cortadas por rectas no paralelas, las medidas de los segmentos formados en una de las rectas no necesariamente son proporcionales a las medidas de los segmentos formados en la otra recta. Por ejemplo, en la figura las rectas *m* y *n* son intersecadas por dos rectas no paralelas.



Las medidas de los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AC}$, $\overline{OC}$ no son proporcionales a las medidas de los segmentos $\overline{OB}$, $\overline{BD}$, $\overline{OD}$.

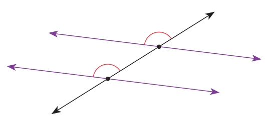
PROPORCIONALIDAD CONTRA PARALELISMO

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En la secuencia 6 de **Matemáticas II**, volumen I, estudiaron las relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal:

a) Se forman ángulos correspondientes iguales.



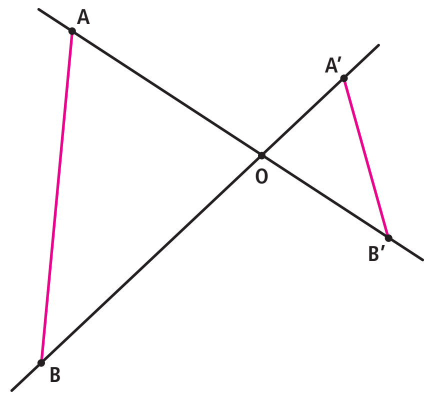
41

Respuestas.

b) Las medidas no son proporcionales porque las razones no son iguales.

c) Los segmentos no son paralelos.

Sugerencia didáctica. Comente a los alumnos que se hace la aclaración de que no necesariamente los segmentos son proporcionales, debido a que si se prolongan las rectas, pueden trazarse triángulos semejantes con rectas transversales que no sean paralelas. Por ejemplo:



Propósito de la sesión. Identificar que en dos rectas que se intersecan, segmentos proporcionales determinan en sus extremos rectas paralelas.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Presentar el recíproco del teorema de Tales.

Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 2.

Sugerencia didáctica. Es posible que algunos alumnos identifiquen que las rectas son paralelas porque al trazarlas "se ven paralelas" En este momento no los corrija, pero es importante que, al final de la sesión, revisen su justificación para que esté basada en argumentos geométricos.

Respuestas.

a) Sí son proporcionales ya que $\frac{\overline{OE}}{\overline{OE'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}}$.

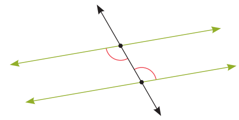
b) Sí son paralelos. Para justificarlo los alumnos pueden identificar que los triángulos **EOE'** y **AOA'** son semejantes y entonces las rectas que pasan por $\overline{AA'}$ y $\overline{EE'}$ forman el mismo ángulo al cortar el segmento $\overline{OA}$ o al cortar el segmento $\overline{OA'}$ por lo que son paralelas.

Los triángulos son semejantes porque las medidas de los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OE}$ son proporcionales a las medidas de los segmentos $\overline{OA'}$ y $\overline{OE'}$ ya que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OE'}}$, y entonces los triángulos tienen un ángulo igual (en el vértice **O**) comprendido entre dos lados que son proporcionales a los correspondientes en el otro triángulo.

c) Sí son paralelos. Las razones son similares a las del inciso anterior.

SECUENCIA 16

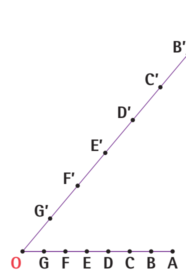
b) Se forman ángulos alternos internos y alternos externos que miden lo mismo.



A la inversa se cumple que, si dos rectas son cortadas por una transversal y los ángulos correspondientes miden lo mismo, las rectas son paralelas.

>>> Consideremos lo siguiente

El segmento **OA** se dividió en 7 partes iguales cuyas longitudes son todas de 0.5 cm y el segmento **OA'** se dividió en 7 partes iguales de 1 cm cada una.



a) ¿Las medidas de los segmentos **OE** y **EA** son proporcionales a las medidas de los segmentos **OE'** y **E'A'**? __________ . ¿Por qué? __________

b) ¿Son paralelos los segmentos **AA'** y **EE'**? __________ . Justifica tu respuesta.

c) ¿Son paralelos los segmentos **GG'** y **BB'**? __________ . Justifica tu respuesta.

42

>>> Manos a la obra

I. Traza los segmentos **FF'** y **CC'**.

a) ¿Los triángulos **FOF'** y **COC'** son semejantes? __________ . Justifica tu respuesta.

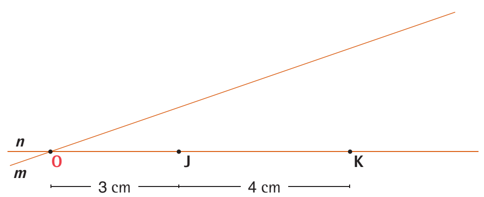
b) Calcula las razones que se piden.

$\frac{\overline{OF}}{\overline{OF'}} =$ $\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} =$ $\frac{\overline{FC}}{\overline{F'C'}} =$

¿Son proporcionales las medidas de los segmentos **OF**, **OC** y **FC** con respecto a las medidas de los segmentos **OF'**, **OC'** y **FC'**? __________ . Justifica tu respuesta.

c) ¿El segmento **AA'** es paralelo al segmento **EE'**? ________ . Justifica tu respuesta.

II. Considera dos rectas que se intersecan, ***m*** y ***n***, y los segmentos marcados en ***n***, $\overline{OJ}$ y $\overline{JK}$.



a) Sobre la recta ***m***, marca dos puntos (G y H), los que quieras, pero de modo que cumplan la siguiente condición:

$$\frac{\overline{OJ}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{JK}}{\overline{GH}}$$

b) ¿Cuánto miden los segmentos OG y GH que obtuviste?

$\overline{OG} =$ ________ $\overline{GH} =$ ________

43

Respuestas.

Los triángulos son semejantes porque las medidas de los segmentos $\overline{OF}$, $\overline{OC}$ y $\overline{FC}$ son proporcionales a las medidas de los segmentos $\overline{OF'}$, $\overline{OC'}$ y $\overline{F'C'}$ ya que $\frac{\overline{OF}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{F'C'}}$, y entonces la medida de todos los lados de uno de los triángulos son proporcionales a las medidas de los lados correspondientes en el otro triángulo, o también los triángulos tienen un ángulo igual (en el vértice **O**) comprendido entre dos lados que son proporcionales a los correspondientes en el otro triángulo.

Sugerencia didáctica. Un reto interesante es que pida a los alumnos que escojan dos cantidades distintas a las siguientes:
1.5 y 2, 6 y 8, 9 y 12, 12 y 16, 15 y 20, etc., para marcar los puntos.

Se espera que los alumnos puedan identificar que se forman triángulos semejantes y que entonces los ángulos que forman los segmentos con una de las rectas o con la otra son iguales.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que revisen las justificaciones que escribieron en el apartado *Consideremos lo siguiente*. Después usted puede escribir en el pizarrón la frase siguiente:

Por el inverso del teorema de Tales los segmentos $\overline{BB'}$ *y* $\overline{DD'}$ *son paralelos.*

Pida al grupo que comenten qué quiere decir la expresión "por el inverso del teorema de Tales".

1

c) ¿Son paralelos los segmentos $\overline{GJ}$ y $\overline{HK}$? _______ Justifica tu respuesta. _____

____

____

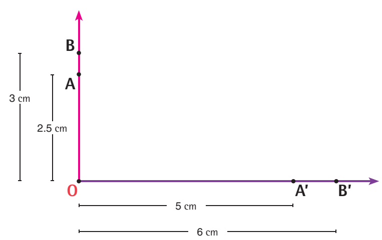
Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

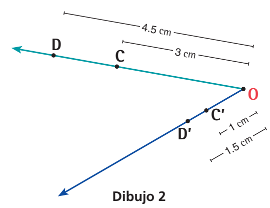
Sean *l* y *m* dos rectas que se intersecan en O. Si en cada una de las rectas se eligen tres o más puntos de manera que las medidas de los segmentos determinados en una sean proporcionales a las correspondientes medidas de los segmentos determinados en la otra, se cumple que las rectas determinadas por puntos correspondientes son **paralelas entre sí**. A este enunciado se le conoce como el **inverso del teorema de Tales**.

>>> Lo que aprendimos

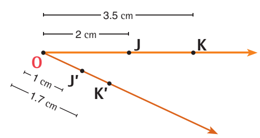
En cada una de las siguientes figuras traza los segmentos determinados por los puntos denotados con la misma letra, por ejemplo, el segmento **AA'**.



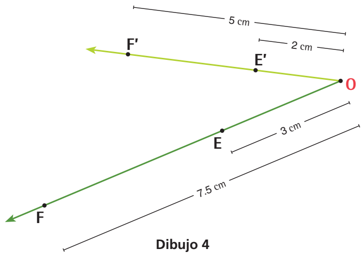
Dibujo 1



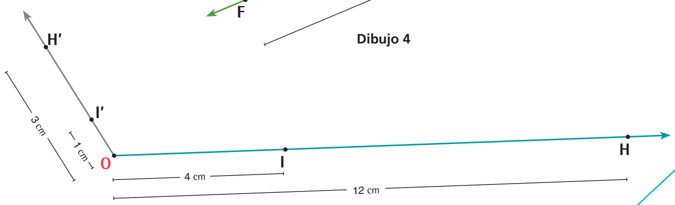
Dibujo 2



Dibujo 3



Dibujo 4



Dibujo 5

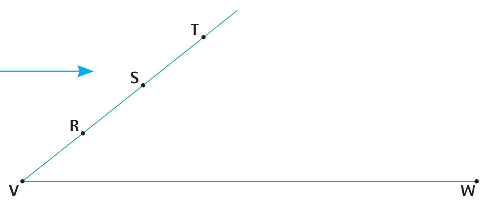
En una de las figuras los segmentos que trazaste al unir los puntos no son paralelos, ¿cuál de las figuras es? __________ . Justifica tu respuesta. ______________________

SESIÓN 3

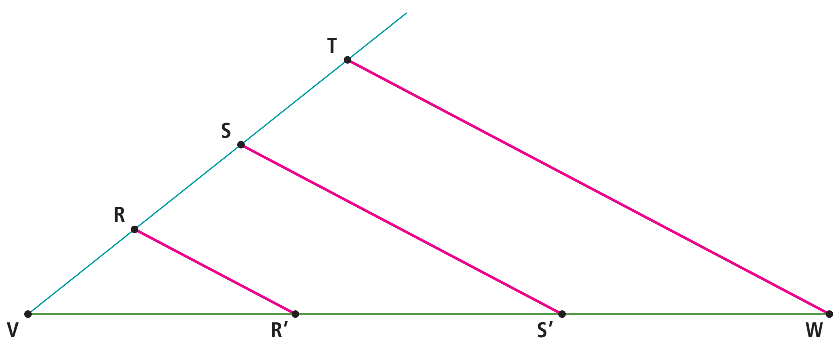
AHÍ ESTÁ EL TEOREMA DE TALES

>>> Lo que aprendimos

1. En la siguiente figura $\overline{VR} = \overline{RS} = \overline{ST}$. Traza el segmento $\overline{TW}$ y paralelas a este segmento que pasen por **S** y **R**. Sean **S'** y **R'** los puntos en los que las paralelas cortan al segmento **VW**, respectivamente.



a) ¿En cuántos segmentos quedó dividido el segmento **VW**? __________



Respuesta. En el dibujo 3 los segmentos no son paralelos ya que los cocientes que se forman con las medidas de los segmentos no son iguales: $\frac{3.5}{2}$ no es igual a $\frac{1.7}{1}$ (los alumnos pueden justificarlo con otros cocientes que involucren a estos números).

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que pasen al pizarrón a escribir los cocientes para los casos en los que los segmentos que trazaron sí son paralelos.

Propósito de la sesión. Utilizar el teorema de Tales para resolver problemas geométricos.

Respuesta. El segmento $\overline{VW}$ queda dividido en 3 segmentos, todos son iguales entre sí.

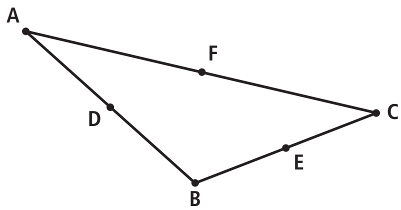
Posibles procedimientos. Para justificarlo los alumnos pueden utilizar el teorema de Tales: *Cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más paralelas se cumple que las medidas de los segmentos determinados por las paralelas en una de las rectas son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra*. En este caso, como las rectas son paralelas, las medidas de los segmentos en $\overline{VW}$ son proporcionales a las medidas de los segmentos en $\overline{VT}$, y como los tres segmentos sobre $\overline{VT}$ son iguales, entonces los segmentos en $\overline{VW}$ también son iguales.

Los alumnos también pueden justificarlo si identifican que se forman tres triángulos semejantes. Las medidas de los lados en el triángulo **VWT** son tres veces las medidas de los lados en el triángulo **VRR'**. Y las medidas de los lados en el triángulo **VSS'** son dos veces las medidas de los lados en el triángulo **VRR'**.

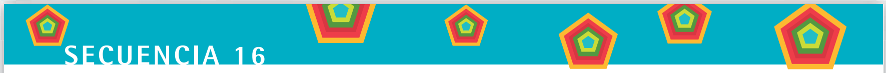
Respuesta. Con la hoja rayada se forma un esquema similar al de la actividad anterior. Por lo que, para justificar lo que se pide, los alumnos pueden utilizar el teorema de Tales o pueden identificar los triángulos semejantes que se forman.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que utilicen el procedimiento de la hoja rayada para dividir algún segmento en partes iguales.

Sugerencia didáctica. Usted puede trazar en el pizarrón un triángulo (de preferencia escaleno, para considerar un caso general) señale los vértices y los puntos medios como se indica:



Comente a los alumnos que observen dos de los lados del triángulo y los puntos que están sobre estos lados. Por ejemplo, los lados **AB** y **AC** y los puntos **D** y **F**.
Pregunte a los alumnos cómo pueden justificar que las medidas de los segmentos en el lado **AB** son proporcionales a las medidas de los segmentos en el lado **AC** (como **D** y **F** son puntos medios de los lados **AB** y **AC**, entonces $\overline{AD} = \overline{DB}$ y $\overline{AF} = \overline{FC}$, por lo que $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}$).
Entonces, por el inverso del teorema de Tales las rectas que pasan por $\overline{BC}$ y por $\overline{DF}$ son paralelas. De manera similar se puede determinar que cada una de las rectas que pasa por los puntos medios es paralela a uno de los lados del triángulo **ABC**.
Otra manera de justificarlo, aunque no se utiliza directamente el teorema de Tales, es si los alumnos se fijan en el triángulo **ADF**. Pregúnteles: ¿cómo es este triángulo con respecto al triángulo **ABC**? (Son semejantes, ya que dos de los lados del triángulo **ADF** miden la mitad de los lados correspondientes en el triángulo **ABC** y comparten el ángulo entre estos lados).
Se espera que puedan identificar que los otros dos triángulos, **BDE** y **CEF**, son semejantes al triángulo **ABC**.
Con cualquiera de las dos justificaciones se determina que los ángulos en el triángulo **DEF** son iguales a los ángulos en el triángulo **ABC** y, por lo tanto, estos triángulos son semejantes.



b) ¿Cómo son entre sí los segmentos en los que se dividió el segmento **VW**? ________

Justifica tu respuesta. ________________

____

2. En las ilustraciones se muestra el procedimiento para dividir en **5** partes iguales un segmento dado utilizando una hoja rayada.

Comenta con tus compañeros y escribe una justificación de que los segmentos en los que quedó dividido el segmento dado miden los mismo. ________

____

____

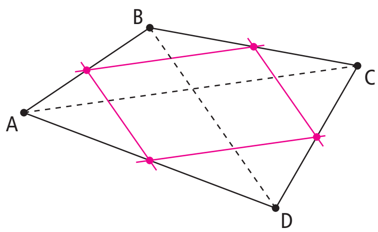
____

____

3. Utiliza el teorema de Tales para justificar que los puntos medios de los lados de cualquier triángulo determinan un triángulo semejante al dado.

¿Cuál es la razón de semejanza del triángulo dado con respecto al triángulo formado por los puntos medios?

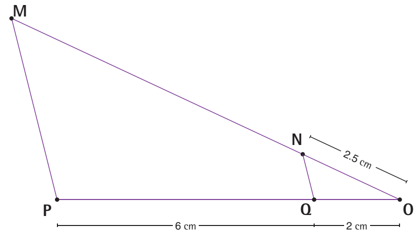
4. Utiliza el teorema de Tales para justificar la siguiente afirmación: los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero determinan un paralelogramo.



46

Sugerencia didáctica. Si tienen dificultades comente a los alumnos que la diagonal **BD** divide al cuadrilátero en dos triángulos y que deben justificar que, en cada triángulo, las rectas que pasan por los puntos medios de los lados del cuadrilátero son paralelas a la diagonal, y por lo tanto son paralelas entre sí. Si se traza la otra diagonal, **AC**, se justifica que las otras dos rectas que pasan por los puntos medios son paralelas entre sí. Entonces el cuadrilátero que se forma al unir los puntos medios tiene los lados opuestos paralelos y por lo tanto es un paralelogramo.

5. Calcula la longitud del segmento $\overline{MN}$. Considera paralelos los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$.



Respuesta. 7.5 cm. Los alumnos pueden utilizar el teorema de Tales o también pueden identificar que se forman dos triángulos semejantes.

Para conocer más acerca de las aplicaciones de este teorema en la solución de problemas, puedes ver el programa *Utilizando el teorema de Tales*.

Propósito del programa 30. Mostrar aplicaciones del teorema de Tales en la solución de problemas.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

>>> Para saber más

Sobre el teorema de Tales y sus aplicaciones, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Semejanza_aplicaciones/teorema_de_thales.htm
Ruta: Aplicaciones
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Sobre Tales, consulta:
http://www.filosofia.org/cur/pre/tales.htm
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Filosofía en español. España.

Propósito de la sesión. Determinar cuándo dos polígonos son homotéticos y trazar un polígono homotético a otro.

Dos polígonos son homotéticos si son semejantes y tienen lados correspondientes paralelos.

Materiales. Instrumentos geométricos (para toda la secuencia).

Sugerencia didáctica. Si no lo recuerdan, pida a los alumnos que revisen la secuencia 10.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Utilizar la homotecia como aplicación del teorema de Tales y su recíproco.

Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 1.

Propósito de la actividad. En esta actividad se pide a los alumnos que tracen un cuadrilátero homotético al cuadrilátero **ABCD**. Para que sean homotéticos la distancia de cualquier vértice del cuadrilátero **A'B'C'D'** al punto **O** debe ser el triple de la distancia del vértice correspondiente del cuadrilátero **ABCD**, de esta manera los cuadriláteros son semejantes y tienen lados correspondientes paralelos. Sin embargo, es importante que no anticipe estas características a los alumnos ni los corrija si el polígono que tracen no las cumple, ya que podrán determinarlas con las actividades de la sesión.

Posibles procedimientos. Se espera que los estudiantes midan los ángulos y los lados del cuadrilátero **ABCD** y que tracen sobre las rectas los lados del cuadrilátero **A'B'C'D'** de manera que tengan el triple de esas medidas. Probablemente tendrán dificultades para que cierre el cuadrilátero o simplemente trazarán el último lado sin verificar que tenga la medida correcta.

Si sólo miden los lados o sólo miden los ángulos es probable que el cuadrilátero que tracen no sea semejante al cuadrilátero **ABCD**.

Otro procedimiento es trazar aparte el cuadrilátero semejante y luego recortarlo y acomodarlo sobre las rectas.

Sugerencia didáctica. Observe los procedimientos de los alumnos para que entre todos puedan comentar y comparar los que hayan surgido dentro del grupo.

SECUENCIA 17

Figuras homotéticas

En esta secuencia aprenderás a identificar y construir polígonos homotéticos. Determinarás el centro y la razón de homotecia de polígonos homotéticos.

SESIÓN 1

ESPECIALMENTE SEMEJANTES

>>> Para empezar

Describan las dos características que cumplen los polígonos semejantes.

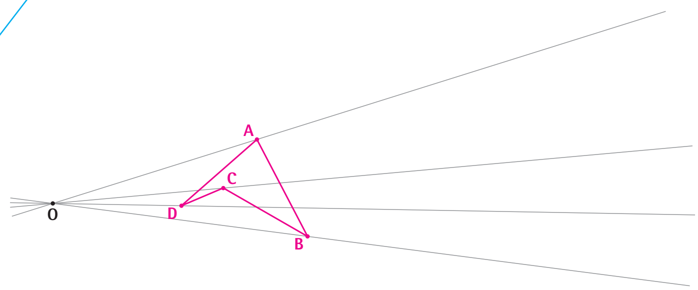
____

____

____

>>> Consideremos lo siguiente

Sean **O** un punto del plano y **ABCD** un cuadrilátero. Construyan un cuadrilátero **A'B'C'D'** semejante al dado de manera que **A'** esté en la recta **OA**, **B'** en la recta **OB**, **C'** en la recta **OC** y **D'** en la recta **OD** y que la razón de semejanza de **ABCD** con respecto al **A'B'C'D'** sea 3.



a) Describan el procedimiento que utilizaron. ____

____

____

____

48

b) Justifiquen por qué el polígono que trazaron (es decir, el cuadrilátero **A'B'C'D'**) es semejante al **ABCD** en la razón de semejanza pedida. ______________

____

____

c) ¿Son paralelos entre sí los pares de lados correspondientes? __________

Justifiquen su respuesta. ______________________

____

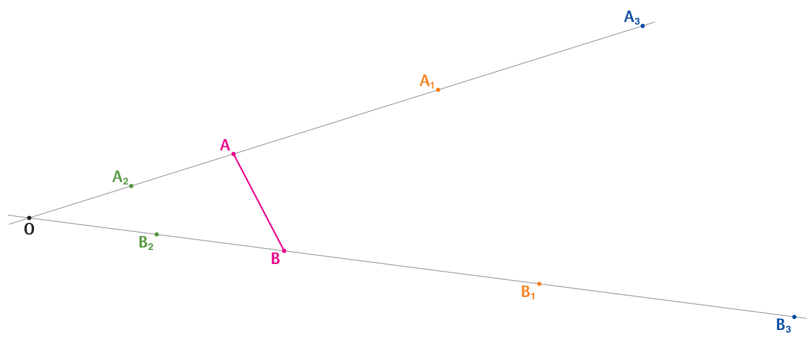
____

____

Comparen sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. En la siguiente figura se trazó el lado **AB** del cuadrilátero anterior. Sobre la recta **OA** están señalados los puntos A_1, A_2 y A_3, tales que, $\overline{OA_1}$ = 10 cm, $\overline{OA_2}$ = 2.5 cm y $\overline{OA_3}$ = 15 cm. Sobre la recta **OB** están señalados los puntos B_1, B_2 y B_3, tales que, $\overline{OB_1}$ = 12 cm, $\overline{OB_2}$ = 3 cm y $\overline{OB_3}$ = 18 cm. Traza los segmentos A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3.



a) ¿Son paralelos los segmentos **AB** y A_1B_1? __________

Justifica tu respuesta. ______________________

____

____

49

Posibles dificultades. Si los alumnos justifican que los lados correspondientes son o no paralelos diciendo que "se ven paralelos" o "no se ven paralelos" o "porque las rectas no se juntan", pregunte al grupo por qué se puede utilizar el inverso del teorema de Tales para justificar si los lados correspondientes son paralelos y cómo lo harían (deben medir la distancia de los extremos de cada lado al punto **O** y determinar si las medidas de los segmentos correspondientes son proporcionales).

2

Propósito del Interactivo. Obtener las figuras homotéticas a figuras dadas.

Sugerencia didáctica. Comente a los alumnos que en la sesión 2 de la secuencia anterior hicieron una actividad parecida.

Respuestas. Los alumnos pueden identificar que, por ejemplo, los triángulos **OAB** y OA_1B_1 son semejantes y, con base en ello, determinar que las rectas que pasan por $\overline{AB}$ y $\overline{A_1B_1}$ son paralelas. También pueden utilizar directamente el inverso del teorema de Tales: "Por el inverso del teorema de Tales, como las medidas de los segmentos **OA** y OA_1 son proporcionales a las medidas de los segmentos **OB** y OB_1, entonces las rectas que pasan por los segmentos **AB** y A_1B_1 son paralelas".

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban las razones o cocientes para justificar la proporcionalidad entre la medida de los segmentos.

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Transformaciones.
Subtema
Movimientos en el plano.
Antecedentes
La Homotecia es un concepto nuevo para los alumnos, pero los elementos que la caracterizan (proporcionalidad, semejanza de figuras y rectas paralelas) los han trabajado a lo largo de los tres grados de la secundaria. En esta secuencia van a vincular los conocimientos que poseen sobre estos temas.

Propósitos de la secuencia
Determinar las propiedades que permanecen invariantes al aplicar una homotecia a una figura.
Determinar los resultados de una homotecia cuando la razón es igual, menor o mayor que 1 o que –1.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Especialmente semejantes** Determinar cuándo dos polígonos son homotéticos y trazar un polígono homotético a otro.	Programa 31 Interactivo Aula de medios
2	**Depende de la razón** Determinar los resultados de una homotecia al comparar distintos valores para la razón de homotecia.	Programa 32 Interactivo

Respuesta. El segmento que está en razón 3 a 1 es el segmento A_3B_3.

Propósito de la actividad. Los alumnos van a trazar un cuadrilátero homotético al cuadrilátero **ABCD**.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que no midan los segmentos y que sólo utilicen el compás. Para hacerlo, por ejemplo para trazar el punto **A'**, la abertura del compás debe ser igual a $\overline{OA}$, deben colocar el compás con esa abertura sobre **A** y trazar el punto **A'** sobre la misma recta en la que está **A**. Cuando hayan marcado los puntos coménteles que tienen que justificar que los cuadriláteros **ABCD** y **A'B'C'D'** son semejantes.

Sugerencia didáctica. Verifique que los alumnos justifiquen la proporcionalidad entre los lados correspondientes y la igualdad de los ángulos.

Posibles procedimientos. Se espera que los alumnos utilicen el inverso del teorema de Tales para justificar que los lados correspondientes de los cuadriláteros son paralelos y que entonces determinen por qué los ángulos son iguales. Para justificar que las medidas de los lados correspondientes son proporcionales pueden identificar los triángulos semejantes, por ejemplo el triángulo **OAD** es semejante al triángulo **OA'D'**.

b) ¿Son paralelos los segmentos **AB** y A_2B_2? ________

Justifica tu respuesta. ______________________________

____

____

c) ¿Son paralelos los segmentos **AB** y A_3B_3? ________

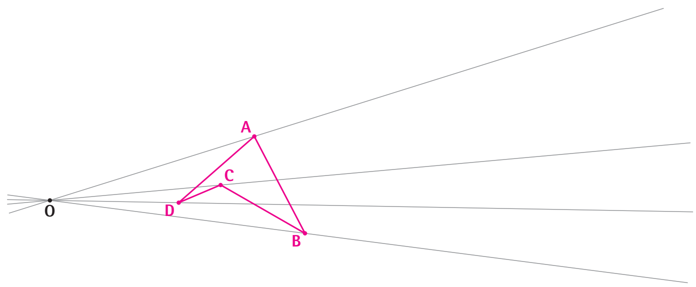
Justifica tu respuesta. ______________________________

____

____

d) ¿Cuál de los tres segmentos que trazaste está en razón 3 a 1 con respecto al segmento **AB**? ________

II. Utiliza tu compás para trazar puntos **A'**, **B'**, **C'** y **D'** de manera que $OA' = 2\,\overline{OA}$, $\overline{OB'} = 2\,\overline{OB}$, $\overline{OC'} = 2\,\overline{OC}$ y $\overline{OD'} = 2\,\overline{OD}$.



a) ¿Son semejantes los cuadriláteros? ________

Justifica tu respuesta. ______________________________

____

____

b) ¿Los lados del cuadrilátero **ABCD** son paralelos a los correspondientes lados del cuadrilátero **A'B'C'D'**? ________

Justifica tu respuesta. ______________________________

____

____

Dados un polígono (ABCDEF…), un punto O del plano y las rectas que unen cada vértice del polígono con el punto O, si se trazan puntos A', B', C', D', E', F', … en las rectas OA, OB, OC, OD, OE, OF, …, respectivamente, de manera que las medidas de los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$, $\overline{OD'}$, $\overline{OE'}$, $\overline{OF'}$, … sean proporcionales a las medidas de los segmentos OA, OB, OC, OD, OE, OF, …, se cumple que el polígono A'B'C'D'E'F' … es semejante al polígono original y que sus lados son paralelos a los lados correspondientes del polígono original.

III. a) Realicen los trazos que se piden:

1. Tracen en su cuaderno un triángulo **ABC**.
2. Tracen una recta paralela al lado **BC** y con su compás marquen en esa paralela un segmento que mida $\frac{1}{4}$ de **BC**. Llamen a los extremos del segmento **B'** y **C'**.
3. Tracen una paralela a **BA** que pase por **B'** y con su compás marquen desde **B** un segmento que mida $\frac{1}{4}$ de **BA**, y llamen al otro extremo **A'**. Asegúrense de que el ángulo **A'B'C'** mida lo mismo que el ángulo **ABC**.
4. Tracen el segmento **A'C'**.
5. Tracen las rectas **AA'**, **BB'** y **CC'**.

b) Contesten.

1. ¿Son semejantes los triángulos **ABC** y **A'B'C'**? ___________
2. Si los triángulos son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza de **ABC** con respecto a **A'B'C'**? ________________
3. Observen que las rectas **AA'**, **BB'** y **CC'** se intersecan en un solo punto, llámenlo **O**. ¿Cuánto valen las razones $\frac{OA}{OA'}$, $\frac{OB}{OB'}$ y $\frac{OC}{OC'}$? ________________

c) Comenten qué relación hay entre la razón de semejanza de los triángulos y la razón de las distancias de **O** a los vértices correspondientes.

Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen sus resultados.

51

Propósito de la actividad. Los alumnos van a trazar dos triángulos semejantes de manera que los lados correspondientes sean paralelos. Van a identificar que las rectas que unen los vértices correspondientes se intersecan en un punto.

Respuestas.

Los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es igual a 4.

Las razones son iguales a 4.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que entre todos escriban la justificación de por qué los triángulos son semejantes. Pueden identificar que las medidas de los lados correspondientes son proporcionales o que un ángulo igual está entre dos lados proporcionales.

3

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban en sus cuadernos las razones de por qué los triángulos que trazaron son homotéticos y que señalen el centro de homotecia.

5

Propósito del programa 31. Mostrar la relación que hay entre figuras homotéticas y figuras semejantes.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Determinar los resultados de una homotecia al comparar distintos valores para la razón de homotecia.

Propósito del Interactivo. Explorar el comportamiento de una homotecia ante distintos valores de la homotecia.

Respuestas.

a) 2

b) $\frac{1}{2}$

>>> A lo que llegamos

Especialmente semejantes

Para trazar un triángulo semejante a un triángulo dado, se pueden trazar rectas paralelas a los lados del triángulo.

Los polígonos semejantes con lados correspondientes paralelos se llaman polígonos homotéticos.

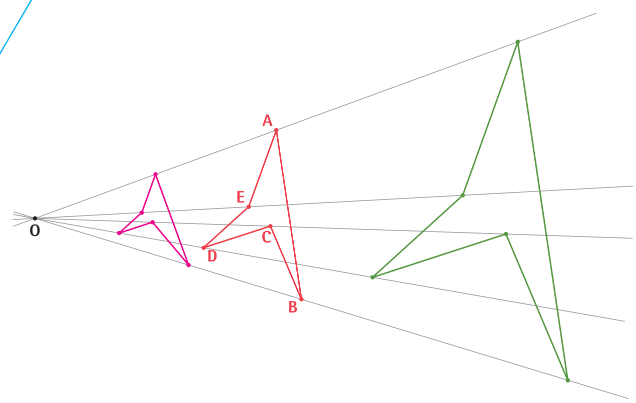
El punto en el que se intersecan las rectas determinadas por los vértices correspondientes de polígonos homotéticos se llama centro de homotecia.

SESIÓN 2

DEPENDE DE LA RAZÓN

>>> Consideremos lo siguiente

En el siguiente esquema se trazaron dos pentágonos homotéticos al pentágono **ABCDE**, con **O** como centro de homotecia. Determinen las razones de semejanza que permiten obtener cada uno de los pentágonos trazados a partir del pentágono **ABCDE**.



a) ¿Cuál es la razón de semejanza del pentágono verde respecto del pentágono **ABCDE**?

____

b) ¿Cuál es la razón de semejanza del pentágono rosa respecto del pentágono **ABCDE**?

____

52

c) Si se traza un pentágono homotético a **ABCDE**, con centro de homotecia **O** y con razón de semejanza $\frac{1}{3}$ respecto a **ABCDE**, ¿las medidas de los lados del pentágono homotético resultante serán mayores, menores o iguales a las del pentágono **ABCDE**?

____

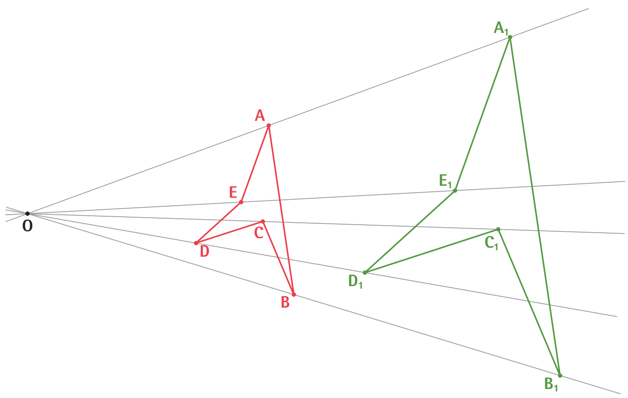
d) Si se traza un pentágono homotético a **ABCDE**, con centro de homotecia **O** y con razón de semejanza $\frac{3}{2}$ respecto a **ABCDE**, ¿las medidas de los lados del pentágono homotético resultante serán mayores, menores o iguales a las del pentágono **ABCDE**?

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En el esquema siguiente se trazaron dos pentágonos homotéticos, con **O** como centro de homotecia. Mide lo que se pide y contesta.



a) ¿Cuánto mide el segmento **OA**? _______________

b) ¿Cuánto mide el segmento $\mathbf{OA_1}$? _______________

c) ¿Por qué número se tiene que multiplicar **OA** para obtener $\mathbf{OA_1}$? _______________

d) ¿Cuánto vale la razón $\frac{OA_1}{OA}$? _______________

53

Respuestas.

c) Las medidas serán menores.

d) Las medidas serán mayores.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban en sus cuadernos una justificación de por qué los polígonos son homotéticos. Los alumnos deben identificar que las distancias de los vértices de uno de los polígonos al punto **O**, son proporcionales a las distancias de los vértices correspondientes del otro polígono, también podrían justificar que los polígonos son semejantes y que los lados correspondientes son paralelos.

2

Respuestas.

a) 6 cm

b) 12 cm

c) 2

d) 2

Respuestas.

e) Sí. Se espera que los alumnos identifiquen que, como los polígonos son homotéticos, entonces son semejantes y sus lados correspondientes son paralelos. Por el teorema de Tales se puede determinar que todas las razones son iguales a 2.

f) 2.

Propósito de la actividad. Los alumnos deben justificar que los polígonos son semejantes y que los lados correspondientes son paralelos con argumentos similares a los que utilizaron en la actividad II de la sesión pasada. La razón de semejanza del pentágono **A′B′C′D′E′** con respecto al pentágono **ABCDE** es $\frac{1}{2}$.

e) ¿Es posible determinar las razones $\frac{OB_1}{OB}$, $\frac{OC_1}{OC}$, $\frac{OD_1}{OD}$, $\frac{OE_1}{OE}$ sin medir los segmentos? __________ ¿por qué? ______________________________

____

f) ¿Cuál es la razón de semejanza que permite obtener el pentágono $A_1B_1C_1D_1E_1$ a partir del pentágono **ABCDE**? ____________________

II. Marca el punto medio de los segmentos **OA**, **OB**, **OC**, **OD** y **OE**. Llama a los puntos medios **A'**, **B'**, **C'**, **D'** y **E'**, respectivamente.

a) ¿El pentágono **A'B'C'D'E'** es homotético con respecto al pentágono **ABCDE**? __________

Justifica tu respuesta. ______________________________

____

____

b) Si los pentágonos son homotéticos, ¿cuál es la razón de semejanza de **A'B'C'D'E'** respecto a **ABCDE**? ______________________

Comparen sus respuestas.

Dado un polígono **P**, un centro de homotecia y una razón de semejanza respecto a **P**, contesten:

a) ¿Para qué valores de la razón de semejanza las medidas de los lados del polígono homotético serán *menores* que las medidas de los lados del polígono **P**?

b) ¿Para qué valores de la razón de semejanza las medidas de los lados del homotético serán *mayores* que las medidas de los lados de **P**?

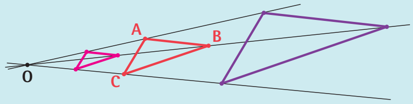
>>> A lo que llegamos

Dados dos polígonos homotéticos, a la razón de semejanza que permite obtener uno de los polígonos a partir del otro polígono se le llama **razón de homotecia.**

Dados un polígono **P** y una razón de homotecia respecto a **P** (denotada con ***r***), se cumple lo siguiente.

1. Si r es mayor que 0 pero menor que 1, las medidas de los lados del polígono homotético resultante son menores que las medidas de los lados del polígono **P**.
2. Si r es mayor que 1, las medidas de los lados del polígono homotético resultante son menores que las medidas de los lados del polígono **P**.

Por ejemplo, dado el triángulo ABC y una razón de homotecia *r* respecto a él, se puede obtener triángulos homotéticos de lados mayores o menores, dependiendo del valor de la razón de homotecia.



En la figura, para obtener el triángulo morado, se utilizó una razón mayor que 1 y para obtener el rosa se utilizó una razón menor que 1, y mayor que cero.

a) Comenten: ¿cómo son entre sí los polígonos si la razón de homotecia es igual a 1?

b) Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen sus resultados.

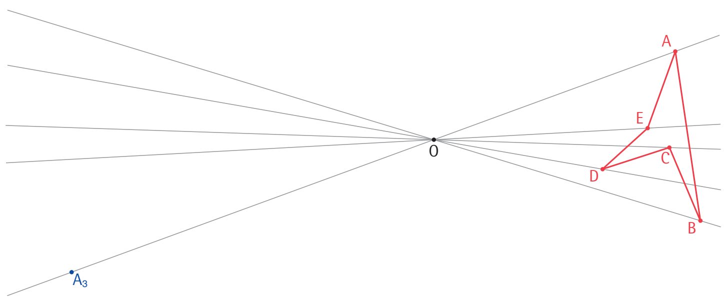
Respuesta.

a) Cuando la razón de homotecia es igual a 1, el polígono homotético es igual al polígono original.

III. En la actividad anterior estudiaste el efecto que producen las razones de homotecia positivas. También hay razones de homotecia que son *negativas*.

Por ejemplo, al aplicar una razón de homotecia negativa al pentágono **ABCDE**, el vértice correspondiente al vértice **A** es A_3.

Propósito de la actividad. Determinar el resultado de una homotecia cuando la razón de homotecia es negativa.



a) ¿Cuánto mide **OA**? ______________ ¿Por qué número tienes que multiplicar a **OA** para obtener OA_3? ______________

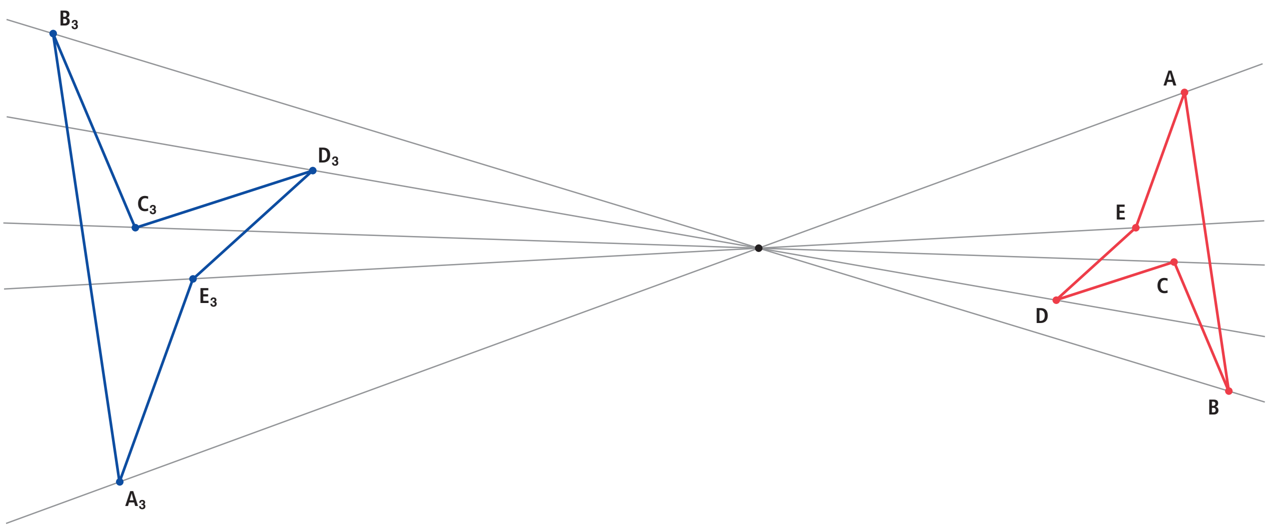
Respuesta.

a) 6 cm. Para obtener la medida de OA_3 se multiplica **OA** por 1.5

b) Sobre el esquema anterior, localiza los puntos B_3, C_3, D_3 y E_3 correspondientes a los vértices **B**, **C**, **D** y **E**. Une los puntos para obtener el polígono $A_3B_3C_3D_3E_3$.

c) ¿Cuál es el número por el que se multiplican las distancias **OA**, **OB**, **OC**, **OD** y **OE** para obtener las distancias OA_3, OB_3, OC_3, OD_3 y OE_3? ______________

55



Sugerencia didáctica. Para que respondan el inciso d), pregunte a los alumnos si los polígonos son semejantes y si los lados correspondientes son paralelos. Usted puede pedirles que midan los lados y los ángulos de cada polígono.

Respuesta. El punto O_1 es el centro de homotecia del triángulo rosa y el triángulo morado. El punto O_2 no es centro de homotecia.

Integrar al portafolio. Pida a los alumnos una copia de su respuesta a esta pregunta. Pídales que expliquen, en cada caso, por qué los polígonos sí son o no son homotéticos.

Respuesta. Los de la figura 2.

d) Justifica por qué el pentágono $A_3B_3C_3D_3E_3$ es homotético al pentágono **ABCDE**.

____

____

____

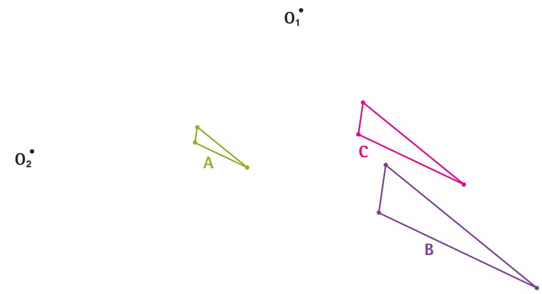
Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cuál es la diferencia entre el pentágono $A_1B_1C_1D_1E_1$ de la actividad **I** y el pentágono $A_3B_3C_3D_3E_3$?

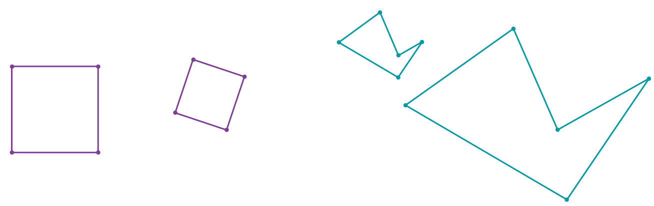
b) Describan el efecto de aplicar a un polígono una homotecia con razón de homotecia negativa.

>>> Lo que aprendimos

1. Los triángulos **A** y **B** son homotéticos al triángulo **C**, ¿cuál de los dos puntos, O_1, O_2, es centro de homotecia y para qué pareja de triángulos? ________

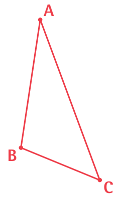


2. Señala en cuál de las figuras los polígonos son homotéticos.



☐ **Figura 1** ☐ **Figura 2**

3. Traza un segmento de recta en el triángulo **ABC** de manera que se forme un triángulo semejante a éste.



Comenta:

a) ¿Cómo trazaste el segmento?

b) ¿Cómo justificarías que los triángulos son semejantes?

c) ¿Cuáles son los pares de lados correspondientes?

Para conocer más acerca de las aplicaciones de las propiedades de la homotecia en la solución de problemas, puedes ver el programa de televisión *Problemas de homotecia*.

>>> Para saber más

Sobre homotecia, consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Peña, José Antonio de la. *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/geometria/homoteciaysemejanzas/homoteciasysemejanzas.htm
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].

Posibles procedimientos. Los alumnos deben trazar una recta que corte al triángulo y que sea paralela a alguno de sus lados.

Propósito del programa 32. Mostrar las posiciones de figuras homotéticas según la razón de homotecia y trabajar algunas aplicaciones.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Reconocer que el movimiento con aceleración constante se describe gráficamente con una parábola.

Propósito de la actividad. Que los alumnos descubran que la gráfica de un movimiento acelerado debe ser un curva y no una recta o segmentos de recta.

Propósito del Interactivo. Presentar problemas de la vida real, modelándolos algebraicamente y analizándolos aprovechando las gráficas de las relaciones funcionales obtenidas.

Respuesta.

- La **gráfica a)** es lineal y además pasa por el origen, así que representa una relación de proporcionalidad directa. Por ello no puede ser la gráfica correcta, ya que, según los datos de la tabla, no es cierto que al duplicar el tiempo se duplica la distancia, por ejemplo. Esta gráfica representa un movimiento a velocidad constante (no aceleración constante).
- En la **gráfica b)** cada tramo recto representa un movimiento a velocidad constante, y la canica no se mueve así sino que va acelerando (la velocidad crece a cada segundo). Esto se puede observar en la tabla: en cierto segundo la canica recorre una mayor distancia respecto a la que recorrió en el segundo anterior, es decir, la velocidad aumenta.
- La **gráfica c)** es la correcta. En ella se observa una parábola, que es la representación gráfica de una relación cuadrática, como se verá más adelante.
- La **gráfica d)** no es correcta pues representa una disminución de la distancia recorrida conforme aumenta el tiempo, cosa que no ocurre con la canica.

SECUENCIA 18

Gráficas de relaciones funcionales

Hasta este momento has estudiado gráficas que son líneas rectas; sin embargo, no todos las gráficas son así. En esta secuencia graficarás relaciones funcionales cuyas gráficas ¡no son líneas rectas!

SESIÓN 1

PLANO INCLINADO

>>> Para empezar

Conexión con Ciencias II

Secuencia 4: ¿Cómo caen los cuerpos?

En la secuencia 4 **¿Cómo caen los cuerpos?** de tu libro de **Ciencias II**, volumen I, estudiaste la caída de una canica a lo largo de un plano inclinado. El movimiento de la canica resulta ser *uniformemente acelerado*, es decir, mantiene una aceleración constante. Ahora, trataremos de describir la posición de la canica en cualquier momento del tiempo.

>>> Consideremos lo siguiente

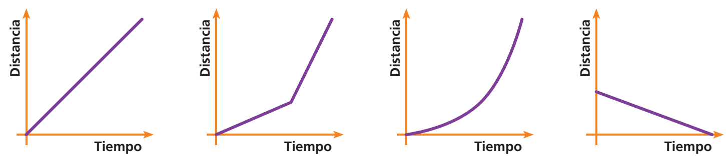
En la figura, se muestra una canica que está a punto de caer por una rampa de 400 cm de largo.

Usando fotografías, se mide la distancia que la canica ha recorrido en cada segundo transcurrido desde que se soltó. En la tabla 1 se indica el resultado de esta medición.

Tiempo	0 s	1 s	2 s	3 s	4 s	5 s
Distancia	0 cm	10 cm	40 cm	90 cm	160 cm	250 cm

Tabla 1

¿Cuál de las siguientes gráficas crees que representa mejor la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por la canica? c) .



a) b) c) d)

58

Eje
Manejo de la información.
Tema
Representación de la información.
Subtema
Gráficas.
Antecedentes
Los alumnos han estudiado distintas relaciones funcionales y en esta secuencia se pretende que sigan desarrollando sus conocimientos sobre la idea de relación funcional a través de la observación de la dependencia entre una magnitud y otra.

Propósitos de la secuencia
Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar algunos fenómenos.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Plano inclinado** Reconocer que el movimiento con aceleración constante se describe gráficamente con una parábola.	Interactivo Programa 33
2	**La ley de Boyle** Recordar que la hipérbola es la gráfica de una relación de proporcionalidad inversa y que dicha gráfica describe la ley de Boyle.	Programa 34
3	**La caja** Encontrar el mínimo de una relación mediante el método gráfico y compararlo con el algebraico.	

Comparen sus respuestas y comenten.

¿Cuáles de las cuatro gráficas representan relaciones lineales?

¿Cuál de las cuatro representa una relación lineal por pedazos?

Recuerden que:
Una relación es lineal si su gráfica es una línea recta. Y es lineal por pedazos si su gráfica es unión de segmentos de recta.

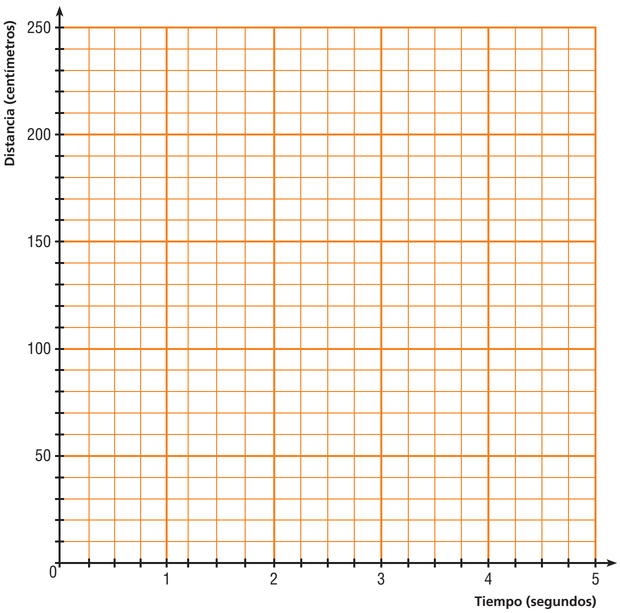
Respuestas. Las gráficas a) y d) representan relaciones lineales, y la gráfica b) representa una relación lineal por pedazos.

Sugerencia didáctica. Lo más probable es que para elegir una de las gráficas los alumnos se hayan valido principalmente de la intuición, pero para convencer a los demás de que la que eligieron es la correcta, necesitarán más argumentos.

Aunque no hayan acertado eligiendo la gráfica, invite a los alumnos a expresar sus ideas.

>>> Manos a la obra

I. En el siguiente plano cartesiano localiza los puntos asociados a la tabla 1. Después dibuja la gráfica de la relación como creas que debería de verse (ayúdate de la gráfica que elegiste en el apartado *Consideremos lo siguiente*). Recuerda que la gráfica debe pasar por los puntos que ya localizaste.



II. Observa la gráfica y contesta:

a) Aproximadamente, ¿qué distancia lleva recorrida la canica cuando han transcurrido 2.5 segundos? ____________

b) ¿Y cuando han transcurrido 3.5 segundos? ____________

59

Respuestas.

a) Lleva recorridos 62.5 cm exactamente, sin embargo, quizá los alumnos no obtengan esa respuesta porque dependerá de cómo trazaron la gráfica. Lo importante es que respondan de acuerdo a lo que interpretan en la gráfica, así que serían aceptables respuestas entre 60 y 70 cm.

b) Ha recorrido exactamente 122.5 cm. Acepte respuestas entre 115 y 125 cm.

Posibles errores. Algunos alumnos quizá intenten hacer una aproximación de la distancia recorrida por la canica promediando los valores que conocen. Por ejemplo, para saber qué distancia ha recorrido la canica cuando han transcurrido 2.5 segundos, promedian la distancia que recorrió a los 2 y 3 segundos, o sea, $\frac{40 + 90}{2} = 65$

Sin embargo, este procedimiento sería incorrecto porque parte de la suposición de que la canica tiene una aceleración constante y por lo tanto, que su gráfica es lineal, lo que daría lugar a que el pedazo de gráfica que pasa por los puntos (2,40) y (3,90) fuera una línea recta, y que el punto (2.5, 65) estuviera alineado con estos dos puntos.

Si los alumnos cometen este u otro error, permítales seguir y lean el apartado de *A lo que llegamos*. Con esa información, pídales que revisen su gráfica y que la corrijan si fuera necesario (por ejemplo, si unieron los puntos con rectas); y luego, que vuelvan a contestar estas preguntas.

Respuesta. Del texto se infiere que un cuerpo en aceleración constante tiene como gráfica una parábola y que las parábolas están asociadas a una relación cuadrática.

Sugerencia didáctica. Algunos alumnos podrían confundirse pensando que el caso de la caída de una canica en un plano inclinado no es una parábola porque al graficar la situación sólo aparece la mitad de la parábola. Explíqueles que cuando lo que aparece en la gráfica es solamente un pedazo de la parábola, se puede afirmar que al menos en ese pedazo la relación es cuadrática. En el caso de la canica, no hay más pedazos (sólo la parte positiva), por lo que se puede decir que sí es cuadrática en todos los valores en los que está definida la relación.

Propósito del programa 33. Estudiar las gráficas asociadas a situaciones modeladas por una relación cuadrática.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Respuesta. La expresión correcta es la del inciso c).

Sugerencia didáctica. Si a los alumnos les es difícil elegir la expresión correcta, pídales que escriban algo como lo siguiente:

Para $x = 1$, y debe dar 10

Para $x = 2$, y debe dar 40

Para $x = 3$, y debe dar 90

Y luego, que prueben con las cuatro expresiones para ver con cuál se obtienen esos valores.

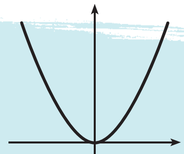
Propósito de la pregunta. La intención es que los alumnos comparen los resultados que obtuvieron con el método gráfico y el algebraico.

Puede ser útil comentar en qué casos conviene más usar uno u otro, por ejemplo, cuando se quiere obtener un dato exacto es mejor emplear el algebraico, pero cuando lo que se necesita es una aproximación u observar la tendencia, conviene el gráfico.

SECUENCIA 18

Comparen respuestas. Después lean la información del apartado *A lo que llegamos* y, por último, comenten: de acuerdo con lo dicho en el texto, la relación entre tiempo y distancia de un cuerpo en aceleración constante, ¿es cuadrática? Justifiquen su respuesta.

>>> A lo que llegamos



La gráfica asociada a la relación entre tiempo y distancia de un cuerpo con aceleración constante (por ejemplo, la caída de una canica en un plano inclinado) es una curva conocida como parábola. En la siguiente gráfica se ha dibujado una parábola. La gráfica que corresponde al ejemplo de la canica es la parte derecha de una parábola.

Por otro lado, cuando la gráfica es una parábola, la relación es cuadrática. Es decir, es una relación como $y = 3x^2 + 5x - 8$, $y = 3x^2 + 5x$, $y = 3x^2 - 8$, $y = 3x^2$, etc., donde la x aparece elevada al cuadrado y donde aparecen además algunos términos de grado uno y otros de grado cero.

Para conocer más sobre las gráficas de relaciones cuadráticas, pueden ver el programa *Gráficas y movimiento acelerado*.

III. Denotamos con la letra x el tiempo que ha transcurrido desde que se dejó caer la canica y con la letra y la distancia recorrida. De las siguientes expresiones, ¿cuál crees que sirve para calcular y a partir de x? Márcala.

a) $y = 10x$ b) $y = 11x^2 - x$ c) $y = 10x^2$ d) $y = 30x - 20$

Usando la expresión que elegiste, calcula los valores de y para los valores de x dados.

Si $x = 2$, entonces $y =$ 40 Si $x = 2.5$, entonces $y =$ 62.5

Si $x = 3$, entonces $y =$ 90 Si $x = 3.5$, entonces $y =$ 122.5

Comparen sus repuestas y comenten. ¿Estos valores coinciden con los que aproximaron en la actividad anterior? ¿Qué tan buena fue la aproximación?

>>> Lo que aprendimos

Al tirar una canica desde abajo de un plano inclinado, ésta no logra subir hasta el final del plano y baja de regreso.

60

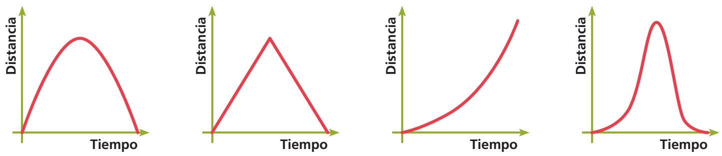
Propósito de la actividad. La situación que se presenta también tiene que ver con una canica en un plano inclinado, pero ahora no se suelta desde arriba sino se empuja desde abajo.

Además, no se presentan datos en una tabla, así que los estudiantes deben imaginar cómo sería el movimiento de la canica y cómo se vería al graficarlo.

Respuesta. Los alumnos ya saben que la gráfica asociada a este fenómeno es una parábola, así que quizá elijan fácilmente a la gráfica a), pero conviene que analicen porqué las otras opciones no son correctas.

- La **gráfica a)** es de aceleración constante, y está "al revés" que la que representa a la caída de la canica desde el punto más alto del plano inclinado porque ahora acelera pero de forma negativa, es decir, frena. Como la canica sube (frenando) y luego baja (acelerando), la parábola está completa.
- La **gráfica b)** no puede ser correcta pues implicaría que la canica se mueve a velocidad constante hacia arriba y después baja a velocidad constante.
- La **gráfica c)** es incorrecta pues en algún momento la canica debe disminuir la distancia que recorre por segundo, y en esta gráfica se representa un movimiento que sigue acelerando.
- La **gráfica d)** se puede descartar pues muestra que la canica primero sube despacio y luego acelera, lo cual no ocurre en la situación planteada.

En cada segundo, se midió la distancia a la que se encontraba la canica del lugar de lanzamiento y con los datos se obtuvo una de las siguientes gráficas. Señálenla.



a) b) c) d)

Comparen sus respuestas y comenten:

a) Cuando la canica alcanzó el punto más alto, ¿cuál creen que era su velocidad?

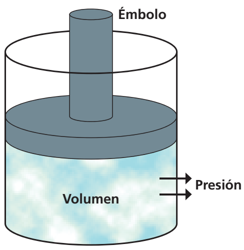
b) ¿En qué momento la canica va acelerando?, ¿En qué momento va frenando? ¿Cuándo lleva velocidad constante?

LA LEY DE BOYLE

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Un gas encerrado dentro de un recipiente ejerce una fuerza sobre las paredes. A la fuerza ejercida por el gas en cada m² de superficie se le llama *presión*. La presión se expresa normalmente en pascales (Pa).



La ley de Boyle afirma que (a temperatura fija) la presión ejercida por un gas es inversamente proporcional al volumen del gas.

Por ejemplo, en la figura 1, cuando se disminuye el volumen del gas a la **mitad** (empujando el émbolo) la presión que ejerce el gas sobre las paredes se **duplica**. Por ello se dice que, en estas condiciones, el volumen y la presión son cantidades inversamentente proporcionales.

Recuerda que:
Una relación es de proporcionalidad inversa si al aumentar al doble, al triple, etc. una de las cantidades, la otra disminuye a la mitad, a la tercera parte, etcétera.

61

Respuestas.

a) La velocidad es cero, pues a medida que avanza va frenando hasta llegar al punto más alto del plano inclinado, se detiene ahí un instante y después su velocidad empieza a crecer mientras baja.

b) En la bajada va acelerando, en la subida va frenando. En ningún momento tiene una velocidad constante.

Propósito de la sesión. Recordar que la hipérbola es la gráfica de una relación de proporcionalidad inversa y que dicha gráfica describe la ley de Boyle.

Recuerde que. En el libro Matemáticas I, secuencia 37 los alumnos estudiaron relaciones de proporcionalidad inversa, que se caracterizan por que:

- cuando una cantidad aumenta el doble, la otra disminuye a la mitad, si aumenta el triple la otra disminuye a la tercera parte, etc.;
- si se representa en una gráfica se obtiene una curva llamada hipérbola;
- si se representan los datos en una tabla el producto entre los elementos de los dos conjuntos se mantiene constante;
- su expresión algebraica es $y = \frac{k}{x}$.

Respuestas.

a) Vale 50 Pa porque si el volumen aumentó al doble (400 m^3), la presión será la mitad.

b) 200 Pa porque al reducir el volumen a la mitad (100 m^3), la presión aumenta al doble.

c) La **gráfica a)** no es correcta porque representa una relación lineal con pendiente negativa.

La **gráfica b)** es correcta porque es una hipérbola.

La **gráfica c)** también se ve como una hipérbola pero no es correcta porque no puede haber valores iguales a cero (ni la presión ni el volumen pueden valer cero).

La **gráfica d)** tampoco es correcta porque no representa una situación en la que el al aumentar al doble una de las magnitudes la otra disminuya a la mitad.

Posibles dificultades. Si a los alumnos se les hace complicado elegir la gráfica correcta, sugiérales que hagan en su cuaderno una gráfica con los puntos que ya conocen (100, 200), (200, 100) y (400, 50). Deben unirlos con una curva, no con segmentos de recta.

Observarán que la gráfica se parece a las de los incisos b) y c). El b) se descarta porque en la situación de la presión del gas ninguna de las magnitudes puede ser cero.

3

SECUENCIA 18

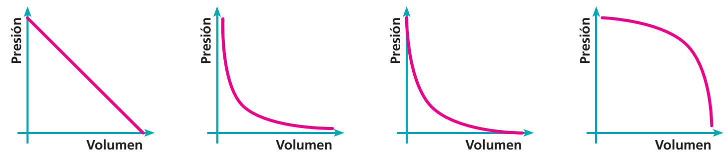
>>> Consideremos lo siguiente

Un gas ejerce una presión de 100 Pa en un recipiente que tiene un volumen de 200 m^3.

a) Al jalar el émbolo, se puede aumentar el volumen del gas a 400 m^3. Según la ley de Boyle, ¿cuánto deberá valer la presión ahora? ______________ Pa.

b) Y si se redujera el volumen a 100 m^3, ¿cuánto valdría la presión? ________ Pa.

c) ¿Cuál de las siguientes gráficas creen que describe mejor la relación entre el volumen y la presión? Márquenla.



a) b) c) d)

Comparen sus respuestas y comenten.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla .

Volumen (m^3)	50	100	200	300	400	500
Presión (Pa)	400	200	100	66.6	50	40
Volumen × Presión (m^3 × Pa)	20 000	20 000	20 000	20 000	20 000	20 000

Denoten con la letra x el volumen que ocupa el gas (medido en m^3) y con la letra y la presión (medida en Pa) ejercida por el gas. Ahora realicen lo siguiente.

a) Completen la expresión para el producto del volumen y la presión.

$xy =$ ________

b) Usen la expresión anterior para escribir otra que sirva para calcular y a partir de x.

$y =$ ______________

62

Posibles dificultades. En esta columna puede haber un error de redondeo debido a lo siguiente. Los alumnos pueden encontrar la respuesta dividiendo 20 000 ÷ 300 o bien, fijándose en que cuando el volumen es 100 m^3, la presión es 200 Pa; si aumenta tres veces el volumen (300 m^3), la presión debe disminuir a una tercera parte, es decir, 200 ÷ 3.

Efectuando cualquiera de las divisiones, se obtiene 66.666… que es un número con infinitos dígitos después del punto decimal. Dejar 66.6 como respuesta arrojaría 19 980 al multiplicar el volumen por la presión, y no 20 000 como en los demás casos.

Para solucionar esto, sugiera a los estudiantes que intenten con un valor más cercano al cociente, como 66.66, con el que se obtiene 19 998; y que observen que entre mejor sea la aproximación al cociente más se parecerá el resultado a 20 000. Más aun, podría explicarse que el 20 000 es el resultado exacto pues al poner todas las operaciones juntas se obtiene 300 × (200 ÷ 3) que es lo mismo que (300 ÷ 3) × 200.

Respuestas.

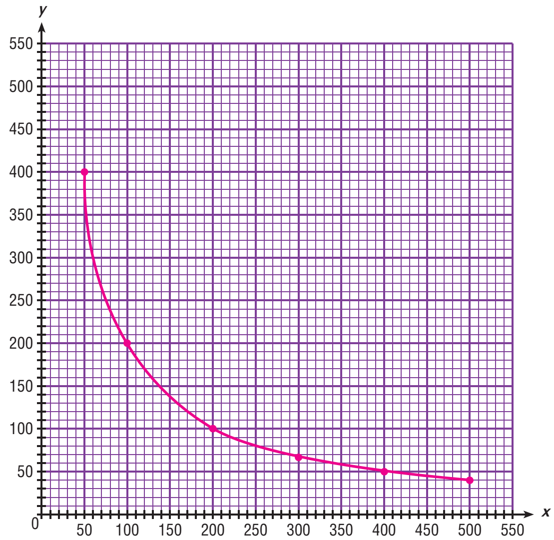
a) $xy = 20\,000$

b) $y = \dfrac{20\,000}{x}$

En una relación de proporcionalidad inversa, los productos son constantes, por eso en todas las columnas al multiplicar x (el volumen) por y (la presión) se obtiene 20 000. Este número es una constante.

Para hallar cualquier valor de y hay que dividir esta constante (k) entre x, es decir, $y = \frac{k}{x}$.

II. Localicen los datos de la tabla 1 en el siguiente plano cartesiano y hagan un bosquejo de la gráfica de la relación entre la ***x*** y la ***y***.



III. Observen la gráfica y la expresión que permite calcular ***y*** a partir de ***x***.

¿Existe algún valor de ***x*** para el cual ***y*** valga cero? ________ Si creen que existe escríbanlo, si creen que no existe expliquen por qué. ____________________

____

____

____

Comparen sus gráficas con la que eligieron en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

a) Si el volumen es muy grande, ¿qué pasa con la presión? ¿Cómo se ve esto en la gráfica?

b) Cuando se reduce mucho el volumen del gas en el recipiente hasta casi ser cero, ¿qué pasa con la presión? ¿Cómo se ve esto en la gráfica?

63

Sugerencia didáctica. Cerciórese de que los alumnos tengan en su tabla los datos correctos para que la gráfica que tracen sea una hipérbola. Aclare que no deben unir los puntos con líneas rectas.

Respuestas.

No existe. Se espera que los alumnos mediten nuevamente sobre la imposibilidad de que la presión sea igual a cero, pero ahora usando herramientas algebraicas. $y = \frac{20\,000}{x}$ no puede ser igual a cero.

Sugerencia didáctica. Vale la pena resaltar que, cuando el valor de ***x*** se hace más grande (el volumen es mayor), el valor de ***y*** se acerca cada vez más a cero (la presión es menor), pero nunca llegará a ser igual a cero. Dicho comportamiento puede verse claramente de la gráfica.

Posibles dificultades. Para algunos alumnos tanto la ***x*** como la ***y*** pueden valer cero así:

$$y = \frac{20\,000}{0}$$

$$x = \frac{20\,000}{0}$$

Aclare que las divisiones entre cero no se pueden hacer y enfatice que en el contexto del volumen y la presión del gas, ninguno de esos valores puede ser igual a cero.

Respuestas.

a) Si el volumen es muy grande, la presión es pequeña. Explique a los alumnos que si un gas se puede "acomodar" en un espacio grande no ejerce mucha presión.

b) Si se reduce mucho el volumen la presión aumenta porque el gas tiene que "caber" en un espacio menor.

Propósito del programa 34. Conocer situaciones en las que su representación gráfica corresponde a una hipérbola.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Respuestas.

a) Para completar la tabla se requiere usar argumentos de proporcionalidad inversa, o sea, que si se sabe que con un volumen de 10 dm³ hay una presión de 1 014 HPa, con un volumen de 5 dm³ (la mitad) la presión será el doble. La constante en esta situación es el producto del volumen y la presión (10 140).

b) Para encontrar la expresión, los alumnos necesitarán observar que el producto se mantiene constante, y que es igual a 10 140.

c) La gráfica es una hipérbola. Para hacerla, es importante que los alumnos elijan bien el tamaño de los ejes y sus escalas.

d) Sería de 10.03 cm³.

Posibles dificultades. Aquí se pregunta por la inversa en una relación de proporcionalidad inversa, como si en la tabla se diera el valor de una casilla de abajo y se pidiera encontrar la de arriba.

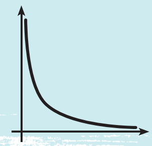
Para resolverla es mejor usar la relación $xy = 10\ 140$, sabiendo que y vale 1 010. También se puede utilizar la relación

$$y = \frac{10\ 140}{x}$$

SECUENCIA 18

>>> A lo que llegamos

La expresión asociada a una relación de proporcionalidad inversa es de la forma $y = \frac{k}{x}$, donde k es la constante de proporcionalidad inversa. La gráfica asociada a estas relaciones es una curva conocida como hipérbola. Esta hipérbola tiene la propiedad de no intersecar a ninguno de los ejes, como se muestra en la figura.



Para conocer más ejemplos de relaciones de proporcionalidad inversa y sus gráficas, pueden ver el programa *Gráficas y Ley de Boyle*.

>>> Lo que aprendimos

Un tanque de 10 decímetros cúbicos (10 dm³) tiene helio (un gas bastante común) encerrado a una presión de 1 014 hectopascales (1 014 HPa). La misma cantidad de gas se desea colocar en tanques de otro volumen. Usen la ley de Boyle para contestar lo siguiente:

a) Calculen cuál será la presión a la que estará encerrado el helio si se colocara en un tanque de cada uno de los volúmenes en la tabla.

Volúmen del Tanque (dm³)	5	10	15	20	25
Presión que ejerce el helio sobre las paredes del tanque (HPa)	2 028	1 014	676	507	450.6

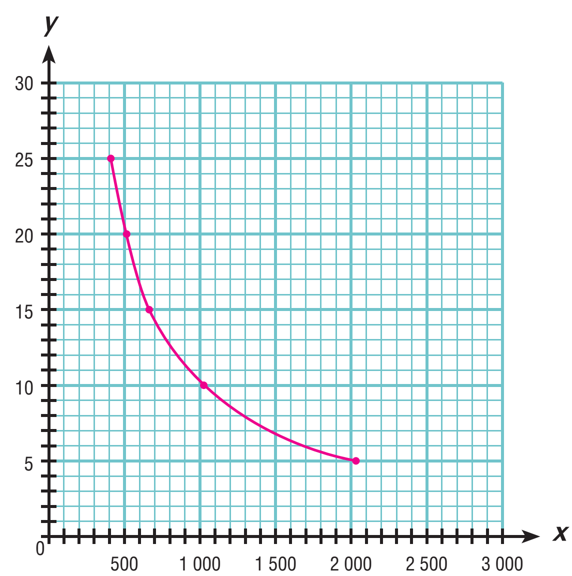
b) Escriban una expresión que relacione el volumen y del tanque (en dm³) con la presión x en la que se encuentra encerrado el helio (en HPa).

$y = \frac{10\ 140}{x}$

c) En su cuaderno hagan la gráfica de esta relación.

d) Si se deseara guardar esa cantidad de helio a una presión de 1 010 HPa, ¿qué volumen tendría que tener el tanque? ______

64



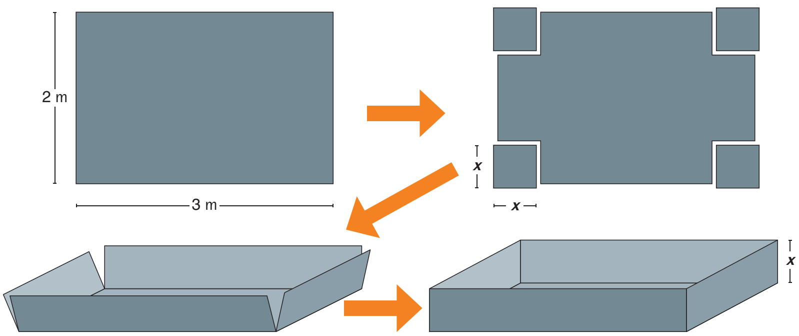
Propósito de la sesión. Encontrar el mínimo de una relación mediante el método gráfico y compararlo con el algebraico.

LA CAJA

SESIÓN 3

>>> Para empezar

En una empresa fabrican cajas de metal. Las cajas se construyen a partir de una lámina rectangular de 3 m de largo por 2 m de ancho, a la que le cortan cuatro cuadrados de las esquinas. Después, se dobla la lámina restante para formar una caja rectangular y, por último, se sueldan las orillas.



Los fabricantes no saben de qué tamaño cortar los cuadrados para que el volumen sea lo más grande posible. Por ello en la figura se ha marcado con la letra x la medida en metros de los lados de los cuadrados que se cortan.

En esta sesión encontraremos el valor de x para *maximizar el volumen* de la caja, es decir, para que su volumen sea lo más grande posible.

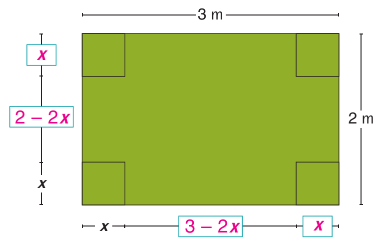
Propósito de la actividad. En esta secuencia el problema se tendrá que ir resolviendo por partes hasta obtener la respuesta.

El alumno utilizará e integrará diferentes conceptos que ha aprendido a lo largo de la secundaria: relación, expresión algebraica y gráfica asociada a un fenómeno.

Además, para fomentar el intercambio de ideas, todas las actividades están diseñadas en parejas.

>>> Manos a la obra

I. Anoten en los recuadros de la siguiente figura las expresiones algebraicas que representan las medidas faltantes.



a) Una vez cortados los cuadrados y armada la caja, la altura de la caja será x. ¿Cuáles serán las expresiones que representen a las otras dos medidas de la caja?

Ancho = $2 - 2x$

Largo = $3 - 2x$

b) Denoten con la letra y el volumen de la caja (en metros cúbicos). Escriban una expresión que sirva para obtener y a partir de x.

y = ________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus expresiones algebraicas.

65

Sugerencia didáctica. Para encontrar las medidas faltantes lo más fácil será llenar primero los valores que corresponden a x, o sea, la medida del lado del cuadrado que se recorta en cada esquina. Las medidas del largo y ancho de la lámina se obtienen restando lo que mide el lado del cuadrado, o sea, x. Por ejemplo, un lado de la lámina mide 2 m y se le cortaron dos cuadrados de lado x, por lo que debe restar $2 - 2x$.

Si los alumnos tienen dificultades para hallar estas medidas, ayúdelos con la medida del lado del cuadrado.

Respuesta. Para escribir la expresión los alumnos deben recordar que el volumen de un prisma rectangular se obtiene multiplicando la medida del largo de la base, por el ancho y por la altura. De modo algebraico, consiste en encontrar una expresión que denote el producto de las tres expresiones $2 - 2x$, $3 - 2x$ y x.

Sugerencia didáctica. Escriba en el pizarrón las distintas expresiones que los alumnos obtengan y compárenlas.

Los alumnos pueden escribir expresiones en las que no realicen operaciones algebraicas, como $x(2 - 2x)(3 - 2x)$. Algunos estudiantes podrían realizar más operaciones algebraicas como la distribución, con la intención de hacer algo más que un producto indicado. En este momento de la sesión no es necesario que lo hagan, con dejar los paréntesis es suficiente porque más adelante tendrán la oportunidad de desarrollar el producto.

Respuestas.

a) Si x vale cero y también vale cero.

b) Si x es igual a 1 y se corta un cuadrado con esas medidas en cada esquina, ya no queda nada para construir la caja por el lado del ancho de la lámina (que mide 2 m).

c) Si no se cortan los cuadrados de las esquinas, o sea, si los lados de esos cuadrados valen cero, no hay altura para la caja y por lo tanto, no se forma la caja.

Propósito de la actividad. La gráfica debe quedar más o menos como se muestra en la figura: una curva que pase por todos los puntos en rojo y es de esperarse que los alumnos intuyan que entre 0.3 y 0.4 está la cúspide de la curva.

Posibles respuestas.

b) En el grupo seguramente habrá distintas respuestas, pues decidir qué tan alto dibujar la curva no es evidente y variará de estudiante a estudiante. Aunque no se espera un resultado preciso, sino que observen cuál es el punto más alto de la curva, las respuestas deben ser mayores que 1.008

c) Algún valor entre 0.3 y 0.5, dependerá de cómo hayan dibujado la curva.

d) Para contestar esta pregunta los alumnos deben utilizar la expresión que encontraron antes. El resultado que obtengan les ayudará a mejorar el dibujo de la curva por si les había quedado muy alta o muy baja, y además es una mejor aproximación al máximo de y.

II. Con la expresión que obtuvieron llenen la siguiente tabla.

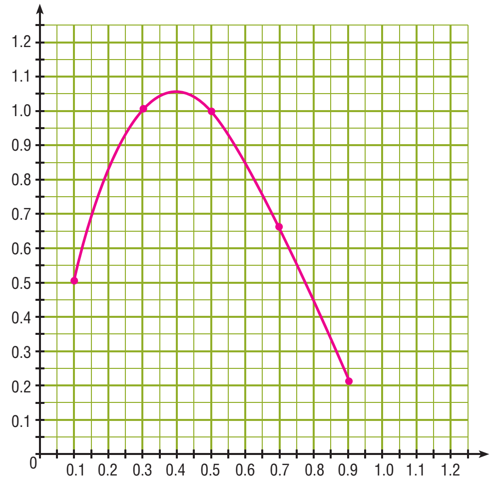
x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
y	0.504	1.008	1	0.672	0.216

a) Según la expresión que obtuvieron, ¿cuánto vale y si x vale 0? ______

b) Si x vale 1, ¿cuánto vale y? ______

c) ¿Qué significado tiene esto en el problema? ______

III. Localicen los datos de la tabla anterior en el siguiente plano cartesiano. Incluyan los valores cuando x es igual que 0 y cuando es igual que 1.



a) Unan los puntos con una curva para completar un bosquejo de la gráfica.

b) Según el bosquejo que hicieron, ¿aproximadamente cuál es el valor de y más grande posible? y = ______

c) Aproximadamente, ¿cuál es el valor de x que corresponde a ese valor de y?

x = ______

d) Usando la expresión, calcula cuál es el volumen para ese valor de x.

y = ______

66

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Es este fenómeno lineal por pedazos?

Recuerden que:

Un fenómeno es lineal por pedazos si su gráfica asociada está formada por segmentos de recta.

>>> A lo que llegamos

La expresión $y = x\ (2 - 2x)\ (3 - 2x)$ es conocida como una cúbica, pues al desarrollar los productos se obtiene la expresión $y = 4x^3 - 10x^2 + 6x$ que contiene un término al cubo: x^3 (equis al cubo). La gráfica asociada a una relación cúbica se llama también gráfica de la cúbica.

IV. Desarrollen los productos de $y = x\ (2 - 2x)\ (3 - 2x)$ y verifiquen que les quede $y = 4x^3 - 10x^2 + 6x$.

V. Usando esa expresión contesten:

¿Cuál es el valor de y si x vale 0.39? ____________

Este valor de y, ¿es más grande que el que habían encontrado en la actividad **III**?

Comparen sus respuestas y comenten, ¿cuál es el valor de x que hace el volumen de la caja lo más grande posible?

>>> Lo que aprendimos

Se desea construir una caja de metal, a partir de una lámina cuadrada de 2 m de lado. Para ello se recortan cuatro cuadrados de lado x, uno de cada esquina.

a) De las siguientes expresiones, ¿cuál permite calcular el volumen y a partir del valor de x? Márquenla.

i) $y = 4x^3 - 10x^2 + 6x$ ii) $y = 4x^3 - 8x^2 + 4x$ iii) $y = 4x^2 - 8x + 4$ iv) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$

b) Observen que el valor de x no puede ser negativo, ni mayor que 1. Después, hagan en su cuaderno la gráfica de la relación anterior.

c) ¿Cuál es el valor de x que maximiza el volumen y? ____________

Comparen sus respuestas.

>>> Para saber más

Sobre los cuerpos en aceleración constante, consulten:
¿Dónde están los alpinistas? en su libro de Ciencias II, volumen I. México: SEP/ILCE, 2007.

Sobre la ley de Boyle, consulten:
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/andared02/leyes_gases/ley_boyle.html
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].

67

Posibles errores. Los alumnos quizá piensen que al crear bosquejos los puntos se pueden unir con segmentos de recta. Este es un buen momento para aclarar esta cuestión: el unir con segmentos de recta implica que el fenómeno es lineal por pedazos. Pero como se vio en las secuencia 29 de Matemáticas II, estos fenómenos son muy especiales, tienen puntos claves muy claros donde cambia la pendiente (cambios de velocidad en muchos casos) y en este ejemplo los puntos calculados no tienen ninguna "clave", son valores elegidos para saber cómo es la gráfica.

Para explicar mejor la idea, usted puede indicar a los alumnos que averigüen el valor de y cuando $x = 0.4$. Después, dígales que unan los puntos de la gráfica con segmentos de recta y que comparen el resultado que interpretan en la gráfica con el obtenido al usar la expresión. El valor real (obtenido con la expresión) estará por encima del segmento que une a los puntos (0.3, 1.008) y (0.5, 1).

Respuesta.

$y = x(2 - 2x)\ (3 - 2x)$

$y = x(2 - 2x^2)\ (3 - 2x)$

$y = 6x - 4x^2 - 6x^2 + 4x^3$

$y = 4x^3 - 10x^2 + 6x$

Respuesta. Si x vale 0.39, y vale 1.056.

Haga énfasis en que los alumnos comparen este resultado con el que obtuvieron mediante la gráfica.

Respuesta. De todos los valores propuestos, los alumnos saben que el 0.39 es el que hace más grande el volumen de la caja, pero no saben si hay otro mejor. Para contestar eso, los alumnos pueden ensayar con algunos valores cercanos a 0.39 (por ejemplo: 0.38, 0.40, 0.385 o 0.395) y con ello darse cuenta de que, si bien el 0.39 no es el máximo, ciertamente es una buena aproximación y que probando con números cercanos pueden aproximarse cada vez más a la solución.

Los primeros cinco dìgitos de la x que realmente alcanza el máximo son 0.39237, sin embargo, no es importante estudiar el método para acercarse cada vez más al máximo, sino hacer cálculos de números cercanos para lograr una buena aproximación.

Propósito de la actividad. Aquí se pone en práctica todo lo visto en la sesión, los alumnos requerirán encontrar la expresión, desarrollarla algebraicamente y graficarla.

Integrar al portafolios. Esta es una buena actividad para que valore si los alumnos han comprendido lo que se estudió en esta secuencia. Pídales una copia y analice si es necesario revisar nuevamente alguno de los temas.

Respuestas.

a) Para encontrar el volumen hay que multiplicar la medida del lado del cuadrado por sí misma, y luego por la altura, es decir, $2 - 2x$ por $2 - 2x$ por x. Quedaría:

$y = x\ (2 - 2x)\ (2 - 2x)$

Y al desarrollarse:

$y = 2x - 2x^2\ (2 - 2x)$

$y = 4x - 4x^2 - 4x^2 + 4x^3$

$y = 4x^3 - 8x^2 + 4x$

b) Es importante que comenten por qué el valor de x no puede ser negativo ni mayor a 1. No puede ser negativo porque es la medida del lado de un cuadrado, y ese cuadrado no puede medir más de 1 m porque la lámina mide 2 m por lado.
Por otro lado, para hacer la gráfica recomiende a los alumnos que en el eje de las x grafiquen el intervalo de 0 a 1. La elección del intervalo en y pueden hacerla cuando hayan evaluado algunos de los valores de x.

c) El valor exacto es $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$

Entonces, valores como 0.3 o 0.33 son buenas aproximaciones. Se espera que lleguen a este número a través de la gráfica.

Propósito de la sesión. Analizar el comportamiento de gráficas de funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + b$, cuando cambia el valor de b y cuando cambia el valor de a.

Los alumnos ya han hecho este tipo de trabajo en la secuencia 23 de **Matemáticas II**, volumen II, para expresiones de la forma $y = ax + b$. En particular aprendieron que, para una familia de rectas que tienen la misma pendiente (a constante) y distinta ordenada al origen (b varía) entonces todas las rectas son paralelas. También aprendieron que si una familia de rectas tiene la misma ordenada al origen (b constante) y distinta pendiente (a varía) entonces las rectas concurren en un punto.

Propósitos de la sesión en el aula de medios.

1. Estudiar casos de ecuaciones de segundo grado, al introducir los coeficientes y variarlos.
2. Analizar la información del discriminante.

Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 1.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que indiquen la ordenada al origen de estas rectas. Si tienen dificultades recuérdeles que es el valor de la segunda coordenada en el punto en el cual las rectas cortan al eje y. En este caso las rectas intersecan al eje y en el punto (0,2) y la ordenada al origen de las tres rectas es 2.

SECUENCIA 19

Algunas características de gráficas no lineales

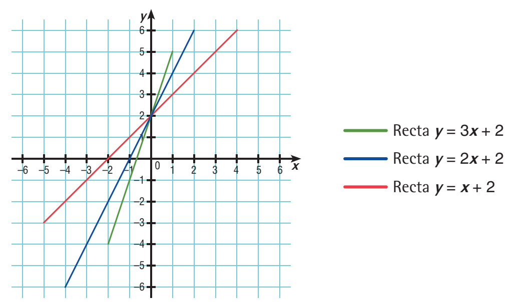
¿Recuerdas que la expresión $y = mx + b$ es la ecuación de una recta? Dependiendo del valor de m y de b, los puntos sobre la recta cambian de posición. Lo mismo sucede con las gráficas que corresponden a expresiones no lineales, hay valores de la expresión que hacen que la forma y posición de los puntos sobre la gráfica cambien.

SESIÓN 1

¡ABIERTAS Y MÁS ABIERTAS!

>>> Para empezar

En **Matemáticas I** y **II** estudiaste las características que tienen las expresiones algebraicas cuya gráfica es una línea recta. Por ejemplo, en la secuencia 23 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste que dos o más rectas que tienen la misma ordenada al origen se intersecan en un punto, precisamente en el punto cuya abscisa es cero y cuya ordenada es la ordenada al origen.



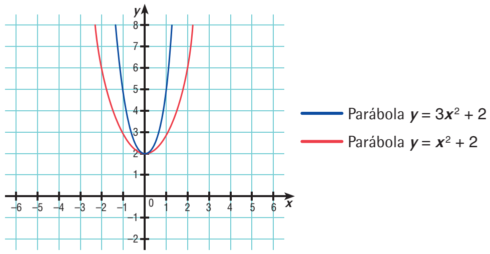
En la secuencia 18 de **Matemáticas III**, volumen II, estudiaste fenómenos cuya gráfica y expresión algebraica corresponden a relaciones no lineales. En esta secuencia continuarás explorando las gráficas de este tipo de relaciones.

68

Eje
Manejo de la información.
Tema
Representación de la información.
Subtema
Gráficas.
Antecedentes
En **Matemáticas II** los alumnos analizaron la relación entre los valores de las literales m y b de la función lineal $y = mx + b$, y la inclinación y posición de la recta que la representa. En esta secuencia los alumnos harán un análisis similar, pero ahora con funciones no lineales de la forma: $y = ax^2 + b$, $y = (x + c)^2 + d$, $y = ax^3 + b$, $y = \frac{a}{x} + b$, al comparar simultáneamente diferentes gráficas en función de las modificaciones que sufre la expresión algebraica. En la secuencia 18 identificaron algunas gráficas asociadas a este tipo de expresiones.

>>> Consideremos lo siguiente

En el siguiente plano cartesiano se encuentra la gráfica de dos expresiones. A partir de ellas, contesta lo que a continuación se pregunta.



a) ¿En qué punto interseca al eje y la gráfica de la expresión $y = 3x^2 + 2$? ______

b) ¿En qué punto interseca al eje y la gráfica de la expresión $y = x^2 + 2$? ______

c) ¿En qué punto intersecará al eje y la gráfica de la expresión $y = 10x^2 + 2$? ______

d) ¿En qué punto intersecará al eje y la gráfica de la expresión $y = \frac{1}{2}x^2$? ______

Comparen sus respuestas y comenten:

e) ¿Se intersecan las gráficas de las cuatro expresiones anteriores? ______

f) Si se intersecan, ¿en qué punto lo hacen? ______

g) Si no se intersecan, ¿por qué que no lo hacen? ______

h) ¿Qué gráficas se intersecan? ______

>>> Manos a la obra

I. Resuelve lo que se te pide a continuación.

a) Calcula los valores de y para cada uno de los valores de x. Con estos datos, completa las tablas a continuación.

x	$y = 2x^2 - 2$
–2	6
–1	0
0	–2
1	0
2	6

x	$y = x^2 - 2$
–2	2
–1	–1
0	–2
1	–1
2	2

x	$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$
–2	0
–1	$-\frac{3}{2}$
0	–2
1	$-\frac{3}{2}$
2	0

69

Sugerencia didáctica. En la secuencia anterior los alumnos estudiaron este tipo de gráficas, pero en las actividades de esa secuencia sólo se consideran valores positivos de x y de y. Pregúnteles por qué creen que las gráficas sí corresponden a las expresiones.

Respuesta. Todas las gráficas intersecan al eje y en el punto (0,2), excepto la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$, que interseca al eje y en el punto (0,0).

Posibles dificultades. Algunos alumnos responderán que las tres primeras gráficas intersecan al eje y en el "punto 2". Comente con todo el grupo que ese es el valor de la ordenada al origen, pero que un punto tiene dos coordenadas y se expresa de la forma (x,y). El valor de x es la abcisa y el valor de y es la ordenada.

Propósito del Interactivo. Que el alumno reconozca el aspecto gráfico de diversas relaciones funcionales lineales y no lineales.

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen la gráfica que corresponde a una expresión de la forma $y = ax^2 + b$ y que identifiquen que el número b corresponde a la ordenada al origen de la curva.

Posibles dificultades. Al evaluar algunos alumnos podrían primero multiplicar el valor de x por el coeficiente del término cuadrático, por ejemplo:

$2(-2)^2 - 2 = (-4)^2 - 2 = 16 - 2 = 14.$

En la secuencia 11 de **Matemáticas II**, volumen I, estudiaron la jerarquía de las operaciones. Comente al grupo que otra regla de la jerarquía de las operaciones es que los exponentes se realizan antes que las multiplicaciones, por lo que el orden correcto para realizar las operaciones en el ejemplo es:

$2(-2)^2 - 2 = 2(4) - 2 = 8 - 2 = 6.$

Sugerencia didáctica. Verifique que, en cada gráfica, unan los puntos de manera que se forme una curva. Pregúnteles qué ocurre en cada una cuando x vale 0 (al evaluar se obtiene el valor de la ordenada al origen) y cuál es el punto en el que cada gráfica interseca al eje y.

Propósitos de la secuencia

Establecer la relación que existe entre las características de la gráfica de una función no lineal y los valores de los parámetros en las expresiones algebraicas que definen estas funciones.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**¡Abiertas y más abiertas!** Analizar el comportamiento de gráficas de funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + b$, cuando cambia el valor de b y cuando cambia el valor de a.	Aula de medios Interactivo
2	**¡Para arriba y para abajo!** Analizar el comportamiento de gráficas de funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + b$, cuando a es positiva y cuando a es negativa e identificar el vértice de la parábola.	Interactivo
3	**Las desplazadas** Analizar el comportamiento de gráficas de funciones cuadráticas de la forma $y = (x + c)^2 + b$, cuando cambia el valor de c y cuando cambia el valor de b.	Programa 35 Interactivo
4	**¡Ahí les van unas cúbicas!** Analizar el comportamiento de gráficas de funciones cúbicas de la forma $y = ax^3 + b$, cuando cambia el valor de b y cuando cambia el valor de a.	Programa 36 Interactivo
5	**¡Ahí les van unas hipérbolas!** Analizar el comportamiento de gráficas de hipérbolas de la forma $y = \frac{a}{x} + b$, cuando cambia el valor de b.	Programa 37 Interactivo
6	**Efectos especiales** Resolver problemas para identificar elementos en la gráfica de una función no lineal e identificar la expresión algebraica que le corresponde.	Interactivo

Respuesta.

c) Las gráficas se intersecan en el punto (0,–2).

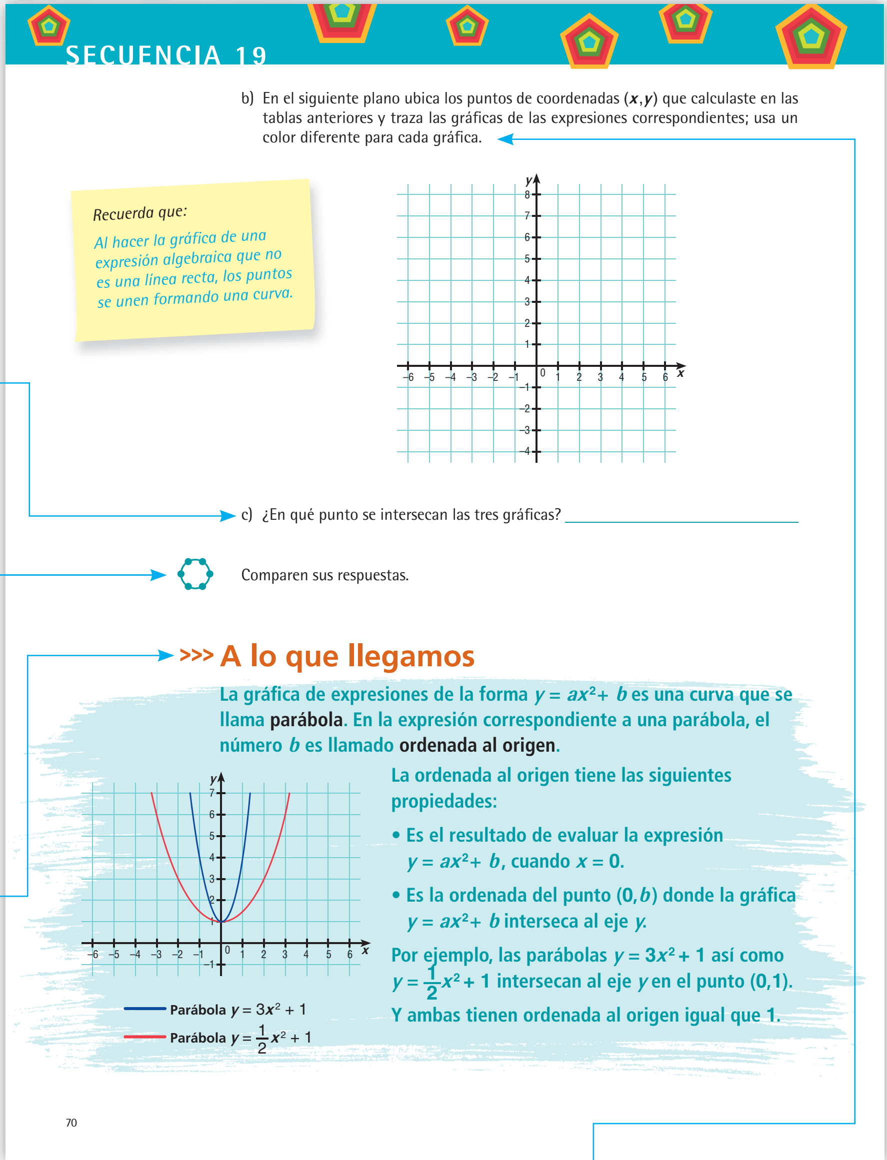
Posibles dificultades. Al graficar, algunos alumnos podrían colocar los cinco puntos que obtuvieron en la tabla y dibujar la parábola de manera que va a parecer que se termina en los puntos extremos. Sugiérales que continúen la curva hacia arriba y comente que con los puntos que graficaron pueden conocer la forma de la parábola y continuarla, aunque no evalúen directamente en más puntos.

Sugerencia didáctica. Escriba las siguientes expresiones en el pizarrón (de una en una) y luego pase a un alumno para que la grafique. Pregunte cuál es la ordenada al origen en cada caso y en qué punto intersecan al eje y.

$y = 5x^2 + 6$

$y = x^2 - 5$

$y = 2x^2 - 8$


SECUENCIA 19

b) En el siguiente plano ubica los puntos de coordenadas (x,y) que calculaste en las tablas anteriores y traza las gráficas de las expresiones correspondientes; usa un color diferente para cada gráfica.

Recuerda que:
Al hacer la gráfica de una expresión algebraica que no es una línea recta, los puntos se unen formando una curva.

c) ¿En qué punto se intersecan las tres gráficas? ______

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

La gráfica de expresiones de la forma $y = ax^2 + b$ es una curva que se llama **parábola**. En la expresión correspondiente a una parábola, el número b es llamado **ordenada al origen**.

La ordenada al origen tiene las siguientes propiedades:

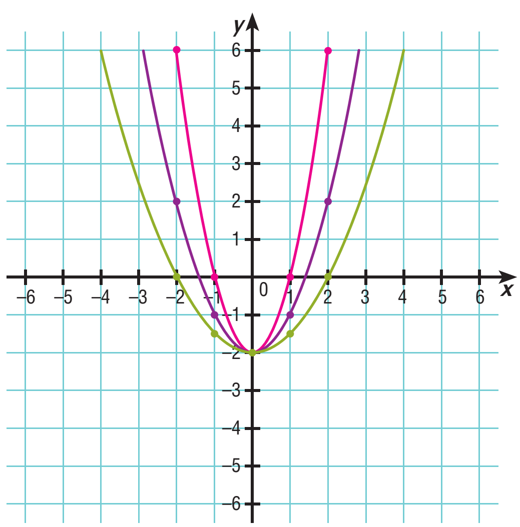
- Es el resultado de evaluar la expresión $y = ax^2 + b$, cuando $x = 0$.
- Es la ordenada del punto $(0, b)$ donde la gráfica $y = ax^2 + b$ interseca al eje y.

Por ejemplo, las parábolas $y = 3x^2 + 1$ así como $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ intersecan al eje y en el punto (0,1). Y ambas tienen ordenada al origen igual que 1.

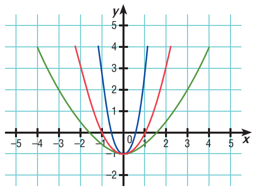
Parábola $y = 3x^2 + 1$

Parábola $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

70



II. En el siguiente plano cartesiano se encuentran las gráficas de tres parábolas.



Parábola $y = \frac{1}{3}x^2 - 1$

Parábola $y = x^2 - 1$

Parábola $y = 4x^2 - 1$

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen cuándo una parábola está más abierta que otra.

Se dice que la parábola roja está **más abierta** que la parábola azul y **más cerrada** que la parábola verde.

a) A partir de la información de las gráficas anteriores completa la siguiente tabla:

Expresión algebraica	$y = \frac{1}{3}x^2 - 1$	$y = x^2 - 1$	$y = 4x^2 - 1$	$y = 2x^2 - 1$	$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$
Ordenada al origen	-1	-1	-1	-1	-1
Coeficiente del término de segundo grado	$\frac{1}{3}$	1	4	2	$\frac{1}{2}$

Recuerda que:

Cuando el coeficiente de un término es igual a 1, *se acostumbra no escribirlo para simplificar.*

Por ejemplo, en la expresión $x^2 + 2x + 3$, *el coeficiente del término de segundo grado es* 1.

b) ¿Qué parábola está **más abierta**, $y = 2x^2 - 1$ o bien $y = 4x^2 - 1$? ____________ ; ¿por qué? ____________________

c) ¿En qué expresión el coeficiente del término de segundo grado es mayor, en $y = 2x^2 - 1$ o bien en $y = 4x^2 - 1$? ____________________

d) ¿Qué parábola está **más abierta** que todas las demás? ____________________

e) ¿Qué coeficiente del término de segundo grado tiene esa parábola? ____________

____

Respuestas.

b) $2x^2 - 1$

c) En $4x^2 - 1$

d) $\frac{1}{3}x^2 - 1$

e) $\frac{1}{3}$

f) Completa la siguiente tabla para encontrar algunos puntos de coordenadas (x, y) de las gráficas.

x	$y = 4x^2 - 1$
–2	15
–1	3
0	–1
1	3
2	15

x	$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$
–2	1
–1	$-\frac{1}{2}$
0	–1
1	$-\frac{1}{2}$
2	1

71

Sugerencia didáctica. Pida a todo el grupo que entre todos den una descripción de qué quiere decir que una parábola esté más abierta que otra.

Sugerencia didáctica. Pida a dos alumnos que pasen al pizarrón a llenar una tabla como la de la actividad anterior para encontrar algunos puntos de las gráficas para las dos expresiones.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad. Si tienen dificultades revise con ellos el apartado *A lo que llegamos* de esta sesión.

Respuestas.

a) –1

b) –2

c) –1

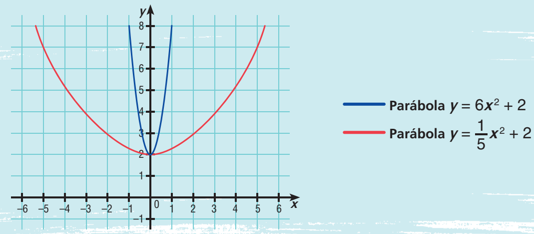
d) La parábola $y = \frac{1}{6}x^2 - 1$ está más abierta.

g) En el plano cartesiano grafica los puntos anteriores y verifica tus respuestas a los incisos b) y d).

Comparen sus respuestas y comenten la siguiente información.

>>> A lo que llegamos

El número a en una expresión de la forma $y = ax^2 + b$ indica la abertura de la parábola. Mientras menor sea el número a, la parábola estará más abierta. Por ejemplo, la parábola $y = \frac{1}{5}x^2 + 2$ está más abierta que la parábola $y = 6x^2 + 2$, pues $\frac{1}{5} < 6$.



>>> Lo que aprendimos

1. Encuentra la ordenada al origen de cada una de las siguientes parábolas:

a) $y = 6x^2 - 1$ Ordenada al origen: ________

b) $y = x^2 - 2$ Ordenada al origen: ________

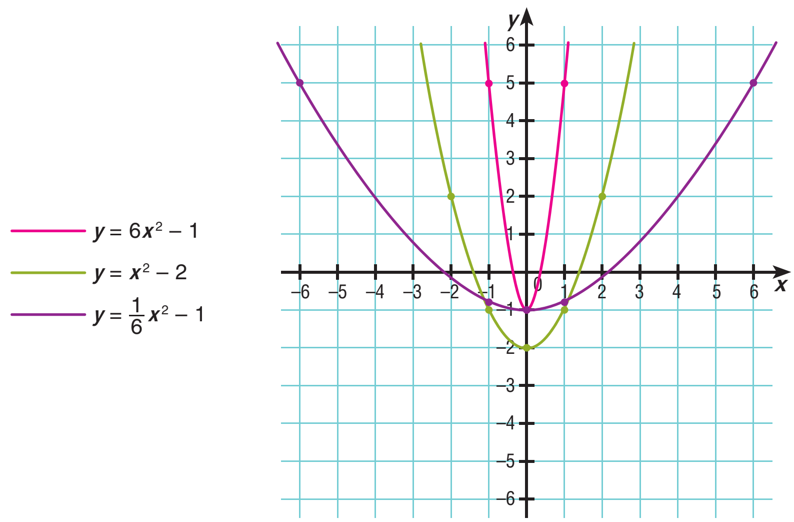
c) $y = \frac{1}{6}x^2 - 1$ Ordenada al origen: ________

d) ¿Qué parábola está más abierta, $y = 6x^2 - 1$ o $y = \frac{1}{6}x^2 - 1$?

____

e) En tu cuaderno grafica las parábolas para verificar que tus respuestas sean correctas.

72

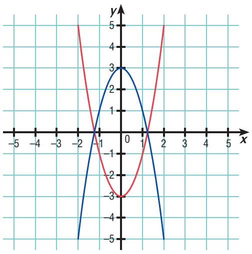


¡PARA ARRIBA Y PARA ABAJO!

SESIÓN 2

>>> Consideremos lo siguiente

En el siguiente plano se encuentran las gráficas de dos parábolas.



a) ¿En qué punto interseca al eje y la parábola roja? ____________

b) ¿En qué punto interseca al eje y la parábola azul? ____________

c) La expresión algebraica asociada a la parábola roja es $y = 2x^2 - 3$. ¿Cuál es la expresión algebraica asociada a la parábola azul? Subráyala.

$y = -2x^2$ $\quad$ $y = -2x^2 - 3$ $\quad$ $y = -2x^2 + 3$

Completa la siguiente tabla para encontrar algunos de los elementos de las parábolas:

Expresión algebraica	$y = -2x^2 - 3$	$y = -2x^2$	$y = -2x^2 + 3$	$y = 2x^2 + 3$
Ordenada al origen	-3	0	3	3
Coeficiente del término de segundo grado	-2	-2	-2	2

Comparen sus respuestas. Elijan una expresión de las que aparecen en la tabla y calculen los valores de y para los valores que se indican de x. Verifiquen que la respuesta dada en el inciso c) sea correcta.

x	Expresión elegida: $y = -2x^2 + 3$
-1	$-2(-1)^2 + 3 = -2(1) + 3 = -2 + 3 = 1$
1	$-2(1)^2 + 3 = -2(1) + 3 = -2 + 3 = 1$

73

Propósito de la sesión. Analizar el comportamiento de gráficas de funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + b$, cuando a es positiva y cuando a es negativa e identificar el vértice de la parábola.

Sugerencia didáctica. En esta sesión los alumnos van a identificar que, cuando el coeficiente del término cuadrático es positivo, la parábola abre hacia arriba y que cuando es negativo, la parábola abre hacia abajo. No les anticipe este resultado, permita que intenten determinar la expresión algebraica asociada a la parábola azul con sus propios procedimientos.

Respuestas.

a) $(0, -3)$

b) $(0,3)$

c) $-2x^2 + 3$

Sugerencia didáctica. Todo el grupo debe de estar de acuerdo en cuál es la expresión algebraica que corresponde a la parábola azul. Pídales que argumenten por qué es así y escriba en el pizarrón esos argumentos. Al completar la tabla pueden verificar si su elección es la correcta.

Propósito del Interactivo. Que el alumno reconozca el aspecto gráfico de diversas relaciones funcionales lineales y no lineales.

Propósito de la actividad. Identificar que, cuando el coeficiente del término cuadrático es positivo, la parábola abre hacia arriba y que cuando es negativo, la parábola abre hacia abajo.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos en cuál de las gráficas la mayoría de las ordenadas (los valores de la *y*) son positivos y en cuál la mayoría son negativos y si eso tiene relación con el signo del coeficiente del término de segundo grado.

SECUENCIA 19

>>> Manos a la obra

I. Realiza las siguientes actividades:

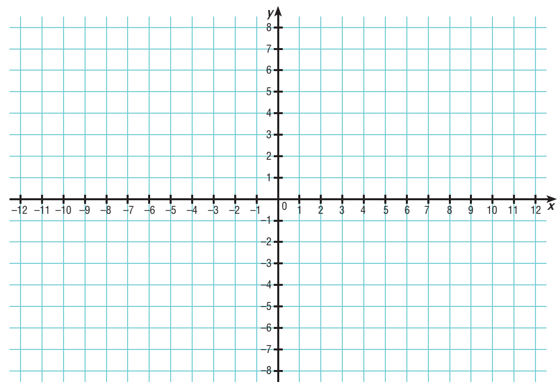
a) Completa las tablas para encontrar algunos puntos de las expresiones anteriores.

x	$y = -2x^2$	Punto (x,y)
−2	−8	(−2,−8)
−1	−2	(−1, −2)
0	0	(0, 0)
1	−2	(1,−2)
2	−8	(2, −8)

x	$y = -2x^2 + 3$	Punto (x,y)
−2	−5	(−2,−5)
−1	1	(−1, 1)
0	3	(0, 3)
1	1	(1,1)
2	−5	(2, −5)

x	$y = 2x^2 + 3$	Punto (x,y)
−2	11	(−2,11)
−1	5	(−1, 5)
0	3	(0, 3)
1	5	(1,5)
2	11	(2, 11)

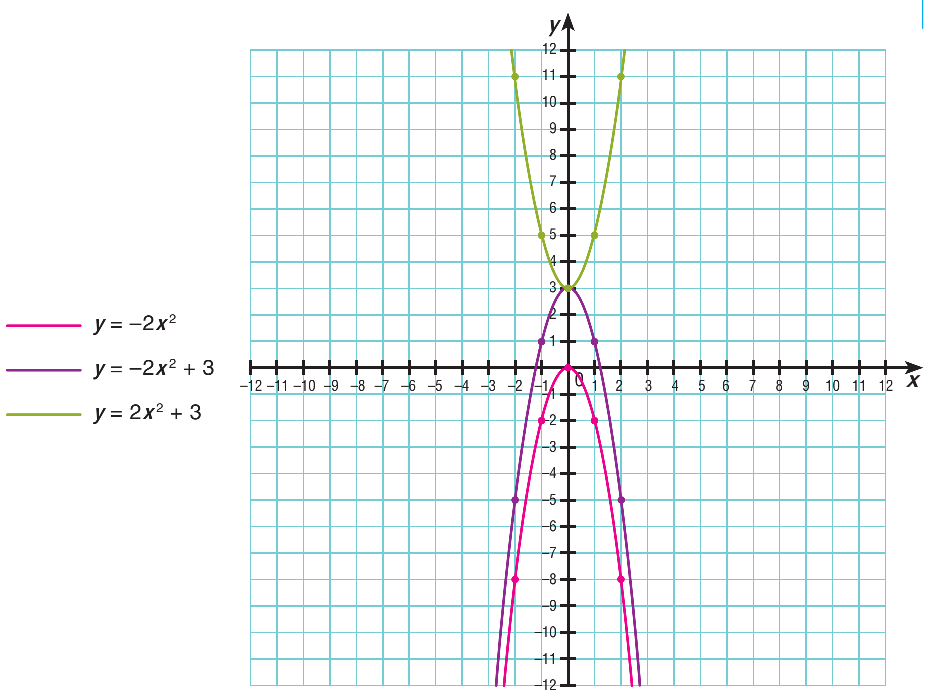
b) Grafica los puntos que encontraste en el siguiente plano cartesiano y completa las gráficas. Usa colores distintos para cada una de las gráficas.



c) ¿La parábola $y = -2x^2$ abre hacia arriba o hacia abajo? ____________

d) ¿La parábola $y = 2x^2 + 3$ abre hacia arriba o hacia abajo? ____________

74

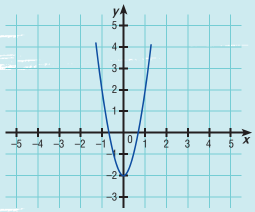


Comparen sus respuestas y verifiquen que la expresión que corresponde a la parábola roja del apartado *Consideremos lo siguiente* sea la correcta.

>>> A lo que llegamos

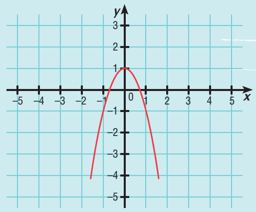
En las expresiones de la forma $y = ax^2 + b$, la constante a indica hacia donde abre la parábola.

Si a es un número positivo, la parábola abre hacia arriba.



Parábola $y = 4x^2 - 2$

Si a es un número negativo, la parábola abre hacia abajo.



Parábola $y = -2x^2 + 1$

II. Para la expresión $y = -2x^2 + 3$ contesta:

a) ¿El coeficiente del término de segundo grado es positivo o negativo?

____

b) ¿La parábola abre para arriba o para abajo? _______________

c) ¿Cuál es el mayor valor que toma y? _______________

III. Para la expresión $y = 2x^2 + 3$ contesta:

a) ¿El coeficiente del término de segundo grado es positivo o negativo?

____

b) ¿La parábola abre para arriba o para abajo? _______________

c) ¿Cuál es el menor valor que toma y? _______________

Propósito de las actividades. Identificar que el vértice de una parábola es el punto más alto o el punto más bajo de ella.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que señalen en la gráfica de $y = -2x^2 + 3$ el punto que tiene el valor mayor en la ordenada y en la gráfica de $y = 2x^2 + 3$ el punto que tiene el menor valor.

Respuestas.

a) Negativo.

b) Abre hacia abajo.

c) 3.

Respuestas.

a) Positivo.

b) Abre hacia arriba.

c) 3.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos si, en la primera parábola, hay un punto más alto y si, en la segunda parábola, hay un punto más bajo.

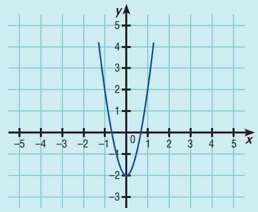
El propósito es que puedan darse cuenta de que las parábolas continúan, hacia arriba o hacia abajo, sin tener un límite.

>>> A lo que llegamos

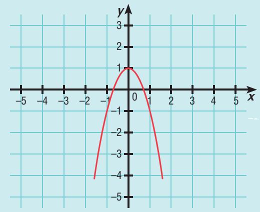
En una parábola, el punto que corresponde al menor o al mayor valor que toma la ordenada se llama vértice.

Si la parábola abre hacia arriba, el vértice es su punto más bajo.

Si la parábola abre hacia abajo, el vértice es su punto más alto.



Parábola $y = 4x^2 - 2$
Vértice: (0,–2)
Menor valor de y: – 2



Parábola $y = -2x^2 + 1$
Vértice: (0,1)
Mayor valor de y: 1

>>> Lo que aprendimos

Completa la siguiente tabla para encontrar los elementos de algunas parábolas:

Expresión	Ordenada al origen	Hacia dónde abre	Vértice
$y = x^2 + 5$	5	Hacia arriba	(0,5)
$y = -2x^2 + 3$	3	Hacia abajo	(0, 3)
$y = x^2$	0	Hacia arriba	(0, 0)
$y = -x^2 - 2$	–2	Hacia abajo	(0, –2)
$y = -7x^2 + 2$	2	Hacia abajo	(0, 2)

Comparen sus respuestas y en su cuaderno hagan las gráficas para verificar que la tabla la completaron correctamente.

LAS DESPLAZADAS

SESIÓN 3

>>> Consideremos lo siguiente

Relaciona las columnas para hacer corresponder las gráficas de las parábolas con sus expresiones algebraicas.

Parábola verde (B)

Parábola roja (A)

Parábola rosa (D)

Parábola azul (C)

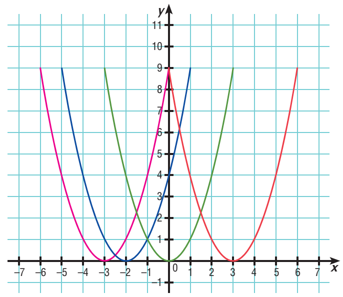
A. $y = (x - 3)^2$

B. $y = (x - 0)^2$

C. $y = (x + 2)^2$

D. $y = (x + 3)^2$

E. $y = (x - 1)^2$



Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus resultados.

>>> Manos a la obra

I. Contesta lo que se te pide a continuación.

a) Escribe en la tabla el valor que toma y para cada valor de x.

x	−1	0	1	2	3	4	5
$y = (x - 3)^2$	16	9	4	1	0	1	4

Verifica que los puntos (x,y), cuyas coordenadas calculaste al completar la tabla, estén sobre la parábola que elegiste.

b) ¿Cuál es la ordenada al origen?

____

c) ¿En qué punto (x,y) interseca la gráfica de la expresión al eje x? _______________

d) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de esta parábola?

____

Recuerda que:
El vértice de la parábola es el punto que corresponde al menor o al mayor valor que toma la ordenada y.
Si la parábola abre hacia arriba, el vértice es el punto más bajo de la parábola.
Si la parábola abre hacia abajo, el vértice es el punto más alto de la parábola.

77

Propósito de la sesión. Analizar el comportamiento de gráficas de funciones cuadráticas de la forma $y = (x + c)^2 + b$, cuando cambia el valor de c y cuando cambia el valor de b.

Posibles dificultades. Algunos alumnos podrían pensar, por ejemplo, que la expresión que le corresponde a la parábola roja es $(x + 3)^2$, ya que el vértice está situado 3 unidades a la derecha del origen (0, 0). No los corrija en este momento, permita que los alumnos expresen sus argumentos. Una forma de corroborar sus respuestas es evaluando las expresiones para algunos valores de x. Esto es lo que van a realizar en las actividades en el *Manos a la obra*.

Propósito de la actividad. Identificar que la gráfica de la expresión $y = (x + a)^2$ es una parábola con vértice en el punto $(-a, 0)$.

Respuestas.

b) 9

c) (3,0)

d) (3,0)

Propósito del Interactivo. Que el alumno reconozca el aspecto gráfico de diversas relaciones funcionales lineales y no lineales.

Respuestas.

f) 4

g) (–2,0)

h) (–2,0)

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que pasen al pizarrón a graficar las cuatro parábolas utilizando solamente los elementos que están en la tabla. El propósito es que puedan identificar que no es necesario evaluar en muchos puntos para graficar una parábola, basta con conocer el vértice, hacia dónde abre y la intersección con el eje y.

SECUENCIA 19

e) Para la expresión $y = (x + 2)^2$, completa la siguiente tabla:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
$y = (x + 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9

Verifica que los puntos (x,y) de la tabla estén sobre la parábola que elegiste.

f) ¿Cuál es la ordenada al origen? ____________

g) ¿En qué punto interseca al eje x la gráfica de la expresión? ____________

h) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de esta parábola? ____________

II. Completa la siguiente tabla para encontrar algunos elementos de las parábolas.

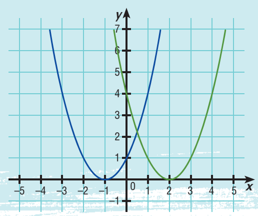
	Expresión	Punto de intersección con el eje y	Ordenada al origen	Punto de intersección con el eje x	Vértice
Parábola azul	$y = (x + 2)^2$	(0,4)	4	(–2,0)	(–2,0)
Parábola verde	$y = (x - 0)^2$	(0,0)	0	(0,0)	(0,0)
Parábola rosa	$y = (x + 3)^2$	(0,9)	9	(–3,0)	(–3,0)
Parábola roja	$y = (x - 3)^2$	(0,9)	9	(3,0)	(3,0)

Recuerden que:
La ordenada al origen es el valor de la ordenada correspondiente al valor $x = 0$.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

La gráfica de una expresión de la forma $y = (x + c)^2$ es una parábola con vértice en el punto $(x,y) = (0,-c)$



Parábola: $y = (x + 1)^2$
Ordenada al origen: $1^2 = 1$
Vértice de la parábola: (0,–1)

Parábola: $y = (x - 2)^2$
Ordenada al origen: $2^2 = 4$
Vértice de la parábola: (0,2)

78

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que verifiquen si encontraron correctamente el vértice de las parábolas en la actividad anterior.

Pida a tres alumnos que pasen al pizarrón a graficar las siguientes parábolas sin hacer una tabla para diferentes valores de x.

$y = (x + 5)^2$

$y = (x - 1)^2$

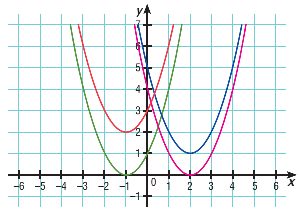
$y = (x - 8)^2$

III. En el siguiente plano cartesiano están graficadas cuatro parábolas. Relaciona las columnas para hacer corresponder las gráficas de las parábolas con sus expresiones algebraicas.

Propósito de la actividad. Identificar que la gráfica de la expresión $y = (x + a)^2 + b$ es una parábola con vértice en el punto $(-a, b)$.

Parábola roja (4)
Parábola verde (2)
Parábola azul (1)
Parábola rosa (3)

1. $y = (x - 2)^2 + 1$
2. $y = (x + 1)^2$
3. $y = (x - 2)^2$
4. $y = (x + 1)^2 + 2$
5. $y = (x - 1)^2 + 1$



Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus resultados.

IV. Completa la siguiente tabla:

	Expresión	Ordenada al origen	Punto de intersección con el eje y	Vértice de la parábola	Punto de intersección con el eje x	Hacia dónde abre
Parábola azul	$y = (x-2)^2 + 1$	5	(0,5)	(2,1)	No	Hacia arriba
Parábola verde	$y = (x + 1)^2$	1	(0,1)	(–1,0)	(–1,0)	Hacia arriba
Parábola roja	$y = (x + 1)^2 + 2$	3	(0,3)	(–1,2)	No interseca al eje x	Hacia arriba
Parábola rosa	$y = (x - 2)^2$	4	(0,4)	(2,0)	(2,0)	Hacia arriba

Comparen sus respuestas. Si tienen dudas, hagan una tabla como la siguiente para verificar que las coordenadas (x,y) que se obtienen son puntos que están sobre la parábola que eligieron.

Sugerencia didáctica. Asigne a cada alumno una de las expresiones para que verifiquen sus respuestas.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
Expresión elegida: ____________							

79

Sugerencia didáctica. Pregunte al grupo cuál es el vértice y cuáles son las intersecciones con los ejes de las parábolas $y = (x + 5)^2 + 2$, $y = x^2 - 9$.

Propósito del programa 35. Analizar las gráficas que corresponden a relaciones cuadráticas.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad. Si tienen dificultades revise con ellos el apartado *A lo que llegamos* de esta sesión.

Respuestas.

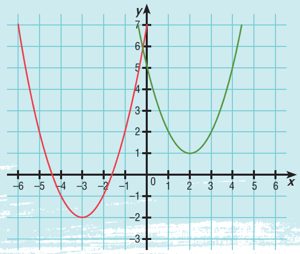
Los vértices son (3,–3), (1,–5) y (–2,4).

Las ordenadas al origen son: –3, –5 y 4.

SECUENCIA 19

>>> A lo que llegamos

La gráfica de una expresión de la forma $y = (x + c)^2 + b$ es una parábola que abre hacia arriba y tiene vértice en el punto $(-c, b)$.



Parábola: $y = (x + 3)^2 - 2$
Ordenada al origen: 7
Vértice de la parábola: (–3,–2)

Parábola: $y = (x - 2)^2 + 1$
Ordenada al origen: 5
Vértice de la parábola: (2,1)

Para conocer más sobre la parábola, pueden ver el programa *Elementos de la parábola*.

>>> Lo que aprendimos

Las gráficas de las siguientes tres expresiones son parábolas.

- $y = (x - 3)^2 - 3$
- $y = (x - 1)^2 - 5$
- $y = (x + 2)^2 + 4$

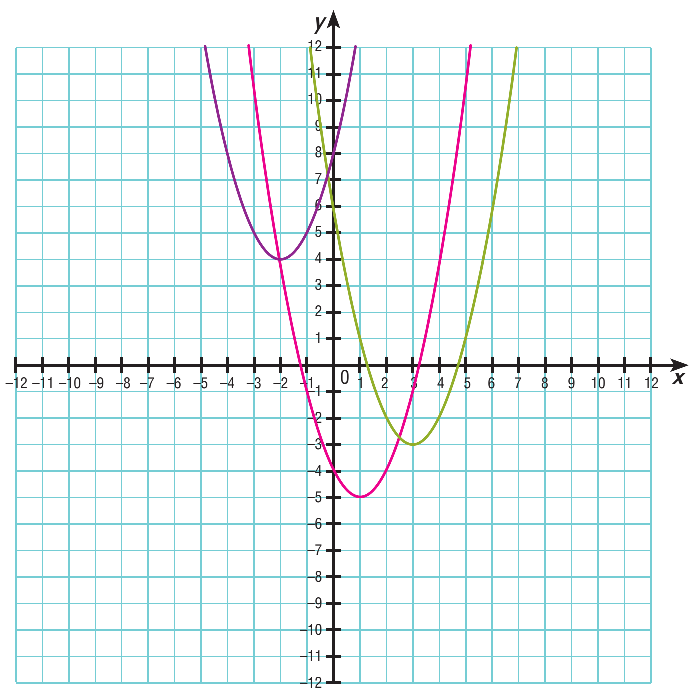
En tu cuaderno encuentra la ordenada al origen y el vértice. Con los datos que obtuviste y, sin hacer tablas, construye un bosquejo de la gráfica de cada una de las parábolas; usa colores diferentes para cada una de ellas.

80

$y = (x - 3)^2 - 3$

$y = (x - 1)^2 - 5$

$y = (x + 2)^2 + 4$



¡AHÍ LES VAN UNAS CÚBICAS!

SESIÓN 4

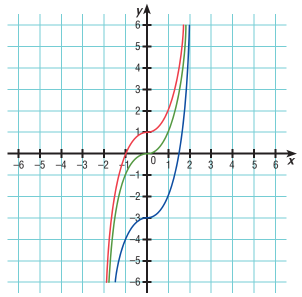
Propósito de la sesión. Analizar el comportamiento de gráficas de funciones cúbicas de la forma $y = ax^3 + b$, cuando cambia el valor de b y cuando cambia el valor de a.

>>> Para empezar

En la secuencia 18 de **Matemáticas III**, volumen II, aprendiste que la gráfica de una expresión de la forma: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se llama ***cúbica***. En esta sesión seguirás explorando las cúbicas.

En el siguiente plano cartesiano se graficaron tres cúbicas.

Propósito del Interactivo. Que el alumno reconozca el aspecto gráfico de diversas relaciones funcionales lineales y no lineales.



Con la información de las gráficas anteriores completen la siguiente tabla:

Cúbica	Ordenada al origen
Roja	1
Verde	0
Azul	–3

Recuerden que:
*La ordenada al origen es la ordenada del punto en el que la gráfica interseca al eje **y**.*

>>> Consideremos lo siguiente

Relaciona las columnas para hacer corresponder las gráficas de las cúbicas con sus expresiones algebraicas.

Cúbica roja (D)
Cúbica verde (A)
Cúbica azul (B)

A. $y = x^3$
B. $y = x^3 - 3$
C. $y = 3x^3$
D. $y = x^3 + 1$

Comparen sus respuestas.

Sugerencia didáctica. Se espera que los alumnos utilicen lo que hicieron en las sesiones pasadas para las parábolas, al evaluar algunos valores en las expresiones, por ejemplo para $x = 0$, 1 y –1, podrán determinar qué cúbica le corresponde a cada expresión. No les anticipe este procedimiento todavía, pero pídales que justifiquen su respuesta.

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen la gráfica que le corresponde a cada expresión al evaluar para algunos valores de x.

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen el desplazamiento que existe entre dos cúbicas de la forma $y = ax^3 + b$ cuando tienen el mismo coeficiente pero distinta ordenada al origen (el número b).

Respuestas.

a) Se resta 3.

b) Se suma 1.

c) 3

d) 1

e) 0

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que indiquen en qué se parecen y en qué son distintas las gráficas de las expresiones $y = x^3$, $y = x^3 + 1$, $y = x^3 - 3$.

>>> Manos a la obra

I. Completa las siguientes tablas para encontrar algunos puntos de las cúbicas anteriores.

x	$y = x^3$
–2	–8
–1	–1
0	0
1	1
2	8

x	$y = x^3 - 3$
–2	–11
–1	–4
0	–3
1	–2
2	5

x	$y = 3x^3$
–2	–24
–1	–3
0	0
1	3
2	24

x	$y = x^3 + 1$
–2	–7
–1	0
0	1
1	2
2	9

En el plano cartesiano del apartado *Para empezar*, grafica los puntos que encontraste. Verifica que las expresiones que elegiste sean las correctas.

II. A partir de la información de las tablas, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué número hay que restar a las ordenadas de la columna $y = x^3$ para obtener las ordenadas de la columna $y = x^3 - 3$? _______________

b) ¿Qué número hay que sumar a las ordenadas de la columna $y = x^3$ para obtener las ordenadas de la columna $y = x^3 + 1$? _______________

c) ¿Cuál es la ordenada al origen de la expresión $y = x^3 - 3$? _______________

d) ¿Cuál es la ordenada al origen de la expresión $y = x^3 + 1$? _______________

e) ¿Cuál es la ordenada al origen de la expresión $y = 3x^3$? _______________

Comparen sus respuestas y comenten la siguiente información.

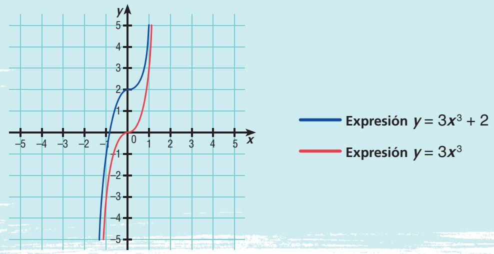
>>> A lo que llegamos

La gráfica de una expresión cúbica de la forma $y = ax^3 + b$ es una curva cuya **ordenada al origen** es el número b.

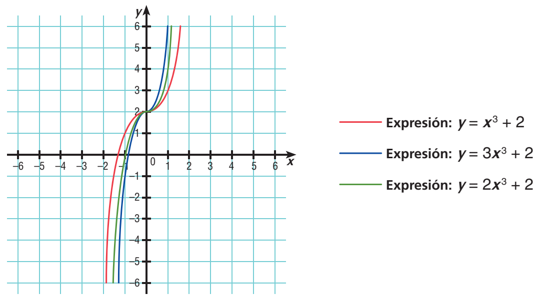
Cuando dos o más expresiones de este tipo tienen distinta ordenada al origen pero el mismo coeficiente a, se dice que sus gráficas están **desplazadas** una respecto de la otra.

82

Por ejemplo, la gráfica de la expresión $y = 3x^3 + 2$ está desplazada dos unidades hacia arriba respecto de la gráfica de la expresión $y = 3x^3$.



III. En el siguiente plano cartesiano verás las gráficas de tres expresiones.



a) ¿En qué punto se intersecan estas tres gráficas? ____________

b) ¿En que punto intersecara la gráfica de $y = 4x^3 + 2$ a la gráfica de $y = x^3 + 2$?

____

c) ¿En que punto intersecara la gráfica de $y = 5x^3 + 2$ a la gráfica de $y = x^3 + 2$?

____

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen la ordenada al origen en las cúbicas.

Respuesta. Todas las gráficas se intersecan en el punto (0,2).

Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos que primero se realiza el exponente, luego la multiplicación y luego la suma.

IV. Completa las siguientes tablas para encontrar las coordenadas de algunos puntos de la expresión $y = 4x^3 + 2$ y de la expresión $y = 5x^3 + 2$; ubica estos puntos en el plano cartesiano anterior y verifica tus respuestas.

x	$y = 4x^3 + 2$
–2	–30
–1	–2
0	2
1	6
2	34

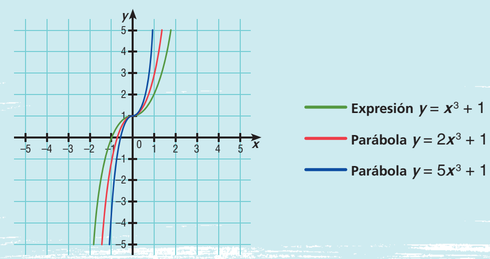
x	$y = 5x^3 + 2$
–2	–38
–1	–3
0	2
1	7
2	42

Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus resultados

>>> A lo que llegamos

Al igual que dos rectas $y = mx + b$ que tienen la misma ordenada al origen se intersecan en el punto $(0, b)$, dos o más cúbicas de la forma $y = ax^3 + b$ que tengan la misma ordenada al origen b se intersecan en el punto $(0, b)$.

Por ejemplo, las gráficas de $y = x^3 + 1$, $y = 2x^3 + 1$ así como $y = 5x^3 + 1$ se intersecan en el punto (0,1).



Para conocer más sobre las gráficas de expresiones de la forma $y = ax^3 + b$, pueden ver el programa *Elementos de la cúbica*.

Propósito del programa 36. Analizar el comportamiento de la gráfica asociada a expresiones algebraicas de la forma $y = ax^3 + b$.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

¡AHÍ LES VAN UNAS HIPÉRBOLAS!

SESIÓN 5

Propósito de la sesión. Analizar el comportamiento de gráficas de hipérbolas de la forma $y = \frac{a}{x} + b$, cuando cambia el valor de b.

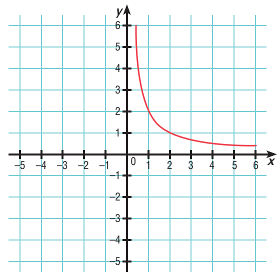
>>> Para empezar

Propósito de la actividad. Identificar la gráfica asociada a una expresión de la forma $y = \frac{k}{x}$.

En la secuencia 33 de tu libro de **Matemáticas I**, volumen II, aprendiste que la expresión algebraica asociada a una relación de ***proporcionalidad inversa*** es de la forma $y = \frac{k}{x}$, donde k es la constante de la relación de proporcionalidad inversa. La gráfica asociada a este tipo de expresión es una curva llamada ***hipérbola***.

Propósito del Interactivo. Que el alumno reconozca el aspecto gráfico de diversas relaciones funcionales lineales y no lineales.

En el siguiente plano cartesiano se graficó parte de la expresión $y = \frac{2}{x}$. Se graficaron los puntos que tienen abscisas positivas ($x > 0$).



Completa la siguiente tabla para encontrar las coordenadas de algunos puntos de la gráfica que tienen abscisas negativas ($x < 0$). Luego, localízalos en el plano cartesiano de arriba.

x	$y = \frac{2}{x}$	Punto (x,y)
–5	$-\frac{2}{5}$	$(-5,-\frac{2}{5})$
–4	$-\frac{1}{2}$	$(-4,-\frac{1}{2})$
–3	$-\frac{2}{3}$	$(-3,-\frac{2}{3})$
–2	–1	(–2,–1)
–1	–2	(–1,–2)

Comenten: ¿encuentran alguna relación entre la parte de la curva que dibujaron ($x < 0$) respecto de la que ya estaba ($x > 0$)?

Propósito de la pregunta. Que los alumnos identifiquen que los valores de y en la curva que dibujaron tienen la misma magnitud que los valores que ya estaban, pero con signo negativo.

85

Completen la siguiente tabla para comparar las coordenadas de los puntos de las dos partes de la gráfica.

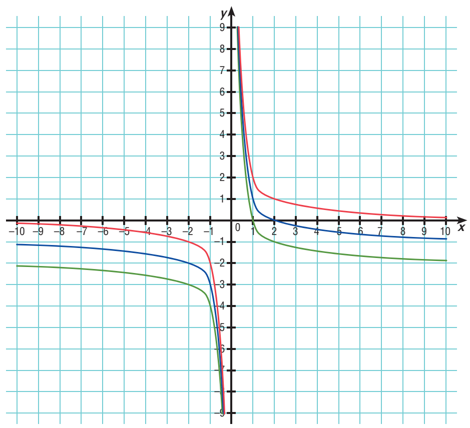
x	$y = \frac{2}{x}$	Punto (x,y)
5	$\frac{2}{5}$	$(5,\frac{2}{5})$
4	$\frac{1}{2}$	$(4,\frac{1}{2})$
3	$\frac{2}{3}$	$(3,\frac{2}{3})$
2	1	(2,1)
1	2	(1,2)

La gráfica de una expresión de la forma $y = \frac{k}{x}$ es una curva llamada **hipérbola**. A las dos partes de esa gráfica se les llama **ramas de la hipérbola**.

Sugerencia didáctica. Se espera que los alumnos evalúen algunos valores para x en las expresiones, de esta manera podrán determinar qué hipérbola le corresponde a cada expresión. No les anticipe este procedimiento todavía, pero pídales que justifiquen su respuesta.

>>> Consideremos lo siguiente

En el siguiente plano cartesiano se graficaron tres hipérbolas (cada una de ellas con sus dos ramas).



La gráfica de $y = \frac{2}{x}$ es la hipérbola roja.

Relaciona las columnas para hacer corresponder las hipérbolas con sus expresiones algebraicas.

Hipérbola verde (B)

Hipérbola azul (C)

A. $y = \frac{2}{x} + 1$

B. $y = \frac{2}{x} - 2$

C. $y = \frac{2}{x} - 1$

Comparen sus respuestas y comenten:

Los puntos (1,1) y (–2,–2) se encuentran sobre la hipérbola azul. Completen la siguiente tabla para verificar que la expresión que eligieron sea correcta.

x	**La expresión que eligieron:** $y = \frac{2}{x} - 1$	**Punto** (x,y)
1	1	(1, 1)
–2	–2	(–2, –2)

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos cómo pueden verificar en la gráfica que esos puntos están sobre la hipérbola azul.

En la tabla deben poner la expresión que eligieron para la hipérbola azul.

>>> Manos a la obra

I. Completa las siguientes tablas para encontrar las coordenadas de algunos puntos de las expresiones anteriores.

x	$y = \frac{2}{x} + 1$
–4	$\frac{1}{2}$
–2	0
–1	–1
1	3
2	2
4	$\frac{3}{2}$

x	$y = \frac{2}{x} - 2$
–4	$-\frac{5}{2}$
–2	–3
–1	–4
1	0
2	–1
4	$-\frac{3}{2}$

x	$y = \frac{2}{x}$
– 4	$-\frac{1}{2}$
–2	–1
–1	–2
1	2
2	1
4	1

a) ¿Qué número hay que sumar a la columna de la expresión $y = \frac{2}{x}$ para obtener la columna de la expresión $y = \frac{2}{x} + 1$? ______________

b) ¿Qué número hay que restar a la columna de la expresión $y = \frac{2}{x}$ para obtener la columna de la expresión $y = \frac{2}{x} - 2$? ______________

c) ¿Qué número hay que restar a la expresión $y = \frac{2}{x}$ para obtener la expresión $y = \frac{2}{x} - 2$? ______________

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen el desplazamiento que existe entre dos hipérbolas de la forma $y = \frac{k}{x} + b$ cuando tienen la misma literal k pero distinta ordenada al origen (el número b).

Respuestas.

a) Se suma 1.

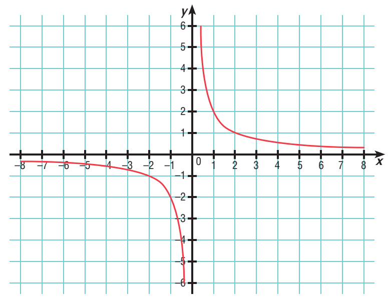
b) Se resta 2.

c) Se resta 2.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que indiquen en qué se parecen y en qué son distintas las gráficas de las expresiones $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{2}{x} - 1$, $y = \frac{2}{x} - 2$.

d) En el siguiente plano se encuentra la gráfica de la expresión $y = \frac{2}{x}$; dibuja los puntos anteriores para trazar la gráfica de las otras dos expresiones; usa colores diferentes para cada gráfica.

Recuerda que:
La división entre cero no está definida, es decir, no puede dividirse un número por cero.



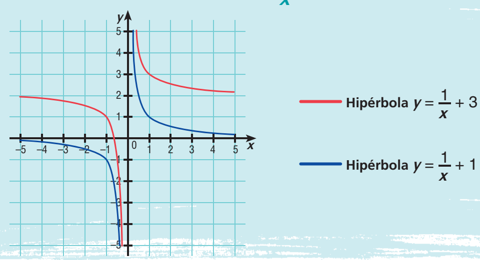
Comparen sus respuestas y comenten la siguiente información.

>>> A lo que llegamos

La gráfica de una expresión de la forma $y = \frac{a}{x} + b$ se llama **hipérbola.**

Cuando dos o más expresiones de la forma $y = \frac{a}{x} + b$ tienen el mismo valor de a pero diferente valor para b, sus gráficas están desplazadas una respecto de la otra.

Por ejemplo, la hipérbola $y = \frac{1}{x} + 3$ está **desplazada hacia arriba dos unidades** respecto de la hipérbola $y = \frac{1}{x} + 1$.



88

II. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿En qué punto la expresión $y = \frac{2}{x} - 1$ interseca al eje x? ______________

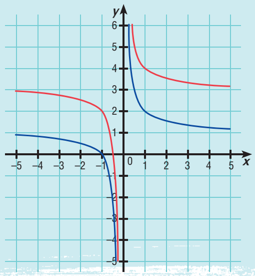
b) ¿En qué punto la expresión $y = \frac{2}{x} - 2$ interseca al eje x? ______________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Pertenecerá el punto (0,0) a la gráfica de $y = \frac{2}{x}$?

b) ¿Qué sucede en la expresión $y = \frac{2}{x} + b$ para el valor de $y = 0$?

En las expresiones de la forma $y = \frac{a}{x} + b$, el valor de y no está definido cuando $x = 0$. Si b es cero, la hipérbola no interseca a ninguno de los ejes. Si b no es cero, la hipérbola interseca al eje x en un solo punto. Por ejemplo:



Hipérbola $y = \frac{1}{x} + 3$
Punto de intersección con el eje x: $(-\frac{1}{3}, 0)$

Hipérbola $y = \frac{1}{x} + 1$
Punto de intersección con el eje x: $(-1, 0)$

Para conocer más sobre la hipérbola, pueden ver el programa *Elementos de la hipérbola*.

>>> Lo que aprendimos

Completa la siguiente tabla:

Hipérbola	Punto de intersección con el eje x
$y = \frac{4}{x}$	No tiene
$y = \frac{1.5}{x} + 6$	$\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$
$y = \frac{3}{x} + 1$	$(-3,0)$

En tu cuaderno grafica las hipérbolas para verificar que completaste correctamente la tabla.

89

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen que las hipérbolas de la forma $y = \frac{k}{x} + b$, si b no es cero, intersecan al eje x en un punto.

Respuestas.

a) (2,0)

b) (1,0)

c) (2,0)

Propósito de las preguntas. Los alumnos deben identificar que, cuando x vale 0, no se puede evaluar la expresión, debido a que la división $\frac{2}{0}$ no está definida.

Si lo considera conveniente coménteles que una división puede interpretarse como el resultado de la pregunta ¿cuántas veces cabe el 0 en el 2?, pero esto no tiene sentido porque aunque se sume varias veces el 0, se sigue obteniendo 0 como resultado.

Propósito del programa 37. Analizar el comportamiento de la gráfica asociada a expresiones algebraicas de la forma $y = \frac{a}{x} + b$.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Resolver problemas para identificar elementos en la gráfica de una función no lineal e identificar la expresión algebraica que le corresponde.

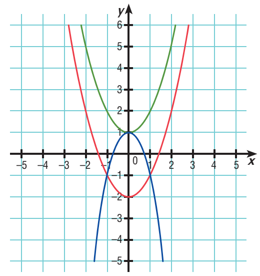
Propósito del Interactivo. Que el alumno reconozca el aspecto gráfico de diversas relaciones funcionales lineales y no lineales.

SESIÓN 6

EFECTOS ESPECIALES

>>> Lo que aprendimos

1. En el siguiente plano cartesiano se encuentran las gráficas de tres parábolas.



Parábola $y = -2x^2 + 1$

Parábola $y = x^2 - 2$

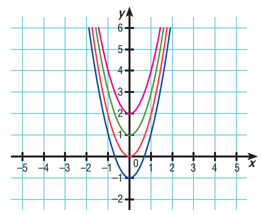
Parábola $y = x^2 + 1$

a) Usa dos colores distintos para graficar $y = -2x^2 + 2$, $y = x^2 + 4$ en el mismo plano cartesiano.

b) Completa la siguiente tabla para encontrar algunos elementos de las parábolas anteriores.

Parábola	Ordenada al origen	Hacia dónde abre	Vértice
$y = -2x^2 + 1$	1	Hacia abajo	(0,1)
$y = x^2 - 1$	–1	Hacia arriba	(0,–1)
$y = x^2 - 2$	–2	Hacia arriba	(0,–2)
$y = -2x^2 - 2$	–2	Hacia abajo	(0,–2)
$y = 2x^2 + 4$	4	Hacia arriba	(0,4)

2. En el siguiente plano cartesiano se encuentran las gráficas de cuatro parábolas.



Parábola $y = 2x^2 - 1$

Parábola $y = 2x^2$

Parábola $y = 2x^2 + 1$

Parábola $y = -2x^2 + 2$

90

a) Completa las siguientes tabla para encontrar las coordenadas de algunos puntos de las expresiones $y = 2x^2$ así como $y = 2x^2 - 2$.

x	$y = 2x^2$
–2	8
–1	2
0	0
1	2
2	8

x	$y = 2x^2 - 2$
–2	6
–1	0
0	–2
1	0
2	6

b) ¿Qué número hay que restarle a la columna de la expresión $y = 2x^2$ para obtener la columna de la expresión $y = 2x^2 - 2$? ______________

c) ¿Qué número hay que restarle a la expresión $y = 2x^2$ para obtener la expresión $y = 2x^2 - 2$? ______________

Respuestas.

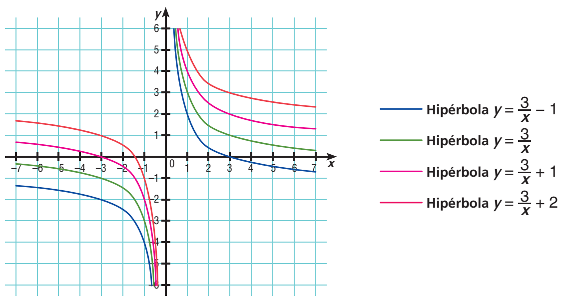
b) Se resta 2.

c) Se resta 2.

Comparen sus respuestas y comenten:

Cualquier parábola de la forma $y = 2x^2 + b$, con b un número con signo, se puede obtener de la parábola $y = 2x^2$, si desplazamos esta parábola b unidades hacia arriba si el número b es positivo o bien hacia abajo si b es negativo.

3. En el siguiente plano cartesiano hay cuatro hipérbolas.



a) ¿Cómo se puede obtener la hipérbola $y = \frac{3}{x} - 1$ a partir de la hipérbola $y = \frac{3}{x}$?

____

b) ¿Cómo se puede obtener la hipérbola $y = \frac{3}{x} + 1$ a partir de la hipérbola $y = \frac{3}{x}$?

____

Respuestas.

a) Se desplaza la hipérbola $y = \frac{3}{x}$ una unidad hacia abajo.

b) Se desplaza la hipérbola $y = \frac{3}{x}$ una unidad hacia arriba.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad. Si tienen dificultades revise con ellos el apartado *A lo que llegamos* de las sesiones anteriores.

4. Relaciona las columnas para hacer corresponder las gráficas con sus expresiones algebraicas.

a) $y = (x - 3)^2 - 3$

b) $y = -2x^2 + 3$

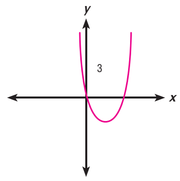
c) $y = x^3 + 3$

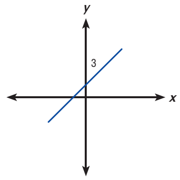
d) $y = x + 3$

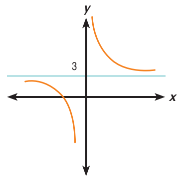
e) $y = \frac{2}{x}$

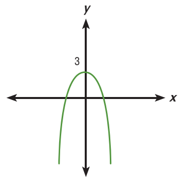
f) $y = \frac{2}{x} + 3$

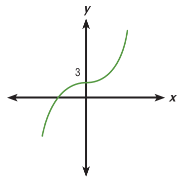
g) $y = 2x^2 - 3$

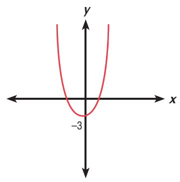
a)


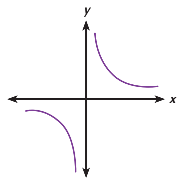
d)


f)


b)


c)


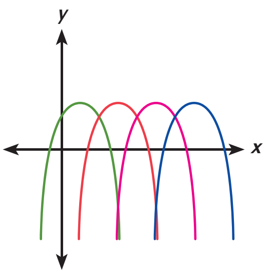
g)


e)


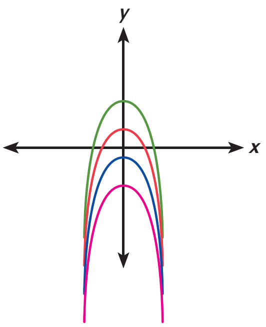
5. A continuación hay tres planos cartesianos. En cada uno de ellos hay un conjunto o familia de gráficas.

Relaciona las familias de gráficas con sus correspondientes conjuntos de expresiones algebraicas.

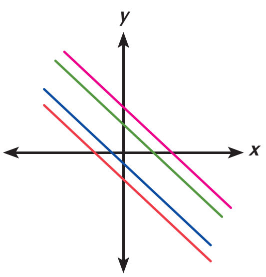
c)



a)



b)



a) $y = -x^2 - 3$

$y = -x^2 - 1$

$y = -x^2 + 1$

$y = -x^2 - 3$

b) $y = -x - 2$

$y = -x - 1$

$y = -x + 1$

$y = -x + 2$

c) $y = -(x - 2)^2 + 3$

$y = -(x - 4)^2 + 3$

$y = -(x - 6)^2 + 3$

$y = -(x - 8)^2 + 3$

d) $y = \frac{5}{x} - 4$

$y = \frac{5}{x}$

$y = \frac{5}{x} + 1$

$y = \frac{5}{x} + 4$

>>> Para saber más

Sobre la función cuadrática y su gráfica, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Funcion_cuadratica_parabola/index.htm
Ruta: Índice → características
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].

Sobre la función hipérbola y su gráfica, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Representacion_interpretacion_graficas/index.htm
Ruta: Índice → funciones de proporcionalidad inversa
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Propósito de la sesión. Estudiar las gráficas asociadas al llenado de recipientes con distintas formas.

Propósito de la actividad. Los alumnos ya estudiaron el problema del llenado de recipientes y sus correspondientes gráficas en la Secuencia 29 de Matemáticas II. Ahora se pretende establecer que el llenado de ciertos recipientes no es lineal, aunque la cantidad de agua que cae por minuto sea constante.
Sugerencia didáctica. Tomen unos minutos para repasar la Secuencia 29 de Matemáticas II y pida a los estudiantes que comparen los recipientes que ahí aparecen y los de la presente secuencia.
La diferencia es que mientras todos los recipientes que vieron en segundo grado son prismas rectangulares, los que aparecen en esta secuencia tienen partes "inclinadas" o curvas, lo que da lugar a que sus gráficas tengan secciones curvas.
Permita que los alumnos observen los recipientes y no les adelante información sobre cómo se verán las gráficas.

Propósito del Interactivo. Presentar ejemplos animados de fenómenos que dan lugar a gráficas formadas por secciones rectas y curvas.

Respuesta. La gráfica correcta es la e). Si se divide la alberca en dos secciones horizontales, se puede ver que la primera sección tiene una parte "inclinada": mientras más se va llenando esa sección de la alberca, mayor longitud tiene, por lo que el llenado se va haciendo más lento, lo que en la gráfica se refleja como una curva.
La segunda sección es un prisma rectangular, por lo que su llenado es constante y su gráfica, lineal.
Sugerencia didáctica. Éste puede ser un problema difícil para los alumnos. No los corrija si se equivocan, más adelante tendrán oportunidad de revisar sus respuestas.

SECUENCIA 20

Gráficas por pedazos

En esta secuencia aprenderás a interpretar y elaborar gráficas formadas por segmentos de líneas rectas y curvas que modelan llenado de recipientes y objetos en movimiento.

SESIÓN 1

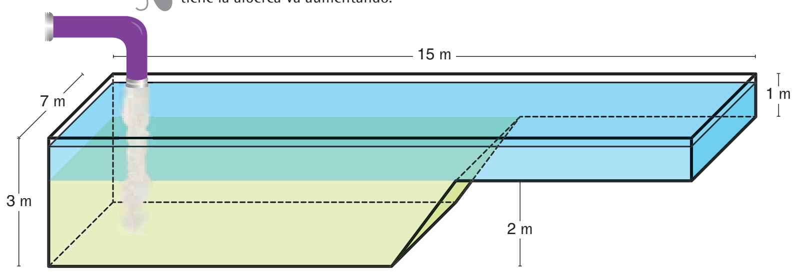
LAS ALBERCAS

>>> Para empezar

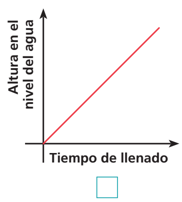
En la secuencia 29 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste a interpretar y elaborar gráficas formadas por segmentos de líneas rectas. En esta secuencia estudiarás gráficas formadas por secciones rectas y curvas.

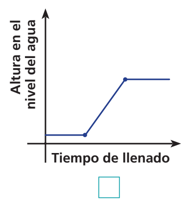
>>> Consideremos lo siguiente

Para llenar la alberca de la figura a continuación, se abre una llave que arroja siempre la misma cantidad de agua. Conforme va transcurriendo el tiempo, el nivel del agua que tiene la alberca va aumentando.



De las siguientes gráficas, ¿cuál representa la variación del nivel de agua respecto del tiempo transcurrido? Pon una ✓ a la que elijas.



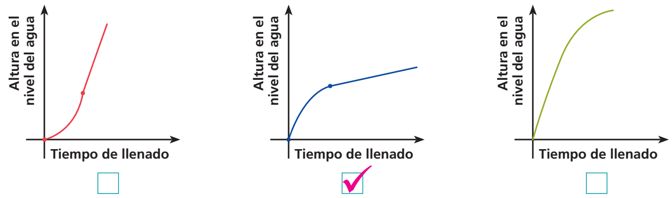


94

Eje
Manejo de la información.
Tema
Representación de la información.
Subtema
Gráficas.
Antecedentes
Anteriormente los alumnos estudiaron situaciones en las que una cantidad varía en función de la otra (lineales y no lineales), y las graficaron. En esta secuencia interpretarán gráficas en las que hay secciones rectas y curvas, y aprenderán a reconocer a cuáles situaciones representan.

Propósitos de la secuencia
Interpretar y elaborar gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan distintos fenómenos.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Las albercas** Estudiar las gráficas asociadas al llenado de recipientes con distintas formas.	Interactivo
2	**Diversos problemas** Resolver problemas a partir de gráficas con secciones rectas y/o curvas.	Programa 38 Interactivo

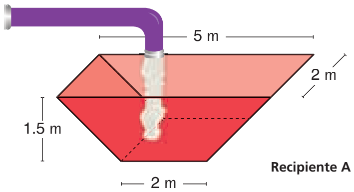


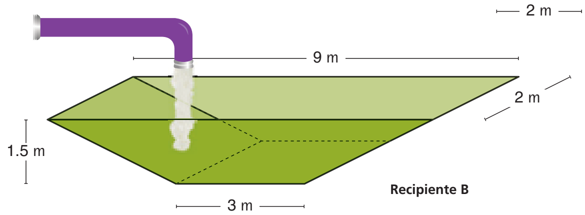
Comparen sus resultados y comenten cómo eligieron la gráfica correcta.

Sugerencia didáctica. Pase al pizarrón a tres o cuatro alumnos que hayan elegido gráficas distintas, para que expliquen las razones de su elección. Si todos los alumnos eligieron la misma gráfica, pida a dos de ellos que expliquen por qué.

>>> Manos a la obra

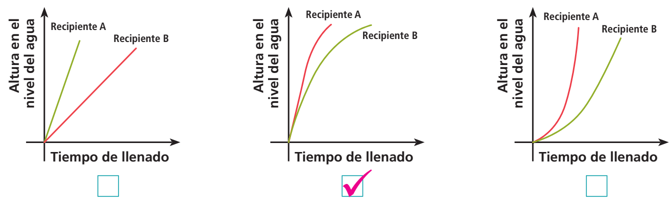
I. Los siguientes dos recipientes se comienzan a llenar al mismo tiempo, cada uno con una llave. Las dos llaves arrojan la misma cantidad de agua.





a) ¿Cuál de los dos recipientes se llenará primero? _______

b) ¿Cuál de las siguientes gráficas es la que corresponde al llenado de los recipientes? Pon una ✓ a la que elijas.



Comparen sus respuestas y comenten cómo decidieron cuál gráfica es la correcta.

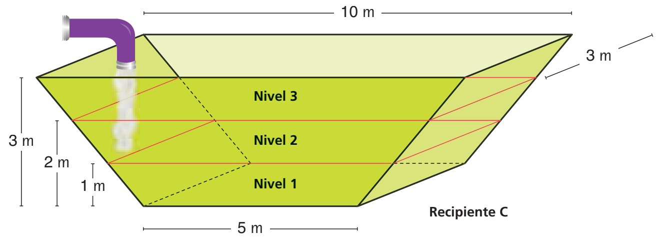
95

Respuesta.

a) El recipiente A es el que se llenará más rápido, porque aunque ambos tienen la misma forma, el A es más pequeño.

3

II. A continuación se presenta otro recipiente: el recipiente C.



Respuestas.

a) A la parte de 1 m a 2 m.

b) La parte de 1 m a 2 m.

c) La parte de 2 m a 3 m.

Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿A qué parte del recipiente C le cabe más agua, al nivel 1 o al nivel 2? ____________

Si se llenaran por separado cada uno de los niveles del recipiente C, suponiendo que la cantidad de agua que cae cada segundo lo hace de manera constante.

b) ¿Qué parte del recipiente C tarda más tiempo en llenarse, el nivel 1 o el nivel 2?

____

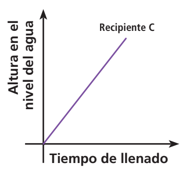
c) ¿Qué parte del recipiente C tarda más tiempo en llenarse, el nivel 2 o el nivel 3?

____

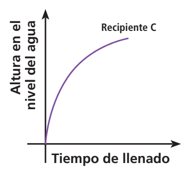
d) Pon una ✓ a la afirmación que describe correctamente la altura en el nivel del agua conforme transcurre el tiempo para el recipiente C. Recuerda que la cantidad de agua que ingresa en el recipiente cada segundo es constante.

- ☐ El nivel 1 (de 0 m a 1 m) se llena en el mismo tiempo que el nivel 2 (de 1 m a 2 m) porque ambas partes tienen 1 m de altura.
- ☑ La altura en el nivel del agua aumenta de manera constante porque ingresa la misma cantidad de agua cada segundo.
- ☐ El nivel 1 se llena mas rapido que el nivel 2 porque el volumen del nivel 2 es mayor que el del nivel 1, lo mismo sucede con el nivel 2 y el nivel 3.

e) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde al llenado del recipiente C? Pon una ✓ a la que elijas.



☐



☑

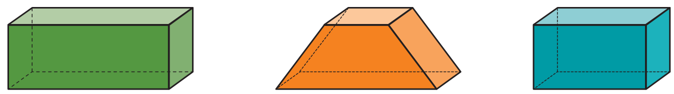
☐

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cuál de las gráficas anteriores corresponde a la siguiente afirmación?

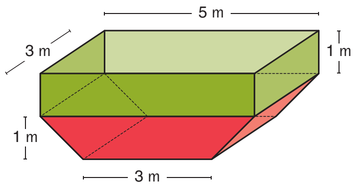
Al principio el nivel del agua aumenta más lentamente y luego más rápido porque, a mayor altura, se necesita menor volumen de agua para llenar el recipiente.

b) ¿Cuál de los siguientes recipientes corresponde a la afirmación anterior?



Recipiente D | Recipiente E | Recipiente F

III. Contesta las preguntas que se hacen sobre el llenado del siguiente recipiente.



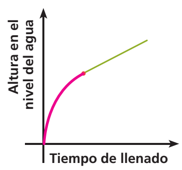
a) ¿A qué parte del recipiente le cabe más agua, a la parte roja o a la parte verde?

A la verde

b) Completa la siguiente descripción sobre la variación del nivel de agua respecto al tiempo de llenado del recipiente anterior.

En la parte roja (roja/verde)*, el nivel de agua aumenta* más rápido (más rápido/más despacio) *al principio y, luego, aumenta* más lento (más rápido/más despacio)*. En la parte* verde (roja/verde)*, el nivel del agua aumenta de manera constante.*

c) En el siguiente plano se trazó la gráfica correspondiente a la parte verde del recipiente. Completa la gráfica del llenado del recipiente con lo correspondiente a la parte roja.



Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

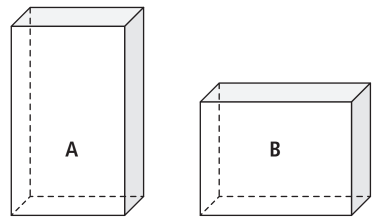
Respuestas.

a) La gráfica 3.

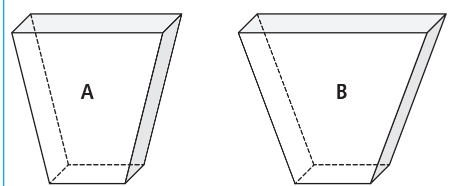
b) El recipiente E. La curva de la gráfica se "abre" hacia el lado contrario que la del recipiente C, porque ahora la parte a la que le cabe más agua del recipiente es la que está abajo, por lo tanto, al principio se llenará más lento, y conforme aumente el nivel de agua, será más rápido.

Posibles dificultades. En este momento de la sesión puede ser necesario que explique las gráficas si los alumnos aún tienen dificultades. Trácelas en el pizarrón y analicen sus diferencias.

La **gráfica 1** corresponde a recipientes con forma de prisma o cilindro. El **A** se llena más rápido, así que es menos ancho que el **B**.

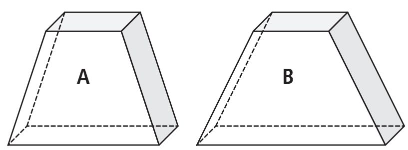


La **gráfica 2** representa el llenado de recipientes como estos:



Como la parte de abajo es más angosta que la de arriba en ambos recipientes, primero se llenan rápido y luego más lento.

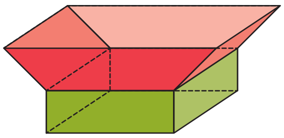
En cambio, en la **gráfica 3** pasa lo contrario, primero se llenan lento y luego más rápido porque la parte de abajo es más ancha que la de arriba.



Todos estos recipientes tienen una sola parte.

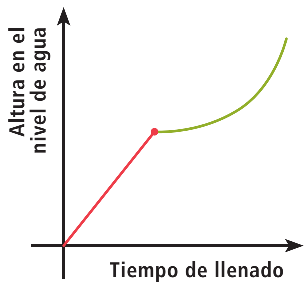
Sugerencia didáctica. Pida a un alumno que lea esta información en voz alta y que vaya describiendo las gráficas.

Después, plantéeles el siguiente problema: si se invirtieran los ejes ¿cómo se vería la gráfica del llenado de este recipiente?



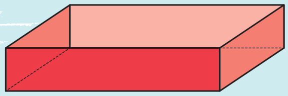
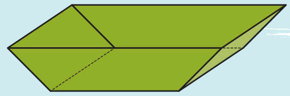
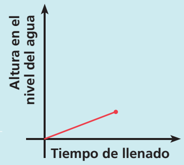
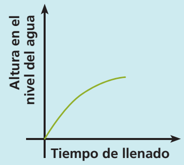
Es decir, el tiempo de llenado se debe representar en el eje vertical, y el nivel de agua en el eje horizontal.

La gráfica se vería así:

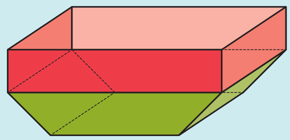


>>> A lo que llegamos

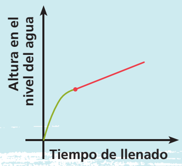
Con frecuencia encontramos situaciones en las que la gráfica asociada a dos cantidades que varían una respecto de la otra resulta ser la unión de dos o más segmentos de líneas rectas o curvas.

Para este recipiente	Para este recipiente
	
la gráfica que representa el aumento del nivel del agua respecto del tiempo es:	la gráfica que representa el aumento del nivel del agua respecto del tiempo es:
	

Y para el recipiente formado con la unión de los recipientes rojo y verde



la gráfica que representa el aumento del nivel del agua respecto del tiempo es la unión de las gráficas correspondientes a cada una de las partes:



98

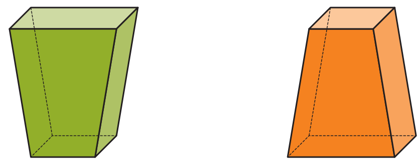
DIVERSOS PROBLEMAS

SESIÓN 2

>>> Lo que aprendimos

Para conocer más acerca de cómo elaborar gráficas formadas por segmentos de líneas rectas y curvas, pueden ver el programa *Llenado de recipientes*.

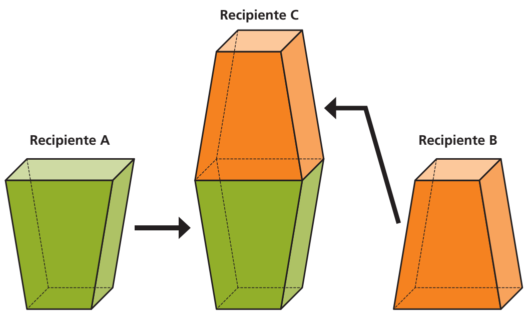
1. Para los siguientes recipientes contesta:



Recipiente A　　　Recipiente B

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas es la que corresponde al llenado de los recipientes? Pon una ✓ a la que elijas.

Observa que uniendo los recipientes A y B se obtiene un tercer recipiente que llamaremos recipiente C.



Propósito de la sesión. Resolver problemas a partir de gráficas con secciones rectas y/o curvas.

Integrar al portafolios. Elija uno o dos problemas de esta sesión para revisar las respuestas de los alumnos e integrarlas a su portafolios.

Posibles dificultades. Quizá para algunos estudiantes no sea clara la diferencia entre la gráfica 1 y la 2 porque se ven muy parecidas, a excepción de que el punto de intersección entre ambas ocurre primero en la 1. Pero, hay otra diferencia que es la que hace a una correcta y a la otra incorrecta: en la 1 se muestra que el recipiente **A** primero se llena despacio y luego más rápido, y que el **B** primero se llena rápido y luego más lento; pero ocurre exactamente lo contrario, por eso la gráfica correcta es la 2.

Propósito del programa 38. Ejemplificar la construcción de gráficas asociadas al llenado de recipientes.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito del Interactivo. Presentar ejemplos animados de fenómenos que dan lugar a gráficas formadas por secciones rectas y curvas.

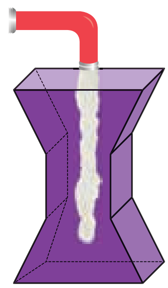
Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos cuál sería la gráfica correcta si los recipientes se hubiesen unido al revés, es decir, abajo el recipiente **B** y arriba el **A**.

Sugerencia didáctica. Si hay tiempo, diga a los alumnos que dibujen recipientes que den lugar a lo que las otras tres gráficas representan. También puede encargarlo como tarea.

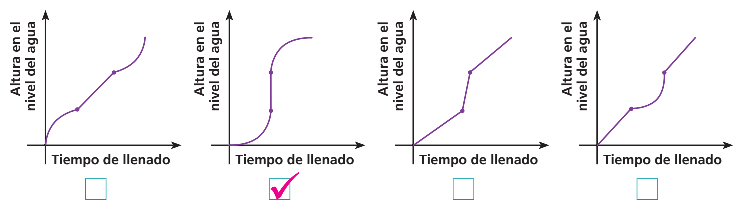
SECUENCIA 20

b) ¿Cuál de las siguientes gráficas es la que corresponde al llenado del recipiente C? Pon una ✓ a la que elijas.

2. Se abre una llave para llenar de agua un recipiente como el del dibujo, y la cantidad de agua que cae por minuto en el recipiente es la misma cada minuto.



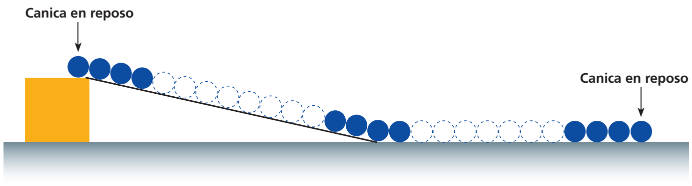
De las siguientes gráficas, ¿cuál representa la variación de la altura del nivel de agua que tiene el recipiente respecto del tiempo transcurrido? Pon una ✓ a la que elijas.



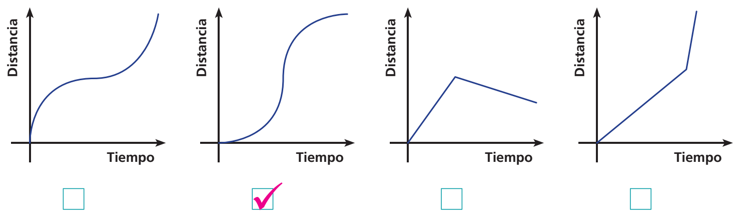
100

3. En la secuencia 18 de **Matemáticas III**, volumen II, aprendiste que la gráfica que modela el movimiento de una canica en el plano inclinado es un segmento de parábola.

Una canica se deja caer por un plano inclinado. Interesa describir su movimiento empezando en el momento en que la canica está en reposo en la parte más alta del plano, continuando cuando baja por el plano, luego cuando se mueve en el piso y hasta que queda en reposo:



¿Cuál de las siguientes gráficas representa la variación de la distancia recorrida por la canica con respecto al tiempo? Pon una ✓ a la que elijas.



En la gráfica que elegiste localiza los siguientes puntos y partes del recorrido:

a. El punto en el que la canica está en reposo.

b. La parte en la que la canica baja por el plano.

c. La parte en la que la canica se mueve en el piso.

d. El punto en el cual la canica se detiene.

Contesta:

¿En qué momento la canica tiene mayor velocidad?

☐ Al inicio.

☑ Cuando termina de bajar por el plano.

☐ Cuando está moviéndose en el piso.

Posibles dificultades. Los alumnos pueden pensar que la gráfica correcta es la 3 o la 4, ya que se ven parecidas a la representación de la bajada de la canica; pero esta idea es errónea.

Permítales contestar lo que ellos crean que es correcto, y cuando terminen todas las preguntas del número 3, si aún tienen dudas explíqueles que la gráfica debe estar formada por dos secciones, ambas curvas, porque la canica acelera y desacelera, es decir, su movimiento no es constante.

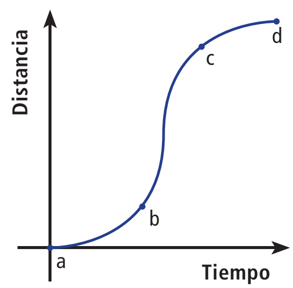
Respuestas.

a) En ese momento la canica no se ha movido y no ha pasado tiempo.

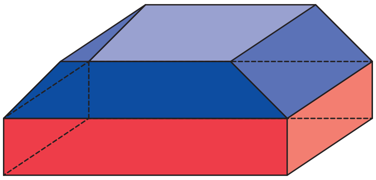
b) La canica va acelerando hasta que llega al piso.

c) La canica se desplaza por el plano y va desacelerando.

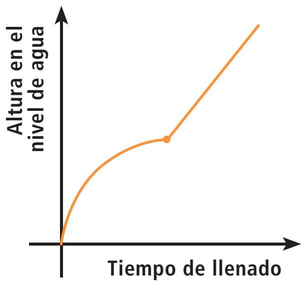
d) En ese momento la canica deja de moverse.



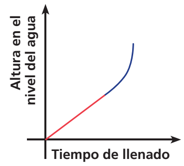
Respuesta. Sería una gráfica formada primero por un prisma o cilindro, luego tendría una parte que se va haciendo angosta (porque se va llenando más rápido). Podría ser un recipiente como este:



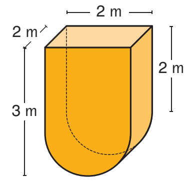
Respuesta. La gráfica tendría que mostrar una primera parte en la que primero se llena rápido y luego más lento, y una segunda parte en la que el llenado es constante, es decir, se vería como una línea recta.

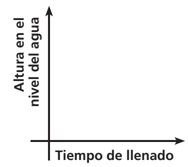


4. En tu cuaderno construye un recipiente cuya gráfica de llenado sea la siguiente:

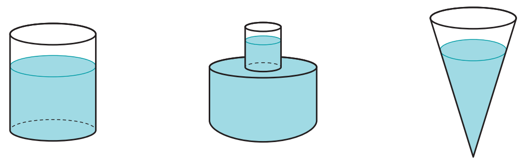


5. Para el siguiente recipiente, construye en el plano cartesiano un bosquejo de la gráfica de su llenado.





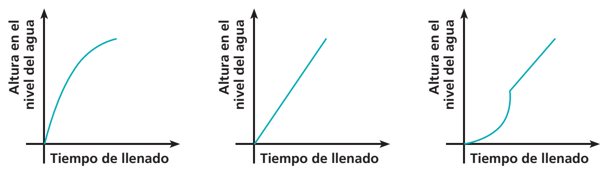
6. Las siguientes gráficas representan la variación de la altura en el nivel de agua que tiene cada recipiente respecto del tiempo transcurrido. Asocia cada uno de los tres recipientes con su respectiva gráfica.



Recipiente A
Gráfica ________

Recipiente B
Gráfica ________

Recipiente C
Gráfica ________



Gráfica 1 Gráfica 2 Gráfica 3

102

Respuestas.

Al **recipiente a** le corresponde la gráfica 2 porque su llenado es constante.

Al **recipiente b** la gráfica 3, debido a que es la única que tiene dos partes: la primera se va llenando rápido y luego más lento, y la segunda parte se llena de manera constante.

Al **recipiente c** le corresponde la gráfica 1, primero se llena rápido y luego más lento conforme se ensancha.

>>> Para saber más

Sobre la gráfica de una función no lineal, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Interpretacion_graficas/Indice_graficas.htm
Ruta: Índice → funciones no lineales
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.


1 , 6 , 15 ,

BLOQUE 4

Propósito de la sesión. Explorar sucesiones de figuras en las que la expresión que representa el número de elementos que tiene cualquier figura es cuadrática.

En estas sucesiones de figuras la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión numérica correspondiente no es constante pero la diferencia de las diferencias sí es constante.

Propósito de la actividad. Que los alumnos recuerden cómo encontrar la expresión algebraica que genera estas sucesiones y que recuerden cómo calcular la diferencia entre dos términos consecutivos.

En la secuencia 18 de **Matemáticas II**, volumen II, identificaron que, en este tipo de sucesiones, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.

Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos que, en las sucesiones en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, se obtiene la expresión general al multiplicar el lugar del término por la diferencia y se suma o se resta una constante adecuada. Puede dar el ejemplo de que, para obtener los términos de la segunda sucesión, deben sumar 1 a los términos de la primera sucesión.

Posibles dificultades. Si los alumnos tienen problemas para encontrar las diferencias en la última sucesión debido a los números negativos, escriba en el pizarrón una de las restas (por ejemplo, (–4) – (–1), y resuélvala junto con todo el grupo).

SECUENCIA 21

Diferencias en sucesiones

En esta secuencia aprenderás a encontrar una expresión algebraica cuadrática para calcular cualquier término en sucesiones numéricas y figurativas mediante el método de diferencias.

SESIÓN 1

NÚMEROS FIGURADOS

>>> Para empezar

En la secuencia 18 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste a encontrar la expresión algebraica que corresponde a una sucesión a partir de la diferencia entre dos términos consecutivos.

Completa la tabla.

Recuerda que:

Las diferencias se encuentran restando a un término el término anterior de la sucesión.

Sucesión	Diferencia	Expresión general
2, 4, 6, 8, 10, … 2 2 2 2	2	$2n$
3, 5, 7, 9, 11, … 2 2 2 2	2	$2n + 1$
2, 7, 12, 17, 22, … 5 5 5 5	5	$5n - 3$
2, 5, 8, 11, 14, … 3 3 3 3	3	$3n - 1$
5, 2, –1, –4, –7, … –3 –3 –3 –3	–3	$-3n + 8$

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de las literales.
Subtema
Patrones y fórmulas.
Antecedentes
En la secuencia 3 de **Matemáticas I**, volumen I, y en la secuencia 18 de **Matemáticas II**, volumen II, dada una sucesión numérica o figurativa, los alumnos encontraron la expresión algebraica de la forma $an + b$ que representa la sucesión, y, dada una expresión de ese tipo, generaron la sucesión. También identificaron que la diferencia entre dos términos consecutivos de esas sucesiones es constante. En esta secuencia van a encontrar las sucesiones que se generan a partir de una expresión cuadrática de la forma $an^2 + bn + c$ y van a utilizar el método de las diferencias para determinar la expresión de ese tipo que representa una sucesión.

Propósito de la secuencia
Determinar la expresión general cuadrática que representa sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de las diferencias.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Números figurados** Explorar sucesiones de figuras en las que la expresión que representa el número de elementos que tiene cualquier figura es cuadrática.	Programa 39 Interactivo
2	**Las diferencias en expresiones cuadráticas** Identificar que, cuando la expresión algebraica que representa una sucesión es cuadrática, la constante diferente de cero aparece en el nivel dos de las diferencias y viceversa.	
3	**El método de diferencias** Explorar el método de diferencias para determinar la expresión general cuadrática que representa una sucesión en la que en el nivel dos de las diferencias hay una constante diferente de cero.	Programa 40
4	**Apliquemos lo aprendido** Aplicar el método de diferencias para determinar la expresión general cuadrática que representa una sucesión.	

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente sucesión de figuras corresponde a los llamados ***números rectangulares***.

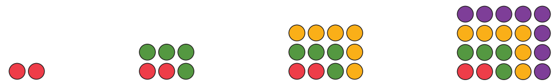


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

El ***n*-ésimo número rectangular** es el número de puntos que tiene el ***n*-ésimo** rectángulo de esta sucesión.

a) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 5? ________

b) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 10? ________

c) ¿Cuántos puntos tendrá la figura n? ________

>>> Manos a la obra

I. Observen la sucesión de figuras y completen la tabla.

Número de la figura	1	2	3	4	5	6	n
Número de renglones que tiene la figura	1	2	3	4	5	6	n
Número de puntos en cada renglón de la figura	2	3	4	5	6	7	$n + 1$
Total de puntos de la figura (número rectangular)	2	6	12	20	30	42	$n(n + 1)$

a) Escriban una regla para obtener el total de puntos de la figura de la sucesión que está en el lugar n ________________________

b) ¿Cuántos puntos tiene la figura 100? ________

c) ¿Cuál es el número de la figura que tiene 420 puntos? ________

Comparen sus soluciones y comenten:

¿Es cuadrática o lineal la expresión algebraica que corresponde al total de puntos de la figura n? Justifiquen su respuesta.

Posibles procedimientos. Los alumnos pueden identificar, por la forma en la que están coloreados los puntos, que para formar la figura 2 se añadieron 4 puntos verdes, para formar la figura 3 se añadieron 6 puntos amarillos, para formar la figura 4 se añadieron 8 puntos morados, entonces para formar la figura 5 se debe añadir 10 puntos.

Algo similar se puede hacer si determinan primero el número de puntos de cada figura (2, 6, 12, 20) y luego obtienen las diferencias entre los términos consecutivos (4, 6, 8).

Para encontrar el número de puntos de la figura 10 los alumnos pueden dibujar las figuras 5, 6, 7, 8, 9 y 10 o pueden continuar el patrón para encontrar el número de puntos de cada figura (30, 42, 56, 72, 90, 110) sin necesidad de dibujarlas.

Otro procedimiento, es darse cuenta que se puede obtener el número de puntos de cada figura al multiplicar el número de renglones por el número de puntos en cada renglón, así la figura 1 tiene 1×2 puntos, la figura 2 tiene 2×3 puntos, la figura 3 tiene 3×4 puntos, etc. De esta forma se puede determinar que la figura 5 tiene 5×6 puntos y la figura 10 tiene 10×11 puntos. Con este procedimiento se puede expresar el número de puntos de la figura n como $n(n + 1)$.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos por qué se llaman números rectangulares.

No anticipe a los alumnos ninguno de los procedimientos, Observe los que ellos realicen, tanto los correctos como los incorrectos, al final de la actividad pida a algunos alumnos que expliquen lo que hicieron. Es probable que los alumnos no puedan encontrar la respuesta al inciso c). Comenten entre todos si es posible expresar los puntos de la figura n con una regla de la forma $an + b$.

1

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen que el número de puntos de cada figura se puede expresar al multiplicar el número de renglones por el número de puntos en cada renglón.

Posibles dificultades. Si tienen dificultades para completar la última columna usted puede ayudarlos haciéndoles preguntas para que descubran la regularidad en las columnas anteriores (el número de renglones es el mismo que el número de figura, el número de puntos es el número de renglones más 1, y el total de puntos se obtiene al multiplicar los dos datos anteriores).

Respuestas.

a) $n(n + 1)$

b) $100(101) = 10\,100$

c) Es la figura 20 (tiene 20×21 puntos).

Propósito del Interactivo. Que el alumno descubra que los primeros tres términos de una sucesión cuadrática determinan completamente la fórmula general de la sucesión y aprenda a calcularla usando el método de diferencias.

Posibles dificultades. Algunos alumnos podrán pensar que la expresión algebraica es lineal. Pregunte a los alumnos cuál es el resultado de desarrollar la expresión $n(n + 1)$. El resultado es $n^2 + n$, y entonces la expresión es cuadrática.

Propósito de la actividad. Los alumnos van a identificar que las diferencias forman una nueva sucesión.

II. Al calcular las **diferencias** de los términos de una sucesión descrita por una expresión cuadrática se encuentran regularidades importantes. Contesten lo que se les pide a continuación.

a) Completen la tabla para después calcular las **diferencias** entre los términos de la sucesión de números rectangulares.

Número de la figura	1	2	3	4	5	6
Número rectangular	2	6	12	20	30	42

Diferencias de nivel 1: 4, 6, 8, 10, 12

Como pueden observar las diferencias de nivel 1 forman una nueva sucesión. El primer término de esta sucesión es **4**, el segundo término es **6**, etcétera.

b) ¿Cuál es el sexto término de esta sucesión? 14

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos cuál es la relación entre los puntos que se agregan al pasar de una figura a la siguiente y la sucesión de las diferencias que encontraron en esta actividad. Pida a los alumnos que indiquen los primeros 10 términos de la sucesión de las diferencias.

Comparen sus soluciones e identifiquen los puntos que se agregaron al pasar de una figura a la siguiente.

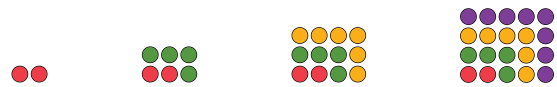


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿De qué color son los puntos que se agregaron a la figura 1 para obtener la figura 2? verde ¿Cuántos son? 4

b) ¿Cuántos puntos y de qué color se agregaron a la figura 2 para obtener la figura 3? 6 puntos amarillos

c) ¿Cuántos puntos y de qué color se agregaron a la figura 3 para obtener la figura 4? 8 puntos morados

d) ¿Cuántos puntos se agregarían a la figura 4 para obtener la quinta figura? 10 puntos

III. A las diferencias entre los términos de las diferencias de nivel 1 se les llama ***diferencias de nivel 2.***

a) Completen la siguiente tabla para calcular las diferencias de nivel 2.

Número de la figura	1	2	3	4	5	6
Número rectangular	2	6	12	20	30	42

Diferencias de nivel 1 4 6 8 10 12

Diferencias de nivel 2 2 2 2 2

b) Todas las diferencias del nivel 2 son iguales a un número. ¿De qué número se trata? ____________

c) ¿Cuántos puntos más tendrá la figura 7 que la figura 6? __________

d) ¿Cuántos puntos en total tendrá la figura 7? __________

Comparen sus soluciones.

IV. Consideren ahora la siguiente sucesión de figuras.

Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

La sucesión del número de puntos que tiene cada triángulo es llamada ***sucesión de números triangulares***: 1, 3, 6, 10, …

Contesten lo que se pide para encontrar una expresión algebraica general para la sucesión de números triangulares.

a) Una de las siguientes afirmaciones describe correctamente a la sucesión de números triangulares. Subráyenla.

- La sucesión de los números triangulares aumentan de dos en dos.
- Cualquier número triangular es la mitad del número rectangular que ocupa el mismo lugar en su respectiva sucesión.
- El número triangular que está en el lugar n se obtiene con la fórmula n^2.

b) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite calcular el número de puntos que tiene el triángulo que está en el lugar n? Subráyenla.

- $n + 2$
- $\frac{(n+1)n}{2}$
- n^2

109

Propósito de la actividad. Los alumnos van a identificar que, en la sucesión de las diferencias de nivel 1 que encontraron en la actividad anterior, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.

Respuestas.

b) Son iguales a 2.

c) 14 puntos más.

d) Tiene 56 puntos.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban en sus cuadernos los primeros diez o doce términos de la sucesión de números rectangulares, las sucesiones de diferencias de nivel 1 y de nivel 2 y la expresión algebraica para generar los números rectangulares. Pregunte al grupo cuántos puntos tiene la figura 50 y la 84, por ejemplo, para que utilicen la expresión algebraica (basta con multiplicar 50×51 u 84×85).

Propósito de la actividad. Los alumnos van a calcular las diferencias de nivel 1 y las diferencias de nivel 2 en la sucesión de números triangulares y van a determinar la expresión algebraica para generar esta sucesión.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos porqué se llaman números triangulares.

Propósito de las preguntas. Identificar que cada número triangular es la mitad del correspondiente número rectangular, y por lo tanto la expresión algebraica para la sucesión de números triangulares es $\frac{(n+1)n}{2}$.

Sugerencia didáctica. Si algunos alumnos tienen dificultades para determinar cuál es la expresión algebraica, usted puede pedirles que sustituyan la n por los valores 1, 2, 3, 4 y 5 para que encuentren las sucesiones que se generan con cada una de las expresiones.

Sugerencia didáctica. En este momento es importante que todos identifiquen que la expresión algebraica es $\frac{(n+1)n}{2}$ y que es cuadrática. Si tuvieron dificultades para determinarlo en la actividad usted puede hacerles preguntas que los ayuden a observar que cada número triangular es la mitad que el correspondiente número rectangular. Si lo considera conveniente, dibuje en el pizarrón la sucesión de figuras de números rectangulares y pida a algunos alumnos que pasen a señalar, en cada figura, las dos partes que corresponden a los números triangulares.

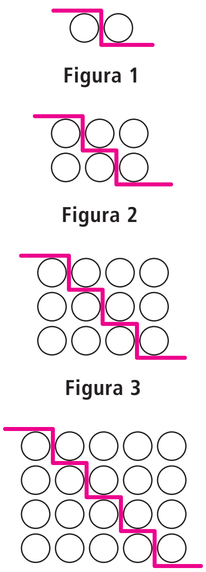


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

2

c) Completen la siguiente tabla con los números triangulares y las diferencias.

Número de la figura	1	2	3	4	5	6
Número triangular	1	3	6	10	15	21

Diferencias

Nivel 1: 2, 3, 4, 5, 6

Nivel 2: 1, 1, 1, 1

d) ¿Cómo se comparan las diferencias de nivel 2? Iguales

¿Por qué creen que suceda esto? Porque la sucesión formada en las diferencias del nivel 1 aumenta de uno en uno

Comparen sus soluciones y comenten:

a) ¿A la sucesión de los números triangulares le corresponde una expresión general lineal o cuadrática?

b) ¿Qué expresión le corresponde a la sucesión de las diferencias de nivel 1?

>>> A lo que llegamos

Cuando la expresión general que corresponde a una sucesión es cuadrática, se encuentran las siguientes regularidades:

- Las **diferencias de nivel 1** son diferentes entre sí.
- Las **diferencias de nivel 2** son iguales a una constante diferente de cero.

Para analizar más ejemplos de sucesiones de figuras y la expresión asociada, pueden ver el programa *Sucesiones de figuras y expresiones cuadráticas*.

>>> Lo que aprendimos

Considera la sucesión de los números cuadrados 1, 4, 9, 16, 25, …

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿Cuál es la expresión general que permite encontrar el número de puntos de la figura que ocupa el lugar n en la sucesión de números cuadrados? ______

110

Propósito del programa 39. Obtener las diferencias sucesivas de los términos de una sucesión y determinar la expresión general que le corresponde al enésimo término.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos por qué se llaman números cuadrados.

Respuesta. La expresión general es n^2.

b) Completen la tabla y las diferencias.

Número de la figura	1	2	3	4	5
Número cuadrado	1	4	9	16	25

Diferencias
- Nivel 1: 3, 5, 7, 9
- Nivel 2: 2, 2, 2

c) ¿Cuál es la constante que aparece en las diferencias del nivel 2? ____________ ,

¿es igual o diferente de cero? ______________________

SESIÓN 2

Propósito de la sesión. Identificar que, cuando la expresión algebraica que representa una sucesión es cuadrática, la constante diferente de cero aparece en el nivel dos de las diferencias y viceversa.

LAS DIFERENCIAS EN EXPRESIONES CUADRÁTICAS

>>> Para empezar

En la sesión 1 estudiaron algunas sucesiones en las que las diferencias de nivel 2 eran una constante diferente de cero. ¿Sucederá esto siempre?

>>> Manos a la obra

Propósito de la actividad. Encontrar los términos que faltan en algunas sucesiones a partir de expresiones lineales, cuadráticas y cúbicas para analizar las diferencias.

Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos que primero se realizan los exponentes, luego las multiplicaciones y luego las sumas y las restas.

I. Las **diferencias** pueden ayudar a determinar muchas características importantes de las sucesiones numéricas, dependiendo del tipo de las expresiones algebraicas que les corresponden: lineales, cuadráticas o cúbicas.

Para explorar lo anterior completen y analicen la tabla siguiente:

Expresión general del término enésimo	Sucesión original y sus diferencias
$2n - 1$	1, 3, 5, 7, 9, … 2 2 2 2 0 0 0
$-3n + 10$	7, 4, 1, −2, −5, … −3 −3 −3 −3 0 0 0
$n^2 - n$	0, 2, 6, 12, 20, … 2 4 6 8 2 2 2

111

Respuestas.

a) En el nivel 1.

b) En el nivel 2.

c) En el nivel 3.

Sugerencia didáctica. Si no lo hicieron, pida a los alumnos que encuentren las diferencias en el nivel 3 para la expresión n^3.

Expresión general del término enésimo	Sucesión original y sus diferencias
n^3	1, $\boxed{8}$, 27, $\boxed{64}$, 125, … 7, 19, 37, 61 $\boxed{12}$ $\boxed{18}$ $\boxed{24}$
$-2n^2 + 5$	3, $\boxed{-3}$, −13, −27, −45, … $\boxed{-6}$ −10 $\boxed{-14}$ $\boxed{-18}$ $\boxed{-4}$ $\boxed{-4}$ $\boxed{-4}$

En los siguientes incisos, escribe en qué nivel de las diferencias aparece una constante diferente de cero:

a) cuando la expresión general del término enésimo es lineal. ____________

b) cuando la expresión general del término enésimo es cuadrática. ____________

c) cuando la expresión general del término enésimo es cúbica. ____________

Comparen sus respuestas.

II. Completen las siguientes tablas de acuerdo con la expresión general del enésimo término.

a) Expresión general: $3n^2 + 2$

Lugar	1	2	3	4
Término	5	14	29	50

Diferencias
- Nivel 1: 9, 15, 21
- Nivel 2: 6, 6

b) Expresión general: $3n^2 + n$

Lugar	1	2	3	4
Término	4	14	30	52

Diferencias
- Nivel 1: 10, 16, 22
- Nivel 2: 6, 6

c) Expresión general: $-2n^2$

Lugar	1	2	3	4
Término	−2	−8	−18	−32

Diferencias
- Nivel 1: −6, −10, −14
- Nivel 2: −4, −4

d) Expresión general: $-2n^2 + 4$

Lugar	1	2	3	4
Término	2	−4	−14	−28

Diferencias
- Nivel 1: −6, −10, −14
- Nivel 2: −4, −4

a) ¿Para cuáles expresiones generales la constante en las diferencias es 6?
Para $3n^2 + 2$ y $3n^2 + n$

b) ¿Qué constante apareció en los casos donde las expresiones generales son $-2n^2$ así como $-2n^2 + 4$? -4

III. Encuentren las diferencias de cada una de las siguientes sucesiones numéricas.

4, 16, 36, 64, …
Nivel 1: 12, 20, 28
Nivel 2: 8, 8

2, 14, 34, 62, …
Nivel 1: 12, 20, 28
Nivel 2: 8, 8

5, 17, 37, 65, …
Nivel 1: 12, 20, 28
Nivel 2: 8, 8

Completen la tabla siguiente.

Sucesión	Constante de las diferencias (diferente de cero)	Nivel donde aparece	Expresión general del enésimo término
4, 16, 36, 64, …	8	Nivel 2	$4n^2$
2, 14, 34, 62, …	8	Nivel 2	$4n^2 - 2$
5, 17, 37, 65, …	8	Nivel 2	$4n^2 + 1$

Comparen sus respuestas y compartan los procedimientos que usaron para encontrar las expresiones generales.

>>> A lo que llegamos

Al obtener las diferencias de una sucesión numérica, en general sucede que:

- **Si en el nivel 2 de las diferencias aparece una constante diferente de cero, la expresión general es cuadrática.**
- **Cuando la expresión general de la secuencia es cuadrática, la constante que aparece en el nivel 2 de las diferencias es el doble del coeficiente del término cuadrático de la expresión.**

A partir de la información anterior, contesten:

a) ¿Qué valor tendrá la constante de las diferencias de nivel 2 cuando la expresión general del término enésimo es $3n^2$? 6

b) ¿Qué valor tendrá la constante de las diferencias de nivel 2 cuando la expresión general del término enésimo es $1.5n^2 + 2$? 3

113

Posibles dificultades. Si los alumnos no logran encontrar las expresiones generales usted puede darles varias pistas: escriba en el pizarrón la sucesión de los números cuadrados (1, 4, 9, 16, …) y pregunte a los alumnos cuál es la relación de estos números con los de la primera sucesión (cada uno de los cuadrados se multiplica por 4 para obtenerlos).

Para las siguientes sucesiones puede preguntarles cómo se obtiene cada término de estas sucesiones a partir de los términos de la primera sucesión: si a los términos de la primera sucesión les restan 2 obtienen los términos de la segunda sucesión, pero si les aumentan 1 encuentran la tercera sucesión. De esta manera pueden obtener el término independiente que debe acompañar al término cuadrático $4n^2$.

2

Sugerencia didáctica. En caso de que los alumnos no se pongan de acuerdo en cuáles son las expresiones correctas, puede pedirles que evalúen esas expresiones para verificar sus respuestas.

Es importante que los alumnos identifiquen en este momento que la constante del nivel 2 de las diferencias es el doble del coeficiente del término cuadrático en la expresión general.

Para ello, puede pedirles que se fijen en las diferencias del nivel 2 para todas las sucesiones de la sesión que tienen una expresión cuadrática.

Sugerencia didáctica. Escriba las siguientes sucesiones en el pizarrón (de una en una) y luego pase a un alumno para que encuentre los cinco términos que siguen. Se espera que utilicen las diferencias para encontrar el patrón, pero también se puede hacer si se determina primero la expresión algebraica.

3, 12, 27, 48, …

−4, 2, 12, 26, …

−11, −20, −35, −56, …

Las expresiones para estas sucesiones son: $3n^2$, $2n^2 - 6$ y $-3n^2 - 8$.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que obtengan los primeros 5 términos de cada sucesión y que verifiquen sus respuestas.

Propósito de la sesión. Explorar el método de diferencias para determinar la expresión general cuadrática que representa una sucesión en la que en el nivel dos de las diferencias hay una constante diferente de cero.

La expresión general es de la forma ***an***^{2} + ***bn*** + ***c***, en el método de las diferencias se plantean tres ecuaciones con las que se encuentra el valor de ***a***, ***b*** y ***c***.

Sugerencia didáctica. El método de las diferencias se describe en el *Fichero de actividades didácticas, Matemáticas.* Si tiene acceso a él es recomendable que lo consulte, aunque debe tomar en cuenta que las actividades que ahí se presentan tienen un nivel superior al que se pide en el programa para este apartado.

Sugerencia didáctica. Se espera que los alumnos calculen las diferencias de nivel 1 y las diferencias de nivel 2, y que con ellas obtengan los términos que se piden en la sucesión. Permita que intenten encontrar la expresión algebraica, al menos deben identificar que el término cuadrático es $2n^2$ ya que las diferencias de nivel 2 son iguales a 4. Si algún alumno obtuvo una expresión algebraica, aunque no sea la correcta, pídale que justifique su respuesta (debe evaluarla para obtener los primeros términos de la sucesión) y que explique cómo la obtuvo.

Respuestas.

a) 193

b) 783

c) $2n^2 - n + 3$.

SECUENCIA 21

SESIÓN 3

EL MÉTODO DE DIFERENCIAS

>>> Para empezar

No siempre es fácil determinar la expresión general cuadrática de una sucesión, sin embargo, existe un método que ayuda a obtenerla: ***el método de diferencias***.

En esta sesión aprenderán a usarlo.

>>> Consideremos lo siguiente

Dada la sucesión: 4, 9, 18, 31, …,

Si la sucesión continúa:

a) ¿Qué término ocupará el lugar 10? __________

b) ¿Qué término ocupa el lugar 20? __________

c) ¿Cuál es la expresión algebraica general del término enésimo de esta sucesión?

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Obtengan las diferencias de los niveles 1 y 2. Verifiquen si en el nivel 2 de las diferencias aparece una constante diferente de cero.

a) Completen el siguiente esquema.

4, 9, 18, 31, …

$\boxed{5}$ $\boxed{9}$ $\boxed{13}$

$\boxed{4}$ $\boxed{4}$

Como las diferencias de nivel 2 son una constante distinta de cero, la expresión algebraica general del término enésimo de la sucesión es cuadrática: $an^2 + bn + c$, donde n representa el lugar del término. Para determinar los coeficientes a, b, c de esta expresión se puede usar el método de las diferencias.

114

Propósito de la actividad. Los alumnos van a identificar que, con las diferencias de nivel 1 y de nivel 2, es posible obtener la expresión algebraica que representa a una sucesión.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos qué representa cada una de las literales: ***n***, ***a***, ***b*** y ***c***.

Por lo que hicieron en la sesión pasada, los alumnos ya pueden encontrar el valor de ***a***. Pregunte al grupo si saben cuál es.
(En el ejemplo, ***a*** es la mitad de la diferencia de nivel 2, es decir que ***a*** = 2)

Método de diferencias

Para determinar los coeficientes de la expresión $an^2 + bn + c$, hay que resolver las ecuaciones que se obtienen al considerar que:

- El doble del coeficiente a es igual a la constante de las diferencias de nivel 2.
- La suma $3a + b$ es igual al primer término de las diferencias de nivel 1.
- La suma $a + b + c$ es igual al primer término de la sucesión.

Del esquema pueden obtenerse varias ecuaciones que al resolverse permiten obtener los valores de los coeficientes a, b, c.

$\boxed{a + b + c} \longleftrightarrow 4, \quad 9, \quad 18, \quad 31, \ldots$

$\boxed{3a + b} \longleftrightarrow \boxed{5} \quad \boxed{9} \quad \boxed{13}$

$\boxed{2a} \longleftrightarrow \boxed{4} \quad \boxed{4}$

b) Completen el esquema y resuelvan las ecuaciones que se obtienen al aplicar el método de las diferencias a esta sucesión.

$2a = \boxed{2}$ $\qquad 3a + b = \boxed{5}$ $\qquad a + b + c = \boxed{4}$

$a =$ 2

$b =$ –1

$c =$ 3

c) Sustituyan los valores de a, b, c en la expresión $an^2 + bn + c$ y simplifiquen eliminando los paréntesis.

$an^2 + bn + c = (\ 2\ )n^2 + (-1)n + (\ 3\ ) = 2n^2 - n + 3$

d) Verifiquen si la expresión general cuadrática que obtuvieron funciona para los cuatro primeros términos de la sucesión 4, 9, 18, 31, …

Primer término $n = 1$: $(\ 2\ )1^2 + (-1)1 + (\ 3) = 2 - 1 + 3 = 4$

Segundo término $n = 2$: $(\ 2\ )2^2 + (-1)2 + (\ 3) = 8 - 2 + 3 = 9$

Tercer término $n = 3$: $(2)3^2 + (-1)3 + (3) = 18 - 3 + 3 = 18$

Cuarto término $n = 4$: $(2)4^2 + (-1)4 + (3) = 32 - 4 + 3 = 31$

Sugerencia didáctica. Escriba el diagrama en el pizarrón y complételo con todo el grupo. Comente que, como la diferencia de nivel 2 es constante, la sucesión se genera con una expresión de la forma $an^2 + bn + c$.

Pida a dos alumnos que evalúen en $an^2 + bn + c$ cuando $n = 1$ y $n = 2$, pregunte al grupo qué términos de la sucesión se obtienen al hacer esta evaluación (se obtiene 4 y 9, el primer y el segundo término de la sucesión). De ahí se establecen las ecuaciones siguientes:

$a(1)^2 + b(1) + c = 4$

$a(2)^2 + b(2) + c = 9$,

es decir que

$a + b + c = 4$

$4a + 2b + c = 9$,

Para obtener $3a + b$ se restan los lados correspondientes en las dos igualdades:

$(4a + 2b + c) - (a + b + c) = 9 - 4$

Pida a los alumnos que realicen estas restas en sus cuadernos, deben obtener

$3a + b = 5$.

Este procedimiento se puede realizar con cualquier sucesión, es por ello que se utilizan las ecuaciones señaladas en el recuadro azul.

Comente a los alumnos que este método se conoce como el método de las diferencias porque se utiliza las diferencias para encontrar la expresión que representa a la sucesión.

2

Sugerencia didáctica. Si los alumnos tienen dificultades, puede comentarles que resuelvan las ecuaciones en el orden en que están, de izquierda a derecha.

En el ejemplo, con la primera ecuación se obtiene el valor de $a = 2$.

Se sustituye la a por este valor en la segunda ecuación:

$3(2) + b = 5$, y se despeja b.

$6 + b = 5$

$b = 5 - 6 = -1$

Se sustituye la a y la b por los valores encontrados en la tercera ecuación:

$2 + (-1) + c = 4$, y se despeja c.

$1 + c = 4$

$c = 4 - 1 = 3$

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que, aunque en la expresión $an^2 + bn + c$ aparece dos veces el signo de suma, como en este caso el valor de b es negativo, en la expresión que representa a la sucesión el término lineal se resta.

Posibles procedimientos. Los alumnos pueden continuar la sucesión hasta acercarse al número 193 y al 200 para determinar si pertenecen o no a la sucesión.

Otro procedimiento consiste en evaluar valores para n en la expresión $2n^2 - n + 3$ para obtener los términos de la sucesión hasta acercarse al 200. Por ejemplo para $n = 10$ se obtiene:

$(2)10^2 + (-1)10 + (3) = 200 - 10 + 3 = 193$

Para $n = 11$ se obtiene:

$(2)11^2 + (-1)11 + (3) = 242 - 11 + 3 = 234$

Por lo tanto 193 si pertenece a la secuencia pero 200 no.

Otro procedimiento, más complejo pero más efectivo, consiste en resolver la ecuación cuadrática, $2n^2 - n + 3 = 193$ y ver si tiene alguna solución entera positiva.

Si tiene solución entera positiva el 193 pertenece a la sucesión, en caso contrario no pertenece a la sucesión.

Para ello se utiliza la fórmula general para resolver la ecuación

$2n^2 - n - 190 = 0$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1520}}{4}$$

$$n = \frac{1 \pm 39}{4}$$

Las dos soluciones son

$n = 10$

$n = -9.5$

Entonces la ecuación tiene una solución entera positiva $n = 10$, por lo que el 193 es el décimo término en la sucesión.

1

Comparen sus respuestas y comenten:

a) El número 193 pertenece a esta sucesión, ¿en qué lugar está? ________

b) ¿Pertenece 200 a esta sucesión? ________ ¿Por qué? ________

II. Usando el método de diferencias, encuentren la expresión general de la sucesión 1, 3, 11, 25, ... y contesten lo que se les pide a continuación.

a) Encuentren las diferencias. Completen.

1, 3, 11, 25, ...

Nivel 1 $\boxed{2}$ $\boxed{8}$ $\boxed{14}$

Nivel 2 $\boxed{6}$ $\boxed{6}$

b) Resuelvan las ecuaciones que se obtienen al aplicar el método de las diferencias a esta sucesión.

$2a = \boxed{6}$ $3a + b = \boxed{2}$ $a + b + c = \boxed{1}$

$a =$ 3

$b =$ −7

$c =$ 5

c) Sustituyan por los valores de a, b, c en la expresión $an^2 + bn + c$ y simplifiquen.

$an^2 + bn + c = (\ 3\ )n^2 + (-7)n + (\ 5\ ) = 3n^2 - 7n + 5$

d) Verifiquen si la expresión general cuadrática que obtuvieron funciona para los primeros términos de la sucesión 1, 3, 11, 25, ...

Comparen sus respuestas y comenten.

a) El número 185 pertenece a esta sucesión, ¿en qué lugar está? ________

b) ¿Pertenece 333 a esta sucesión? ________ ¿Por qué? ________

Para saber cómo se obtienen las expresiones $2a$, $3a + b$ y $a + b + c$, observen el programa *El método de diferencias*.

116

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos realicen la verificación, porque esto les da un procedimiento para validar su respuesta.

Sugerencia didáctica. Si los alumnos ya han comprendido como contestar estas preguntas, aproveche este momento para pedirles que las respondan con un procedimiento distinto al que usaron en la actividad anterior. En particular puede pedirles que utilicen la fórmula general, si es que no lo hicieron antes.

Respuestas. El número 185 sí pertenece a la sucesión, 333 no.

Propósito del programa 40. Mostrar el método de diferencias y utilizarlo para obtener la expresión general del enésimo término de una sucesión.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

APLIQUEMOS LO APRENDIDO

SESIÓN 4

Propósito de la sesión. Aplicar el método de diferencias para determinar la expresión general cuadrática que representa una sucesión.

1. Observa la siguiente sucesión de figuras.

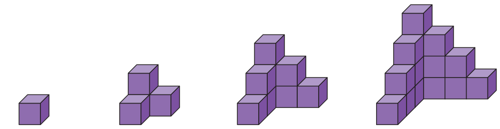


Figura 1　Figura 2　Figura 3　Figura 4

a) Dibuja la figura 5 de la sucesión anterior.

b) ¿Cuántos cubos tendrá la figura 100 de la sucesión? 10 000

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número de cubos de cualquier figura que esté en la sucesión? n^2

d) Si se sabe que una de las figuras que forman la sucesión tiene 2 704 cubos, ¿qué número corresponde a esa figura en la sucesión? Es la figura 52

Respuesta. Para esta sucesión no es necesario utilizar el método de las diferencias. Lo importante es que los alumnos identifiquen cómo están colocados los cubos que no se ven en las figuras.

2. Observa la siguiente sucesión de figuras.

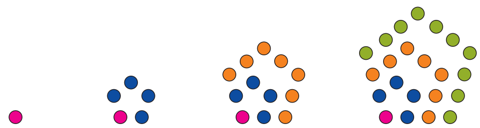


Figura 1　Figura 2　Figura 3　Figura 4

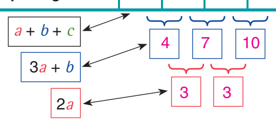
a) ¿Cuántos puntos se le agregaron a la figura 2 para formar la figura 3? _______

b) ¿Cuántos puntos se le agregaron a la figura 3 para formar la figura 4? _______

c) ¿Cuántos puntos se le agregarán a la figura 4 para formar la figura 5? _______

d) Encuentra la expresión general cuadrática de los números pentagonales mediante el método de diferencias.

Número de la figura	1	2	3	4
Números pentagonales	1	5	12	22



Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad. Si tienen dificultades revise con ellos la actividad I del apartado *Manos a la obra* de las sesión 3.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que dibujen en sus cuadernos las dos figuras siguientes.

e) Plantea y resuelve las ecuaciones para encontrar los valores de a, b, c.

E_1: $2a = 3$ $\longrightarrow$ $a =$ 1.5

E_2: $3a + b = 4$ $\longrightarrow$ $b =$ -0.5

E_3: $a + b + c = 1$ $\longrightarrow$ $c =$ 0

La expresión general cuadrática que corresponde a la sucesión 1, 5, 12, 22, ... es $1.5n^2 - 0.5n$

f) Verifica si la expresión general cuadrática que escribiste funciona para las cuatro primeras figuras de la sucesión.

Figura 1: $1.5(1)^2 - 0.5(1) = 1.5 - 0.5 = 1$

Figura 2: $1.5(2)^2 - 0.5(2) = 6 - 1 = 5$

Figura 3: $1.5(3)^2 - 0.5(3) = 13.5 - 1.5 = 12$

Figura 4: $1.5(4)^2 - 0.5(4) = 24 - 2 = 22$

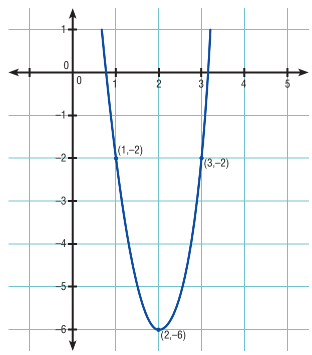
g) ¿Cuántos puntos tienen las figuras que ocupan los lugares 10 y 15?

Figura 10: $1.5(10)^2 - 0.5(10) = 150 - 5 = 145$

Figura 15: $1.5(15)^2 - 0.5(15) = 337.5 - 7.5 = 330$

Sugerencia didáctica. Comente a los alumnos que este método funciona para cualquier parábola si se conocen tres puntos que pertenezcan a la parábola.

3. Usa el método de diferencias para encontrar la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que corresponde a la siguiente gráfica.



118

a) Puntos señalados en la gráfica: (1,–2), (2,–6), (3,–2)

Abscisa (x)	1	2	3
Ordenada (y)	–2	–6	–2

$a + b + c$ → -4 4 12

$3a + b$ → -4

$2a$ → 8 8

4. Resuelve las ecuaciones para encontrar los valores de a, b, c.

E_1: $2a = 8$ ⟶ $a =$ 4

E_2: $3a + b = -4$ ⟶ $b =$ –16

E_3: $a + b + c = -2$ ⟶ $c =$ 10

a) ¿Cuál es función cuadrática para calcular la ordenada si se conoce la abscisa?

$ax^2 + bx + c =$ $4x^2 - 16x + 10$

b) Verifica si funciona la expresión anterior para los puntos (1, –2), (2, –6) y (3, –2).

Para $x = 1$: $4(1)^2 - 16(1) + 10 = 4 - 16 + 10 = -2$

Para $x = 2$: $4(2)^2 - 16(2) + 10 = 16 - 32 + 10 = -6$

Para $x = 3$: $4(3)^2 - 16(3) + 10 = 36 - 48 + 10 = -2$

c) ¿Cuál es la ordenada del punto de la gráfica que su abscisa es 5? 30

Para $x = 5$: $4(5)^2 - 16(5) + 10 = 100 - 80 + 10 = 30$

d) ¿Cuál es la abscisa del punto de la gráfica que su ordenada es 100? Aproximadamente –3.15 y 7.15

Ecuación cuadrática: $4x^2 - 16x + 10 = 100$

$4x^2 - 16x - 90 = 0$

>>> Para saber más

Sobre el método de diferencias finitas, consulta:
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/algebra/patrones/patrones.htm
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Junta de Andalucía. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

119

Posibles procedimientos. Los alumnos podrían acercarse a la solución por ensayo y error, evaluando en distintos valores con la ayuda de la calculadora, sin embargo la manera más precisa de hacerlo es planteando la ecuación:

$4x^2 - 16x + 10 = 100$, luego pasarla a su forma general y utilizar la fórmula general para resolverla.

$4x^2 - 16x - 90 = 0$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 1440}}{2(4)}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{1696}}{2(4)}$$

$x_1 \approx -3.15$, $x_2 \approx 7.15$

Propósito de la sesión. Identificar el teorema de Pitágoras y dar una justificación geométrica para este teorema.
Materiales. Instrumentos geométricos (para toda la secuencia), tijeras y pegamento.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos cuáles son las características de un triángulo rectángulo, el propósito es que recuerden la principal: que tiene un ángulo recto (de 90°), es decir que dos de sus lados son perpendiculares. Si lo considera conveniente pídales que dibujen un triángulo rectángulo en una hoja cuadriculada y que identifiquen los catetos y la hipotenusa.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Usar las herramientas de geometría dinámica para verificar el teorema de Pitágoras.
Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 1.

Propósito del Interactivo. Mostrar diferentes esquemas gráficos de demostraciones que hacen plausible el teorema de Pitágoras.

Propósito de la actividad. Identificar cuáles de los triángulos son triángulos rectángulos y determinar la relación entre la medida de sus lados.
Sugerencia didáctica. Los alumnos deben comprender cuáles son las características de un triángulo rectángulo y que la posición en la que se encuentre no es parte de su definición. Si los alumnos solamente señalan el triángulo 6, pídales que verifiquen si ninguno de los otros triángulos tiene un ángulo recto.
Respuesta. Los triángulos rectángulos son el 1, 5 y 6.

Posibles dificultades. Puede haber algunas diferencias en las medidas debido que los instrumentos geométricos no son completamente precisos.

SECUENCIA 22

Teorema de Pitágoras

En esta secuencia, aplicarás el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas de cálculo de longitudes y distancias.

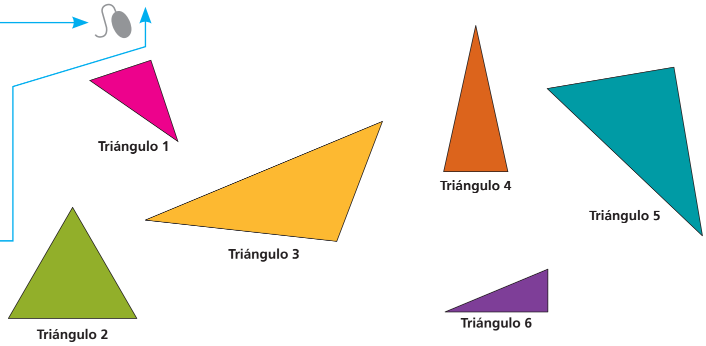
SESIÓN 1

¿QUÉ NOS DICE EL TEOREMA DE PITÁGORAS?

>>> Para empezar

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se conocen como ***catetos*** y el lado mayor, el cual se opone al ángulo recto, se llama ***hipotenusa***.

I. De los siguientes triángulos, distingan los que sean triángulos rectángulos.



a) Midan la longitud de los lados de cada triángulo rectángulo que encontraron y anoten las medidas (como *a*, *b*, *c*,), en la siguiente tabla.

Triángulo rectángulo	Medidas de los lados		
	Catetos		Hipotenusa
	a	*b*	*c*
1	1.5	2	2.5
5	3	4	5
6	1	2.4	2.6

Tabla 1

120

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Medida.
Subtema
Estimar, medir y calcular.
Antecedentes
Desde la primaria y en los dos grados anteriores de la secundaria, los alumnos han trabajado con triángulos rectángulos, han identificado y construido ángulos rectos y rectas perpendiculares. Sin embargo hasta ahora no se había nombrado los lados de un triángulo rectángulo como catetos e hipotenusa. En esta secuencia van a explorar e identificar la relación que existe entre las medidas de esos lados.

Propósito de la secuencia
Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**¿Qué nos dice el teorema de Pitágoras?** Identificar el teorema de Pitágoras y dar una justificación geométrica para este teorema.	Aula de medios Interactivo Programa 41
2	**Aplicaciones del teorema de Pitágoras I** Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.	Programa 42 Interactivo
3	**Aplicaciones del teorema de Pitágoras II** Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.	

b) Utilicen las medidas de los lados de cada triángulo para completar la siguiente tabla.

Triángulo rectángulo	a^2	b^2	$a^2 + b^2$	c^2
1	2.25	4	6.25	6.25
5	9	16	25	25
6	1	5.76	6.76	6.76

Tabla 2

c) ¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos? Anótenla a continuación ____________

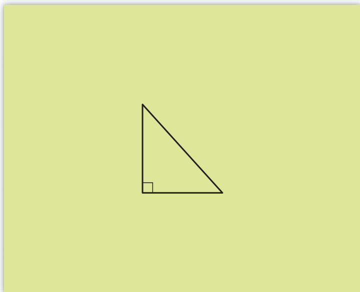
Comparen sus respuestas y utilicen el conjunto anterior de triángulos.

a) En todo triángulo rectángulo hay un lado mayor que llamamos hipotenusa (***c***). ¿Hay algunos triángulos no rectángulos que sólo tengan un lado mayor? ____________
¿Cuáles son? ____________

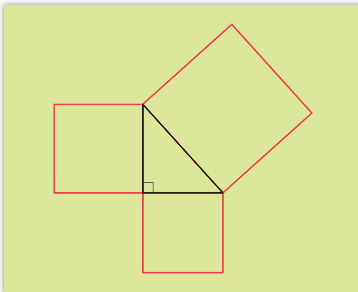
b) Consideren el triángulo 3, llamen ***c*** al lado mayor y ***a*** y ***b*** a los otros dos lados. Calculen a^2, b^2, c^2: ____________
¿Se cumple la relación que encontraste en los triángulos rectángulos? ____________

II. En su cuaderno, realicen lo siguiente:

Paso 1. Construyan un triángulo rectángulo de cualquier medida.



Paso 2. Ahora, construyan cuadrados a partir de la longitud de cada lado del triángulo.



121

Propósito de la pregunta. Se espera que los alumnos observen que $a^2 + b^2 = c^2$.

Sugerencia didáctica. Si no lo hicieron los alumnos, escriba en el pizarrón la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$ y pregúnteles si esta igualdad se cumplió en los tres casos. Para los otros tres triángulos pida a los alumnos que hagan una tabla como la anterior en la que ***a*** sea el lado más pequeño de cada triángulo y ***c*** sea el lado mayor y que comparen la suma $a^2 + b^2$ con c^2.

2

Propósito de la actividad. Los alumnos van a realizar una justificación geométrica para el teorema de Pitágoras.

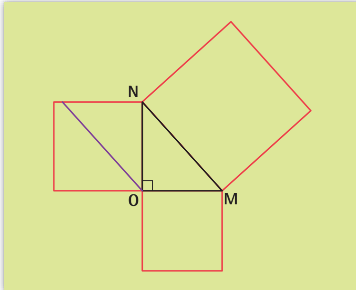
Esta actividad permite el desarrollo de las habilidades de interpretación y comprensión de instrucciones. También es una oportunidad de que usted evalúe el uso de los instrumentos geométricos para el trazo de las figuras, de las líneas paralelas y las perpendiculares.

1 3

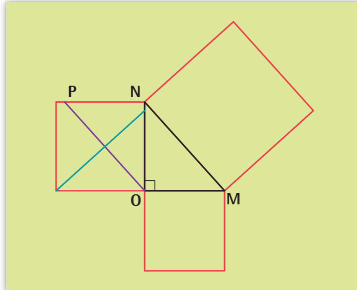
Sugerencia didáctica. Comente al grupo que primero lean todos los pasos de la construcción, si tienen alguna duda sobre algún concepto (punto medio, paralela, etc.) o sobre la notación, pídales que entre ellos traten de resolverla.

Cada pareja debe construir un triángulo con diferentes medidas para que puedan observar que, en los triángulos rectángulos, se cumple la relación entre las suma de los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa, sin importar el tamaño de los lados.

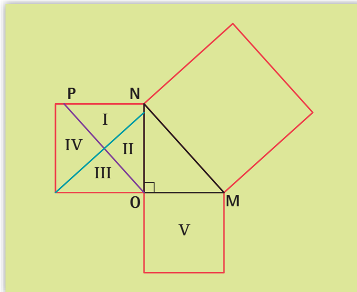
Paso 3. Identifiquen el cateto más grande y llámenlo **ON**. En el cuadrado construido sobre ese cateto tracen el segmento paralelo a la hipotenusa **MN** que pase por el extremo **O** del cateto.



Paso 4. Por el punto medio del segmento **OP** tracen una perpendicular, de manera que el cuadrado del cateto quede dividido en cuatro partes, como se indica en la figura.



Paso 5. Asignen los números **I**, **II**, **III** y **IV** a las cuatro partes. Además, asignen el número **V** al cuadrado construido sobre el cateto menor como se muestra en la siguiente figura. Comparen sus construcciones.



Sugerencia didáctica. Comente a los alumnos que acaban de trazar las piezas de un rompecabezas y que ahora van a armarlo dentro del cuadrado que está sobre la hipotenusa.

a) Recorten las piezas I, II, III, IV y V. Reacomódenlas, sin que se traslapen, dentro del cuadrado construido sobre la hipotenusa (**MN**). ¿Es posible recubrir este cuadrado con las cinco piezas? __________

b) ¿Creen que en cualquier triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa? __________ ¿Por qué? ______________________________

____

122

Sugerencia didáctica. Si tienen dificultades para armar el rompecabezas, comente a los alumnos que las piezas I a IV tienen un ángulo recto que se forma en el vértice en el que se unen las cuatro piezas. Cada uno de esos ángulos rectos va sobre una esquina del cuadrado.

>>> A lo que llegamos

En todo triángulo rectángulo, si a y b son las medidas de los catetos y c la medida de la hipotenusa se cumple que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

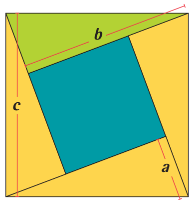
Es decir, el área del cuadrado de lado c (hipotenusa) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados del lado a y lado b (catetos).

A esta propiedad de los triángulos rectángulos se le llama el teorema de Pitágoras.

Para analizar más ejemplos con demostraciones de este teorema, pueden ver el programa *Algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras*.

>>> Lo que aprendimos

En tu cuaderno, construye cuatro triángulos rectángulos iguales entre sí y acomódalos como se indica en la figura (a es la medida del cateto menor, b la del mayor y c la de la hipotenusa):



a) ¿El cuadrilátero que forman las hipotenusas de los cuatro triángulos rectángulos es un cuadrado? ________ . ¿Qué razones darías para asegurarlo? ______________

b) ¿El cuadrilátero que se forma en el interior de la figura es también un cuadrado? ________ . ¿Por qué? ______________

¿Cuánto mide por lado ese cuadrado? ______________

c) ¿Cuál es la suma de las áreas de las cinco figuras que forman el cuadrado que tiene por lado a la hipotenusa c? ______________

d) ¿Cómo podrían verificar que el área del cuadrado grande c^2 es igual a $a^2 + b^2$?

123

Sugerencia didáctica. Dibuje en el pizarrón una figura parecida a la del paso 2 de la actividad anterior. Indique la medida de los catetos con las letras a y b y la medida de la hipotenusa con la letra c. Pregunte a los alumnos cuál es el área de cada uno de los cuadrados.

Si lo considera conveniente, pida a los alumnos que investiguen sobre la historia del teorema de Pitágoras.

4

Propósito de la actividad. Los alumnos van a realizar otra justificación geométrica para el teorema de Pitágoras.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que justifiquen sus respuestas con base en argumentos geométricos y que no den respuestas como "sí son cuadrados porque así quedan" o "con las figuras se forma un cuadrado".

Respuestas.

a) Los triángulos rectángulos tienen un ángulo recto, por lo que la suma de los otros dos ángulos es de 90°. En las esquinas del cuadrilátero grande se está juntando esos dos ángulos, entonces todos los ángulos del cuadrilátero son rectos. Además todos los lados miden lo mismo, ya que se forman con la hipotenusa de los triángulos.

b) Cada ángulo del cuadrilátero interior es suplementario al ángulo recto de los triángulos, por lo que todos los ángulos del cuadrilátero interior son rectos. Cada lado de este cuadrilátero mide $b - a$, por lo que todos sus lados miden lo mismo.

c) El área de cada triángulo es $\frac{ab}{2}$, el área del cuadrilátero interior es $(b - a)^2$. Es decir que la suma es igual a $4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b - a)^2$

Al desarrollar la suma de las áreas de las cinco figuras se obtiene:

$$4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b - a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$$
$$= b^2 + a^2$$

d) El cuadrado grande está formado por las cinco figuras, como la suma de las áreas de las cinco figuras es $a^2 + b^2$, entonces $c^2 = a^2 + b^2$.

Propósito del programa 41. Presentar diferentes demostraciones del teorema de Pitágoras.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

Sugerencia didáctica. Si observa que los alumnos responden que sólo puede entrar el espejo de 2 m × 2 m, usted puede pedirles que piensen de qué manera se puede introducir un vidrio tan grande por una puerta estrecha. También puede preguntarles si el vidrio de 2 × 2 cabe por la puerta si se intenta meter sin inclinarlo.

Respuesta. La mayor longitud de un espejo que puede entrar por una puerta se obtiene al utilizar la diagonal. Un espejo que mida menos que esa diagonal, pasa por la puerta al inclinarlo. En este caso se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 m y 2 m. La medida de la hipotenusa (la diagonal de la puerta) se obtiene con el teorema de Pitágoras.

$c^2 = 1^2 + 2^2 = 5.$

Entonces $c = \sqrt{5} \approx 2.236$

Hay dos espejos que sí pasan por la puerta.

Posibles errores. Algunos alumnos responderán que todos los espejos pasan por la puerta si no obtienen la raíz cuadrada de 5 y piensan que la diagonal de la puerta mide 5 m.

Comente con los alumnos que, con este procedimiento, se obtiene la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuando se conoce la medida de sus dos catetos. Un error común es que los alumnos piensen que esa medida es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, indíqueles que es muy importante el paso final: obtener la raíz cuadrada de ese resultado, de otra manera se está calculando el cuadrado de la hipotenusa.

SECUENCIA 22

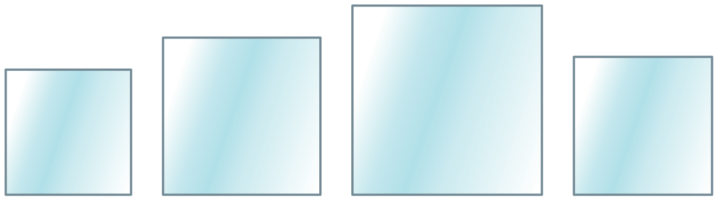
SESIÓN 2

APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS I

>>> Lo que aprendimos

1. En una escuela se quiere adaptar un salón para las clases de danza. Se han comprado algunos espejos para el salón.

Las medidas de los espejos son:



Sin embargo, hay un inconveniente: la entrada del salón mide 2 m de alto y 1 m de ancho.

a) ¿Cuáles son los espejos que pueden pasar por esa entrada? ________

b) ¿Cómo lo pudieron determinar? ________

c) Si la medida del largo de los espejos que se compraron es de 2.5 m, ¿cuál es la medida máxima del ancho que puede tener un espejo para pasar por esa entrada? ________

d) ¿De qué manera utilizarías el teorema de Pitágoras para resolver este problema?

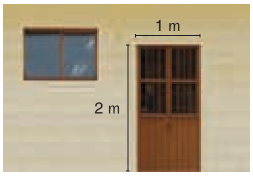
124

Propósito del Interactivo. Resolver problemas aplicando el teorema de Pitágoras.

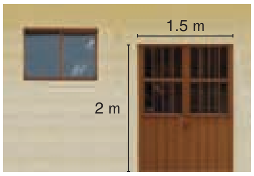
Propósito de las preguntas. Los alumnos deberán darse cuenta que la medida de los espejos que entran es menor a la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma con el ancho y alto de la puerta.

Pregunte a los alumnos qué ocurre si la medida de los espejos es igual a la medida de la hipotenusa.

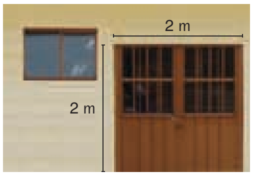
2. Se quiere colocar un espejo de 2.50 m × 2.50 m en uno de los salones de la escuela. Los salones tienen una única entrada con las siguientes dimensiones:



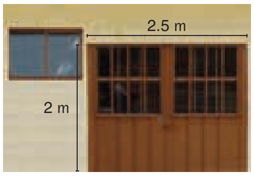
Salón A



Salón B



Salón C



Salón D

a) ¿En qué salones es posible que entre el espejo? ____________________

b) ¿Por qué? ____

c) En el siguiente recuadro, anota el procedimiento que seguiste para saber si es posible que pase el espejo por la entrada de cada salón.

Respuestas. Hay que calcular la medida de la diagonal de cada puerta.

Las medidas se calculan con el teorema de Pitágoras. Verifique que los alumnos calculen la raíz cuadrada para obtener el resultado.

$2^2 + 1^2 = 5.$

$\sqrt{5} \approx 2.236$

$2^2 + 1.5^2 = 6.25.$

$\sqrt{6.25} = 2.5$

$2^2 + 2^2 = 8.$

$\sqrt{8} \approx 2.8284$

$2.5^2 + 2^2 = 10.25.$

$\sqrt{10.25} \approx 3.2015.$

Entonces hay 2 salones en los que puede entrar el espejo.

Sugerencia didáctica. Comenten entre todos qué ocurre en el salón B.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que dibujen la puerta y que identifiquen cuáles son las medidas que conocen. La altura de las puertas es de 2 m y la medida mínima de la diagonal es de 2.5 m para que pueda pasar el espejo.

Es decir que conocen la medida de uno de los catetos y de la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma al trazar la diagonal de la puerta, los alumnos deben determinar la medida del otro cateto.

Respuesta. Como se conoce la medida de la hipotenusa y la medida de uno de los catetos, por el teorema de Pitágoras se plantea la siguiente ecuación:

$2^2 + b^2 = 2.5^2$

Se despeja b^2:

$b^2 = 2.5^2 - 2^2 = 6.25 - 4 = 2.25$

$b = \sqrt{2.25} = 1.5$

Entonces el ancho de la puerta debe ser mayor de 1.5 m.

Respuesta. Al unir los tres pueblos se forma un triángulo rectángulo en el que sus catetos miden 30 km y 40 km. Hace falta encontrar la distancia entre Alcántara y Carranza, que es la medida de la hipotenusa. Se utiliza el teorema de Pitágoras para plantear la ecuación:

$x^2 = 30^2 + 40^2$.

Entonces $x^2 = 2500$.

$x = 50$.

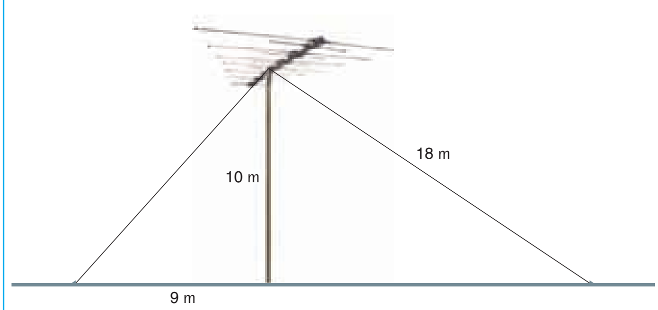
La distancia entre Alcántara y Carranza es de 50 km.

d) Comparen sus respuestas y encuentren una manera de calcular la medida mínima que debe tener la entrada del salón para que pase el espejo. Anótenla en su cuaderno.

3. Los siguientes puntos presentan la ubicación de tres poblados. Barragán está a 40 km al norte de Alcántara y Carranza está a 30 km al oeste de Barragán.

¿Cuál es la distancia entre los pueblos de Alcántara y Carranza? ____________

4. Una antena de TV mide 10 m de altura y está fijada con alambres, uno de los cuales mide 18 m.



a) ¿A qué distancia de la base de la antena queda fijo el alambre de 18 m sobre el piso, si se usa toda la longitud del alambre? ____________

Respuesta. En cada caso, la antena, el alambre y el piso forman un triángulo rectángulo. La antena representa uno de los catetos y el alambre representa la hipotenusa.

a) Hace falta conocer la medida del otro cateto (x). Por el teorema de Pitágoras:

$x^2 + 10^2 = 18^2$

$x^2 + 100 = 364$

$x^2 = 364 - 100$

$x^2 = 264$

$x \approx 16.248$

El alambre se debe fijar aproximadamente a 16.248 m de la antena.

b) En la misma antena de TV, otro de los alambres está fijo al piso a una distancia de 9 m de la base. ¿Cuál es la longitud de ese alambre? _______________

5. En el antiguo Egipto, cuando ocurrían desbordamientos del cauce del río Nilo, las inundaciones provocaban que se perdieran los límites entre los terrenos (o parcelas), los harpedonaptas (tendedores de cuerdas, agrimentores) tenían la tarea de reproducir gráficamente el área de las propiedades territoriales.

Para trazar perpendiculares sobre un terreno, utilizaban una cuerda dividida en 12 tramos por medio de 13 nudos equidistantes.

Formaban un triángulo cuyos lados fueran 3, 4 y 5 tramos. El triángulo era un triángulo rectángulo y que es llamado ***triángulo egipcio 3-4-5***.

Con una cuerda dividida en 30 tramos también se puede construir un triángulo rectángulo. ¿Cuántos tramos habrá entre los nudos de cada lado del triángulo que se forma? _______________ . Represéntenlo en en el siguiente recuadro.

Para analizar más aplicaciones del teorema de Pitágoras, pueden ver el programa *Aplicaciones del teorema de Pitágoras.*

Respuesta.

b) Hace falta conocer la medida de la hipotenusa (x). Por el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 9^2 + 10^2$

$x^2 = 81 + 100$

$x^2 = 181$

$x \approx 13.4536$

El alambre debe medir aproximadamente 13.4536 m.

Respuesta. 5, 12 y 13.

Propósito del programa 42. Mostrar algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

Respuestas.

El perímetro del cuadrilátero 1 es de 25 unidades.

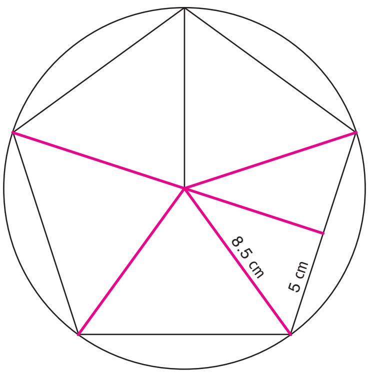
El perímetro del cuadrilátero 2 es de 17.66 unidades aproximadamente (se requiere el teorema).

El perímetro del cuadrilátero 3 es de 16.3245 unidades aproximadamente (se requiere el teorema).

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad.

Sugerencia didáctica. Si tienen dificultades pida a los alumnos que dividan al pentágono en cinco triángulos isósceles iguales al trazar los cinco radios que van hacia los vértices del pentágono.

En cada triángulo la base mide 10 cm y hace falta calcular la altura. Para calcularla se divide el triángulo por la mitad de su base en dos triángulos rectángulos en los que un cateto mide 5 cm y la hipotenusa mide 8.5 cm.



La medida del otro cateto se calcula con el teorema de Pitágoras y es igual a $\sqrt{47.25}$ (6.8738 cm aproximadamente).

Entonces el área de cada uno de los cinco triángulos es de $5(\sqrt{47.25})$.

Respuesta. El área del pentágono es de $25(\sqrt{47.25}) \approx 171.8465$ cm^2.

SECUENCIA 22

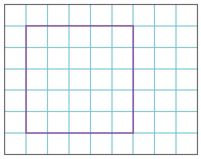
SESIÓN 3

APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS II

>>> Lo que aprendimos

1. Sin usar regla, encuentra el perímetro de los siguientes cuadriláteros. Anota en qué caso utilizaron el teorema de Pitágoras.

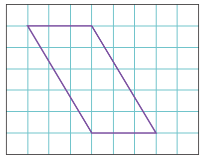
Cuadrilátero 1



Perímetro ______________

Teorema de Pitágoras ☐

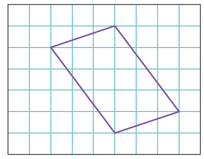
Cuadrilátero 2



Perímetro ______________

Teorema de Pitágoras ☐

Cuadrilátero 3

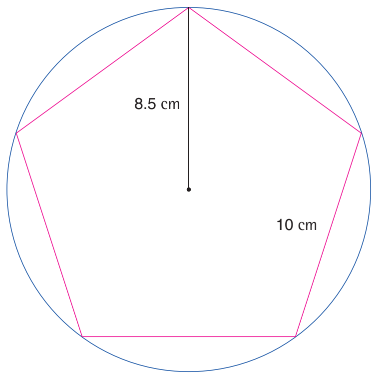


Perímetro ______________

Teorema de Pitágoras ☐

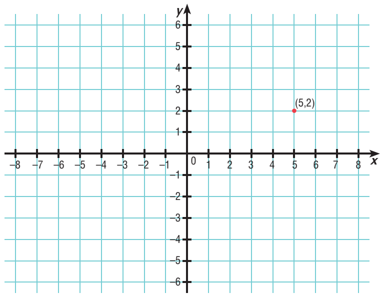
Comparen sus procedimientos y respuestas.

2. Calcula el área de un pentágono regular cuyos lados miden 10 cm, y que está inscrito en una circunferencia de radio 8.5 cm.



128

3. ¿Cuál es la distancia del punto de coordenadas (5,2) al origen del plano cartesiano?



Respuesta. Para calcular la distancia se traza un triángulo rectángulo en el que los catetos miden 2 y 5 unidades. La hipotenusa mide $\sqrt{29} \approx 5.3851$.

4. El tamaño de una pantalla de televisión se define como la longitud de la diagonal de la pantalla en pulgadas.

a) Una pantalla de televisión mide 56" de ancho y 42" de alto, ¿qué longitud mide la diagonal de esta pantalla? ______________

b) Si la diagonal de la pantalla de una televisión mide 60", ¿cuánto puede medir de ancho y alto? (Escribe al menos dos diferentes medidas del ancho y largo que puede tener la pantalla de televisión) ______________________

c) ¿Cuánto pueden medir los lados de un televisor si su tamaño es de 20"? (Escribe al menos dos diferentes medidas del ancho y largo que puede tener la pantalla de televisión) ______________

Respuesta.

a) 70''.

Posibles procedimientos. Puede fijarse la medida del ancho de la pantalla, por ejemplo 40". Se debe encontrar la medida del alto (***x***):

$x^2 + 40^2 = 60^2$

$x^2 = 60^2 - 40^2$

$x^2 = 3600 - 1600$

$x^2 = 2000$

$x \approx 44.72"$

Sugerencia didáctica. Hay muchas respuestas posibles. Pida a algunos alumnos que pasen al pizarrón a explicar sus respuestas.

Pregunte al grupo cuáles de las respuestas son más convenientes para las medidas de una pantalla.

>>> Para saber más

Sobre otras demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras, consulta:
http://roble.cnice.mecd.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm
[Fecha de consulta: 23 de abril de 2008].
Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Propósito de la sesión. Calcular el valor que toma la tangente para ángulos menores que 90 grados.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Determinar la altura de un objeto cualquiera con base en la medida del ángulo de elevación y la distancia, y viceversa.

Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 1.

Sugerencia didáctica. Los alumnos estudiaron en la secuencia 22 el teorema de Pitágoras y aprendieron a distinguir cuáles de los lados del rectángulo son los catetos y cuál es la hipotenusa.

Ahora es necesario que reconozcan que los catetos pueden ser adyacentes u opuestos, dependiendo de a cuál ángulo se haga referencia. Es decir, debe quedarles claro que nombrar "cateto adyacente" a uno de los lados del triángulo no es un absoluto sino una posición relativa, porque es "adyacente", o sea, contiguo a cierto ángulo y a la vez puede ser "opuesto" a otro.

Si lo considera útil, dibuje varios triángulos rectángulos en el pizarrón y pida a los alumnos que señalen cuál es el cateto adyacente y cuál el opuesto a cierto ángulo.

SECUENCIA 23

Razones trigonométricas

En esta secuencia aprenderás a reconocer y determinar las razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

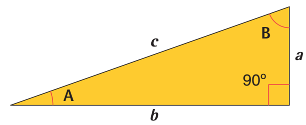
SESIÓN 1

LA COMPETENCIA

>>> Para empezar

En la secuencia 22 de **Matemáticas III**, volumen II, aprendiste a calcular la longitud de la hipotenusa o de los catetos usando el teorema de Pitágoras; en esta secuencia conocerás otras herramientas matemáticas para calcular el valor de los catetos o de la hipotenusa.

En un triángulo rectángulo, al lado opuesto al ángulo ***A*** se le llama ***cateto opuesto al ángulo A*** y al cateto que forma uno de los lados del ángulo se le llama ***cateto adyacente al ángulo A***. Mientras que al lado opuesto al ángulo ***B*** se le llama ***cateto opuesto al ángulo B*** y al cateto que forma uno de los lados del ángulo se le llama ***cateto adyacente al ángulo B***, tal como se muestra en la figura.



a = Cateto opuesto al ángulo A

a = Cateto adyacente al ángulo B

b = Cateto adyacente al ángulo A

b = Cateto opuesto al ángulo B

>>> Consideremos lo siguiente

En una competencia de motociclismo, los participantes hacen un recorrido por varias rampas y los jueces califican el desempeño de cada competidor; cada rampa tiene distinto grado de dificultad ya que unas están más inclinadas que otras; entre mayor sea el ángulo de inclinación de la rampa, mayor es el grado de dificultad que tiene el competidor al pasar por ella.

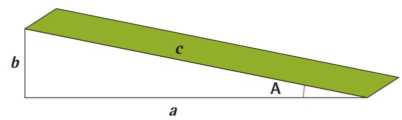


Figura 1

Propósito de la actividad. Con este problema se pretende establecer que la inclinación de un ángulo en un triángulo rectángulo puede medirse por el cociente que se obtiene al dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente a dicho ángulo, entre más grande sea ese cociente mayor es el ángulo.

Posibles procedimientos. Para solucionar el problema los alumnos podrían:

- trazar los triángulos que representan a cada rampa y observarlos para decidir cuál tiene una mayor inclinación,
- medir el ángulo que se les solicita una vez trazados los triángulos,
- analizar las medidas en la tabla y deducir que el que tiene un mayor ángulo de inclinación es aquel cuya medida de la rampa es mayor,
- hallar el cociente entre el cateto opuesto y el adyacente.

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos resuelvan la actividad como puedan y no les adelante ninguna información, no importa si no utilizan las razones trigonométricas o si no obtienen la respuesta correcta. Más adelante aprenderán a hacerlo.

La siguiente tabla muestra las medidas de seis rampas como la de la figura 1.

	Rampa 1	Rampa 2	Rampa 3	Rampa 4	Rampa 5	Rampa 6
b	3	1.5	3	4.5	1.5	3
a	5	3.5	3.25	6	2.5	4

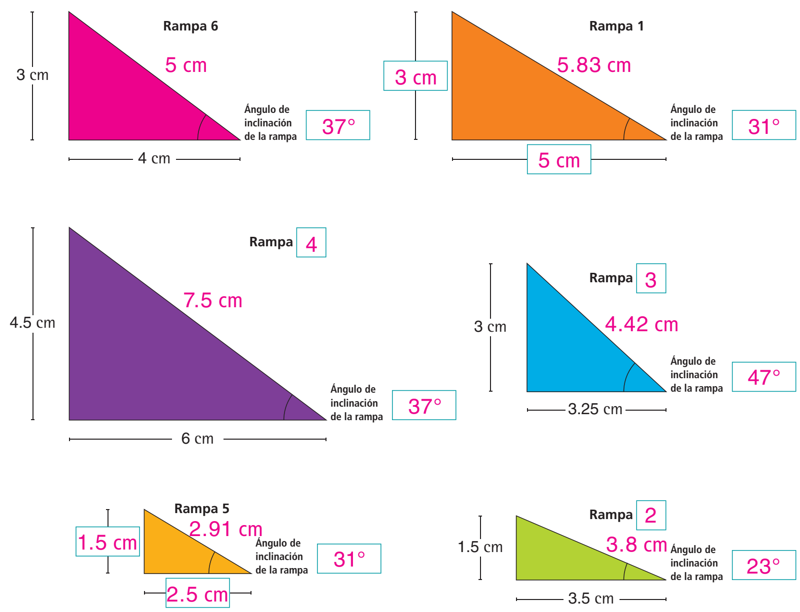
a) ¿Qué rampa tiene el mayor ángulo de inclinación (ángulo **A**)? ____________

b) ¿Cuáles rampas tienen el mismo ángulo de inclinación? ____________ y ____________

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. En los siguientes triángulos rectángulos están representadas las medidas de las rampas de la tabla anterior. Están hechos a escala de 1 cm a 1 m; usa tu regla y transportador para completar las medidas, el ángulo de inclinación y el número de rampa para cada uno de los triángulos.



131

Respuestas.

a) La rampa 3.

b) La rampa 1 tiene el mismo ángulo de inclinación que la 5. La 4 y la 6 también tienen el mismo ángulo de inclinación.

Propósito del Interactivo. Que el alumno aprenda a resolver problemas geométricos aplicando las razones trigonométricas.

Propósito de la actividad. A través de la obtención de las medidas de los triángulos y del llenado de la tabla, se pretende que los estudiantes conozcan que el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente, es un dato que permite saber en cuál de los triángulos el ángulo es mayor: mientras mayor sea el cociente obtenido, mayor es el ángulo.

Posibles procedimientos. Para resolver esta actividad los alumnos pueden medir los lados de los triángulos, o bien, observar la tabla e inferir cuáles son las medidas de los tres triángulos que no las tienen (hay uno más grande que los otros dos, uno mediano y uno más chico).

Los alumnos también pueden medir la hipotenusa de todos los triángulos, o bien, recordar cómo obtener esta medida utilizando el Teorema de Pitágoras. Si lo considera necesario, haga un pequeño repaso.

El ángulo de inclinación deben medirlo con su transportador (las medidas de los ángulos de inclinación que aparecen en este libro, son aproximadas).

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Medida.
Subtema
Estimar, medir y calcular.
Antecedentes
En la secuencia anterior los alumnos estudiaron el Teorema de Pitágoras. Ahora conocerán las razones trigonométricas seno, coseno y tangente al resolver problemas que involucren su uso.

Propósito de la secuencia

Estudiar las razones trigonométricas como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de ángulos y lados de triángulos rectángulos a partir de los valores de sus razones trigonométricas.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**La competencia** Calcular el valor que toma la tangente para ángulos menores que 90 grados.	Aula de medios Interactivo
2	**Senos y cosenos** Calcular el valor que toman el seno y coseno para ángulos menores que 90 grados.	Programa 43
3	**30°, 60° y 45°** Calcular el valor de las razones trigonométricas de algunos ángulos conocidos.	
4	**A resolver problemas** Resolver problemas usando los valores de las razones trigonométricas.	Programa 44 Interactivo

Respuestas.
La rampa 1 tiene un mayor ángulo de inclinación porque tiene 31° y la 2 sólo tiene 23°.

El cociente de la rampa 1 (0.6) es mayor que el de la rampa 2 (0.42).

Respuestas.
La rampa 3 tiene un mayor ángulo de inclinación porque tiene 47° y la 4 sólo tiene 37°.

El cociente de la rampa 3 (0.92) es mayor que el de la rampa 4 (0.75).

Respuesta. Si el cociente entre el cateto opuesto **(CO)** y el cateto adyacente **(CA)** es mayor, el ángulo de inclinación es mayor también.

Los alumnos podrían usar como argumento para justificar su respuesta el comportamiento de los ángulos en triángulos rectángulos que observaron en la tabla anterior. Para ayudar a los alumnos usted puede dibujar un triángulo rectángulo en el que el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente sea mayor al de la rampa 4, por ejemplo **CO** = 5 y **CA** = 6, así $\frac{CO}{CA} = \frac{5}{6}$.
Entonces midan el ángulo para verificar que es mayor que el de la rampa 4.

Sugerencia didáctica. Aclare a los alumnos la notación:

CO es el cateto opuesto

CA es el cateto adyacente

SECUENCIA 23

Completa la siguiente tabla:

	Cateto opuesto al ángulo de inclinación (*b*)	Cateto adyacente al ángulo de inclinación (*a*)	Cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente	Angulo de inclinación
Rampa 1	3	5	0.6	31°
Rampa 2	1.5	3.5	0.42	23°
Rampa 3	3	3.25	0.92	47°
Rampa 4	4.5	6	0.75	37°
Rampa 5	1.5	2.5	0.6	31°
Rampa 6	3	4	0.75	37°

Para la rampa 1 y la rampa 2 contesta:

- ¿Cuál rampa tiene un mayor ángulo de inclinación? __________
- ¿En qué rampa el cociente calculado en la tabla anterior es mayor? __________

Para la rampa 3 y la rampa 4 contesta:

- ¿Cuál rampa tiene un mayor ángulo de inclinación? __________
- ¿En qué rampa el cociente calculado en la tabla anterior es mayor? __________
- Si en una séptima rampa, el cociente de dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente al ángulo de inclinación fuera mayor al de la rampa 4, ¿cómo sería el ángulo de inclinación, mayor o menor? Justifica tu respuesta. ______________________________

Para la rampa 4 y la rampa 6 contesta:

- ¿Cuál rampa tiene un mayor ángulo de inclinación? __________
- ¿Cómo es el cociente de dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente al ángulo de inclinación, distinto o igual? __________
- ¿Son semejantes los triángulos de la rampa 4 y la rampa 6? Justifica tu respuesta ______________________________
- Si en una octava rampa, el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente al ángulo de inclinación fuera igual al de la rampa 1, ¿cómo compararían los ángulos de inclinación? Justifica tu respuesta. ______________________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron, además, en el apartado *Consideremos lo siguiente*, verifiquen lo contestado.

132

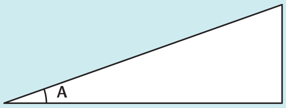
Respuestas.
Tanto la rampa 4 como la 6 tienen igual ángulo de inclinación (37°) y sus cocientes son iguales (0.75).

Son triángulos semejantes porque tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

Si hubiese una rampa 8 con el mismo cociente entre el **CO** y **CA** que el de la rampa 1, el ángulo de inclinación sería igual.

>>> A lo que llegamos

En un triángulo rectángulo como el de la figura, se llama **tangente** del ángulo A al cociente que se obtiene de dividir el cateto opuesto al ángulo A entre el cateto adyacente, y se escribe como **tan(A)**.



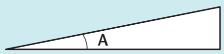
b = Cateto opuesto al ángulo A

a = Cateto adyacente al ángulo A

$$\tan(A) = \frac{b}{a}$$

Entre mayor es la tangente de un ángulo, mayor es el ángulo.

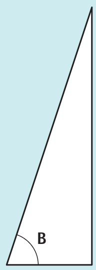
Por ejemplo:



Cateto opuesto al ángulo A = 1 cm

Cateto adyacente al angulo A = 5 cm

$$\tan(A) = \frac{\text{Cateto opuesto al ángulo A}}{\text{Cateto adyacente al ángulo A}} = \frac{1 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0.2$$



Cateto opuesto al ángulo B = 6 cm

Cateto adyacente al angulo B = 2 cm

$$\tan(B) = \frac{\text{Cateto opuesto al ángulo B}}{\text{Cateto adyacente al ángulo B}} = \frac{6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 3$$

Como tan(B) es mayor que tan(A), entonces la medida del ángulo B es mayor que la del ángulo A.

133

5

Para saber más. En matemáticas el uso de la palabra "tangente" hace referencia a dos conceptos:

- En trigonometría es una función y el valor de la tangente en un ángulo entre 0 y 360 grados se obtiene como la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente. Este es el significado que se estudia en la presente secuencia.
- En geometría la tangente es la línea que "toca" en un punto a una curva. Este significado se estudió en el libro **Matemáticas III** secuencia 3.

Puede ser útil comentar esta información con los alumnos, para evitar confusiones.

Sugerencia didáctica. Los alumnos ya estudiaron lo que es una "razón" en la secuencia 6 del libro **Matemáticas III**.

Coménteles que como el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente a un ángulo dado es una razón, entonces a la tangente también se le llama "razón trigonométrica".

Una razón trigonométrica es el cociente entre dos de las medidas de los lados en un triángulo rectángulo. Estas razones pueden compararse, y cuando hay igualdad de razones entonces los triángulos rectángulos son semejantes.

Propósito de la actividad. Con esta actividad se espera que los alumnos se den cuenta de al menos dos aspectos:

- Si los triángulos comparten el ángulo **A** y un ángulo recto, entonces son semejantes.
- Si los triángulos comparten el ángulo **A** y son congruentes, entonces tienen la misma tangente.

Respuesta.

a) Son iguales.

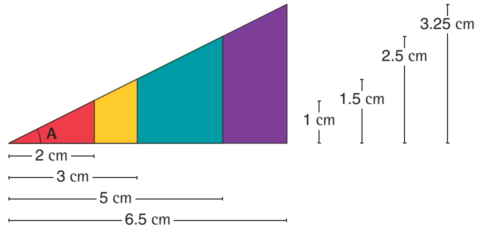
Posibles Respuestas.

b) Los estudiantes pueden utilizar cualquiera de los criterios para afirmar que los triángulos son semejantes, pero es importante que justifiquen su elección.

Sugerencia didáctica. Pida a tres o cuatro alumnos que pasen al pizarrón para que expliquen por qué eligieron tal o cual criterio.

Haga énfasis en que no se limiten a decir cosas como "porque tiene tres ángulos iguales", sino que expliquen cómo pueden asegurar que los tres ángulos son iguales.

II. En el siguiente dibujo se encuentran superpuestos cuatro triángulos rectángulos, observa que los cuatro comparten el ángulo **A**. Completa los datos de la tabla.



	Cateto opuesto al ángulo A	Cateto adyacente al ángulo A	Cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente
Triángulo rojo	1	2	$\frac{1}{2} = 0.5$
Triángulo amarillo	1.5	3	$\frac{1.5}{3} = 0.5$
Triángulo azul	2.5	5	$\frac{2.5}{5} = 0.5$
Triángulo morado	3.25	6.5	$\frac{3.25}{6.5} = 0.5$

a) ¿Cómo son los cocientes de la tabla anterior, distintos o iguales? ________

b) ¿Cuál de los siguientes criterios usarías para determinar que los triángulos anteriores son semejantes? Subráyalo.

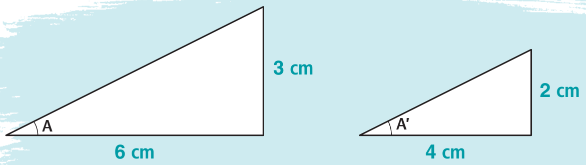
- Tres ángulos iguales.
- Lados correspondientes proporcionales.
- Dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo entre ellos igual.

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

Para dos triángulos rectángulos semejantes, el valor de la tangente de ángulos correspondientes es el mismo. Por ejemplo:

134



$\tan(A) = \frac{3}{6} = 0.5$ $\tan(A') = \frac{2}{4} = 0.5$

Estos dos triángulos son semejantes y en ambos el valor de la tangente de los ángulos correspondientes A y A´ es 0.5

Propósito de la sesión. Calcular el valor que toman el seno y coseno para ángulos menores que 90 grados.

COSENOS Y SENOS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Seno, coseno y tangente

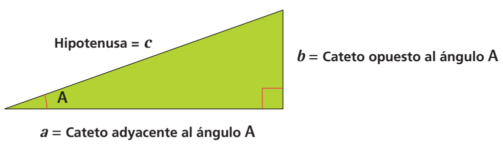
Propósito del programa 43. Establecer las definiciones de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

En la sesión anterior aprendiste que, dado un ángulo **A** en un triángulo rectángulo, al cociente de dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente se le llama tangente del ángulo **A**. Existen otras relaciones entre los lados del triángulo y un ángulo **A**: la relación que hay entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa o la relación que hay entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa. Estas dos relaciones reciben los siguientes nombres:

Al cociente de dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa se le llama ***seno de*** A y se escribe sen(**A**).

Al cociente de dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa se le llama ***coseno de*** A y se escribe cos(**A**).



$\text{sen}(A) = \frac{b}{c}$

$\cos(A) = \frac{a}{c}$

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos se den cuenta de que si construyen triángulos que tengan el mismo seno, serán semejantes porque tanto el cateto opuesto como la hipotenusa serán proporcionales.

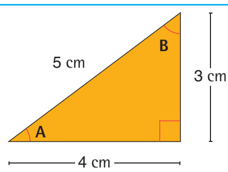
>>> Consideremos lo siguiente

El seno del ángulo **A** en el siguiente triángulo rectángulo es $\frac{3}{5}$.

Construye un triángulo rectángulo diferente del anterior cuyo seno de uno de sus ángulos sea también $\frac{3}{5}$; a ese ángulo llámale **A'**.

a) ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo **A'** que construiste? ______

b) ¿Cuánto mide el ángulo **A**? ______



$\text{sen}(A) = \frac{3}{5}$

$\text{sen}(B) = \frac{4}{5}$

135

Respuestas.

a) 31 grados.

b) 31 grados.

Respuesta.

c) Sí son semejantes porque el cateto opuesto y la hipotenusa son proporcionales.

c) ¿Son semejantes el triángulo que construiste y el triángulo anterior? ________

Justifica tu respuesta. ________________________

Sugerencia didáctica. Dé tiempo para esta discusión, es importante que los alumnos comenten qué criterio utilizaron para justificar su respuesta al inciso c) del apartado *Consideremos lo siguiente*.

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. El seno del ángulo **B** en el triángulo del apartado *Consideremos lo siguiente* es $\frac{4}{5}$.

a) ¿Cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes a $\frac{4}{5}$? Subráyalas.

$\frac{2}{5}$ $\qquad \frac{8}{10} \qquad \frac{2}{2.5} \qquad \frac{5}{3}$

Recuerda que:

El teorema de Pitágoras dice que en todo triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

b) Si la hipotenusa en un triángulo rectángulo mide 10 cm y uno de los catetos mide 8 cm, usando el teorema de Pitágoras ¿cuánto mide el otro cateto? ________

Respuesta. Mide 6 cm. Como es un triángulo rectángulo, además de tener las medidas de dos de sus lados, se sabe que el ángulo que formado por los dos catetos debe ser recto.

c) En el siguiente espacio construye un triángulo rectángulo con las medidas del inciso b).

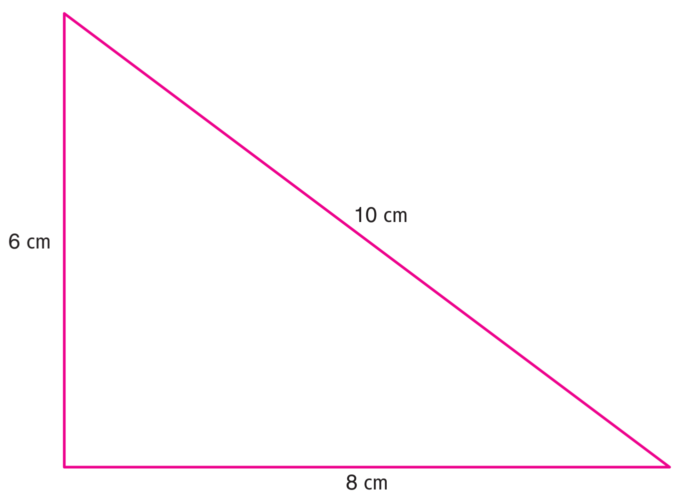
Respuesta.

d) Sí son semejantes. Los alumnos pueden utilizar varios criterios para justificar su respuesta, como que los tres lados de los triángulos son proporcionales.

d) ¿Es semejante el triángulo que construiste al que está en el apartado *Consideremos lo siguiente*? ________ . Justifica tu respuesta. ________________________

____

136



e) En el triángulo que construiste, nombra con la letra **C** al ángulo que corresponde al ángulo **B**, y completa la siguiente tabla:

Ángulo	Seno del ángulo	Medida del ángulo
B	$\frac{4}{5} = 0.8$	59°
C	$\frac{8}{10} = 0.8$	59°

f) ¿Cómo es la medida de los ángulos **B** y **C**, igual o diferente? ____________

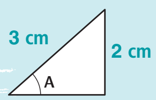
Respuesta.

f) El sen(c) es igual al sen(b), ambos miden 59°.

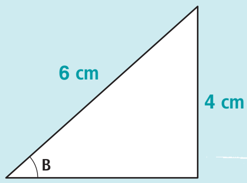
Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus resultados.

>>> A lo que llegamos

Cuando el valor del seno para dos ángulos de triángulos rectángulos distintos (uno en cada triángulo) es el mismo entonces **los triángulos son semejantes**. Por ejemplo, el valor del seno del ángulo A y el del ángulo A′ en los siguientes dos triángulos es $\frac{2}{3} = 0.6$, y por lo tanto los dos triángulos son semejantes.



sen(a) = $\frac{2}{3}$



sen(b) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

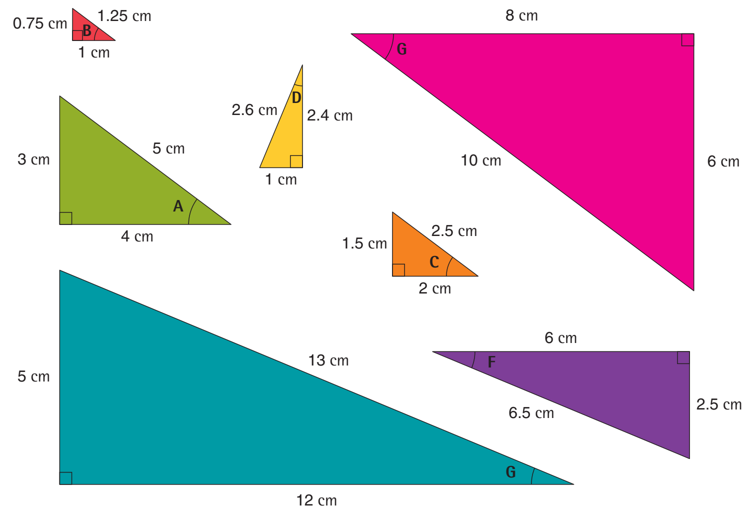
La propiedad anterior también se cumple con el coseno, es decir, si el valor del coseno para dos ángulos de triángulos rectángulos distintos (uno en cada triángulo) es el mismo, los triángulos son semejantes.

Verifica esta propiedad para los triángulos del apartado *Consideremos lo siguiente* y el que construiste en el inciso c) del apartado *Manos a la obra*.

137

Propósito de la actividad. Ahora los alumnos estudiarán el coseno, que es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa, y observarán que si dos triángulos rectángulos tienen el mismo coseno, son semejantes.

II. A continuación aparecen siete triángulos en los que se distinguieron los ángulos **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** y **G**, respectivamente.



Usando las medidas de los triángulos anteriores completa la siguiente tabla para cada uno de los ángulos marcados en el dibujo.

	Cateto adyacente (cm)	Cateto opuesto (cm)	Hipotenusa (cm)	Coseno = $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	Seno = $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$
Triángulo verde (ángulo A)	4	3	5	$\frac{4}{5} = 0.8$	$\frac{3}{5} = 0.6$
Triángulo rojo (ángulo B)	1	0.75	1.25	$\frac{1}{1.25} = 0.8$	$\frac{0.75}{1} = 0.75$
Triángulo naranja (ángulo C)	2	1.5	2.5	$\frac{2}{2.5} = 0.8$	$\frac{1.5}{2.5} = 0.6$
Triángulo amarillo (ángulo D)	2.4	1	2.6	$\frac{2.5}{2.6} = 0.92$	$\frac{1}{2.6}$
Triángulo azul (ángulo E)	12	5	13	$\frac{12}{13} = 0.923$	$\frac{5}{13} = 0.38$
Triángulo morado (ángulo F)	6	2.5	6.5	$\frac{6}{6.5} = 0.92$	$\frac{2.5}{6.5} = 0.38$
Triángulo rosa (ángulo G)	8	6	10	$\frac{8}{10} = 0.8$	$\frac{6}{10} = 0.6$

138

a) ¿Qué triángulos son semejantes al triángulo verde? ____________________

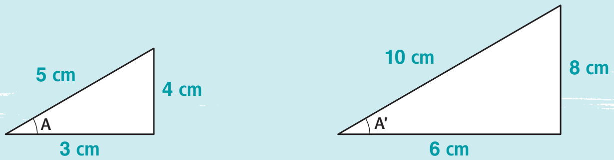
b) ¿Cómo es el valor del coseno que calculaste en la tabla para estos triángulos, distinto o igual? ____________________

c) ¿Qué triángulos son semejantes al triángulo azul? ____________________

d) ¿Cómo es el valor del seno que calculaste en la tabla para estos triángulos, distinto o igual? ____________________

Comparen sus respuestas.

En triángulos rectángulos semejantes el valor del seno y el coseno de ángulos correspondientes es el mismo. Por ejemplo:



$\cos(A) = \frac{3}{5} = 0.6$ $\qquad$ $\cos(A') = \frac{3}{6} = 0.5$

$\text{sen}(A) = \frac{4}{5} = 0.8$ $\qquad$ $\text{sen}(A') = \frac{6}{10} = 0.6$

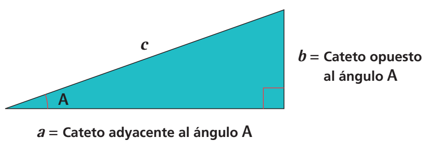
En ambos triángulos el valor del coseno es igual para los ángulos A y A´ y el valor del seno también.

30°, 45° Y 60°

SESIÓN 3

>>> Para empezar

En las sesiones anteriores aprendiste a calcular la tangente, el seno y el coseno de un ángulo ***a*** en un triángulo rectángulo como el de la figura que sigue:



$\tan(A) = \frac{b}{a}$

$\text{sen}(A) = \frac{b}{c}$

$\cos(A) = \frac{a}{c}$

Figura 1

A los cocientes anteriores se les llama ***razones trigonométricas del ángulo A***. En esta sesión aprenderás a calcular las razones trigonométricas de algunos ángulos.

Respuestas.

a) El rojo, el naranja y el rosa.

b) Es igual.

c) El amarillo y el morado.

d) Es igual.

Propósito de la sesión. Calcular el valor de las razones trigonométricas de algunos ángulos conocidos.

Aunque en la calculadora o tablas trigonométricas es relativamente sencillo encontrar el valor de la función seno coseno o tangente de un ángulo conocido, es importante que los alumnos comprendan un procedimiento para realizar el calculo de las razones trigonométricas de algunos ángulos significativos.

Comente a los alumnos que los ángulos que tienen las escuadras del juego de geometría, son los que van a calcular en esta secuencia.

Propósito de las preguntas. Mediante lo que se les solicita en este apartado se pretende que los estudiantes se den cuenta de que el valor de las funciones seno, coseno y tangente de un ángulo dado, será el mismo sin importar las medidas del triángulo rectángulo, porque todos serán semejantes.

Posibles dificultades. Estas preguntas pueden ser difíciles para los alumnos porque hasta ahora han aprendido a obtener el valor de las funciones trigonométricas a partir de las medidas de los lados de los triángulos y no se les proporciona ninguna.

Para poder contestarlas preguntas es importante que dibujen los triángulos. Si no saben cómo hacerlo, recuérdeles lo siguiente:

- Como se trata de triángulos rectángulos, además de la medida que se les da en cada pregunta, saben que otro de los ángulos mide 90°.
- Teniendo la medida de dos ángulos se puede averiguar la del tercero, porque la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°.
- Las medidas de los lados de los triángulos pueden ser muchas, lo importante es los ángulos tengan las medidas que se indican.

Para empezar, puede sugerirles que tracen uno de los lados del triángulo rectángulo con cualquier medida, luego otro de los lados cuidando que forme un ángulo de 90° con el que trazaron primero. En el otro extremo del lado que trazaron primero, miden el ángulo que se les da en la pregunta y unen los extremos. Entonces miden los tres lados del triángulo para obtener las funciones trigonométricas.

Respuestas.

a) El valor de la tangente es 1

b) El coseno vale 0.5

c) El seno también vale 0.5

Sugerencia didáctica. Para resolver estas actividades es conveniente el uso de la calculadora científica o de tablas trigonométricas (mismas que aparecen en el anexo 1 del libro del alumno).

SECUENCIA 23

>>> Consideremos lo siguiente

a) Dibuja un triángulo rectángulo en el que uno de sus ángulos mida 45°, ¿cuál es el valor de la tangente para ese ángulo? ________

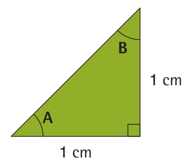
b) Dibuja un triángulo rectángulo en el que uno de sus ángulos mida 60°, ¿cuál es el valor del coseno para ese ángulo? ________

c) Encuentra el valor del seno para el ángulo de 30°. ________

Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus resultados

>>> Manos a la obra

I. El siguiente es un triángulo rectángulo en el que ambos catetos miden 1 cm.



a) Usando el teorema de Pitágoras encuentra el valor de la hipotenusa en el triángulo anterior ________

b) ¿El triángulo anterior es isósceles, escaleno o equilátero? ________ ________ . Justifica tu respuesta. ________

c) ¿Cuánto mide el ángulo **A**? ________

d) ¿Cuánto mide el ángulo **B**? ________

Recuerda que:
Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales.

140

Respuestas.

a) Mide $\sqrt{2}$

b) Es isósceles, porque tiene dos lados iguales (los que miden 1 cm) y uno desigual.

c) 45°

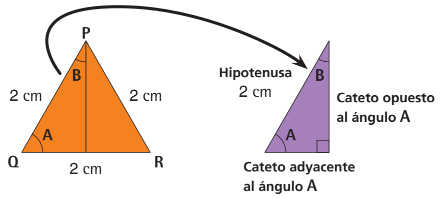
d) 45°

e) Completa la siguiente tabla. Para el ángulo **A**, encuentra el valor del seno, el coseno y la tangente.

Razones trigonométricas para el ángulo A	Valor numérico
sen(A) = $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ = 0.0707
cos(A) = $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ = 0.0707
tan(A) = $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\frac{1}{1}$ = 1

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron. Si tienen calculadora científica verifiquen sus resultados.

II. El triángulo **PQR** es equilátero, sus lados miden **1** cm; si se traza la altura se forman dos triángulos rectángulos como en la siguiente figura.



Recuerda que:

En un triángulo equilátero

- *sus tres ángulos internos miden 60°,*
- *para cada vértice, la altura correspondiente corta al lado opuesto al vértice en su punto medio.*

a) ¿Cuánto mide el ángulo **A**? ___________

b) ¿Cuánto mide el cateto adyacente al ángulo **A**? ___________

c) Usando el teorema de Pitágoras, encuentra cuánto mide el cateto opuesto al ángulo **A** ___________

d) Completa la siguiente tabla: para el ángulo **A**, encuentra el valor del seno, el coseno y la tangente.

Razones trigonométricas para el ángulo A	Valor numérico
sen(A) = $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$ = 0.866
cos(A) = $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{1}{2}$ = 0.5
tan(A) = $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ = 1.224

141

Sugerencia didáctica. Si los alumnos no saben cómo utilizar la calculadora científica para obtener las funciones trigonométricas, explíqueles que el procedimiento depende de la calculadora.

Para trabajar con la calculadora de la computadora hay que ir a *Programas* y seleccionar *Accesorios*, ahí encontrarán *Calculadora*. Una vez abierta, en el menú **Ver** hay dos opciones: **Científica** o **Estándar**, seleccionar **Científica**. Entonces, se teclea la medida del ángulo y en seguida se oprime la tecla de la función que se desee obtener.

En la mayoría de las calculadoras científicas de bolsillo, hay que oprimir primero la tecla de la función que se desea obtener, luego la medida del ángulo, y finalmente la tecla del signo "igual".

Propósito de la actividad. Mediante el trazo de un triángulo equilátero, se proporciona a los alumnos una manera para calcular el valor de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos.

Respuestas.

a) Mide 60°

b) 1 cm

c) $\sqrt{3}$

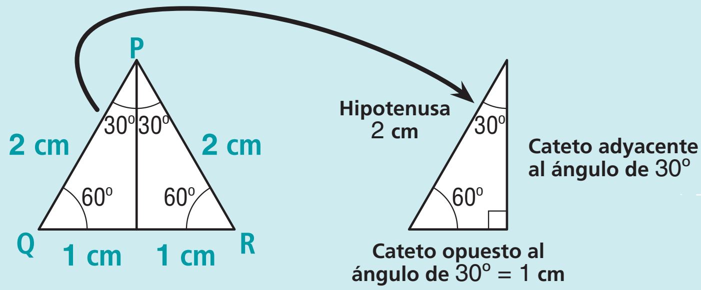
Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron. Si tienen calculadora científica verifiquen sus resultados.

>>> A lo llegamos

Para calcular la tangente de 30°, se puede hacer lo siguiente:

En el triángulo equilátero PQR, con lados que miden 2 cm, se traza la altura y se forman dos triángulos rectángulos, como en el dibujo.

Como el lado PQ mide 2 cm, entonces el cateto opuesto al ángulo de 30° mide 1 cm.



Usando el teorema de Pitágoras, se tiene que el cateto adyacente al ángulo de 30° mide $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ cm. Por lo que $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

e) Verifica, usando el dibujo anterior, que $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}(30°) = 0.5$

>>> Lo que aprendimos

Usa tu calculadora científica para encontrar la medida del seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos.

Ángulo en grados	Seno	Coseno	Tangente
10	0.1736	0.9848	0.1763
15	0.2588	0.9659	0.2679
20	0.3420	0.9396	0.3639
25	0.4226	0.9063	0.4663
35	0.5735	0.8191	0.7002

A RESOLVER PROBLEMAS

>>> A lo que llegamos

SESIÓN 4

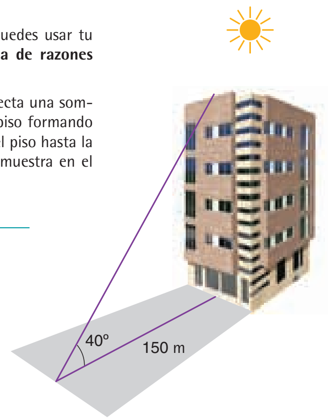
Propósito de la sesión. Resolver problemas usando los valores de las razones trigonométricas.

Integrar al portafolios. Seleccione uno o dos problemas de esta sesión y pida a los alumnos una copia de sus respuestas y procedimientos.

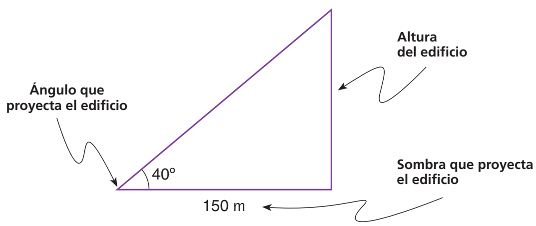
Para resolver los siguientes problemas puedes usar tu calculadora o consultar el anexo 1 **Tabla de razones trigonométricas.**

1. A cierta hora del día un edificio proyecta una sombra de 150 m sobre un punto en el piso formando un ángulo de 40° desde el punto en el piso hasta la parte más alta del edificio, como se muestra en el dibujo.

   ¿Qué altura tiene el edificio? ________



Observa que podemos usar un triángulo rectángulo como el siguiente para ayudarnos a resolver este problema



Lo que queremos saber es la altura del edificio, es decir, la medida del cateto opuesto al ángulo de 40°.

Con tu calculadora o con las tablas que se encuentran en el anexo 1, **Tabla de razones trigonométricas**, completa la siguiente información:

	Seno	Coseno	Tangente
Ángulo de 40°	0.6427	0.7660	0.8390

Sugerencia didáctica. En esta sesión se plantean distintos problemas que se resuelven utilizando las razones trigonométricas que los alumnos han aprendido.

El problema 1 se explica con mayor detalle para proporcionar más apoyo a los estudiantes, por lo que conviene que lo resuelvan juntos y lo vayan explicando en el pizarrón.

Propósito del Interactivo. Que el alumno aprenda a resolver problemas geométricos aplicando las razones trigonométricas.

Respuesta. La razón coseno no tiene sentido utilizarla porque en ella no interviene el cateto opuesto (**CO**) que es la medida que interesa obtener.

La razón seno sí la considera, pero para obtenerla mediante dicha función se requiere conocer el valor de la hipotenusa, y en este problema se desconoce.

La razón tangente es la que debe emplearse, porque se conoce la medida del cateto adyacente (**CA**) y el valor de la tangente de un ángulo de 40°.

Entonces, lo que hay que hacer es sustituir los valores conocidos en la razón tangente, es decir:

$$\tan(40°) = \frac{\mathbf{CO}}{\mathbf{CA}}$$

$$0.8390 = \frac{\mathbf{CO}}{150}$$

A partir de ese punto, hay que despejar el valor del **CO**, quedando:

$\mathbf{CO} = 0.8390 \times 150$

$\mathbf{CO} = 125.86$

La altura del edificio es 125.86 m.

Respuesta. En este problema también se busca obtener la medida del cateto opuesto (**CO**). Como se conoce la medida del cateto adyacente (**CA**) y la del ángulo, es pertinente emplear la razón tangente para resolverlo. Entonces:

$$\tan(24°) = \frac{\mathbf{CO}}{\mathbf{CA}}$$

$$0.4452 = \frac{\mathbf{CO}}{40}$$

A partir de ese punto, hay que despejar el valor del **CO**, quedando:

$\mathbf{CO} = 0.4452 \times 40$

$\mathbf{CO} = 17.8$

La distancia a la que se encuentra el barco del faro es 17.8 m.

Posibles errores. Quizá algunos alumnos piensen que la medida que debe hallarse en este problema es la del cateto adyacente. Si surge este error en el grupo, recuerden juntos que la posición de los catetos está en función del ángulo que se toma como referencia. En éste caso, el cateto adyacente al ángulo de 24° es el que mide 40 m.

¿Que razón trigonométrica usarías para encontrar la altura del edificio? Subráyala.

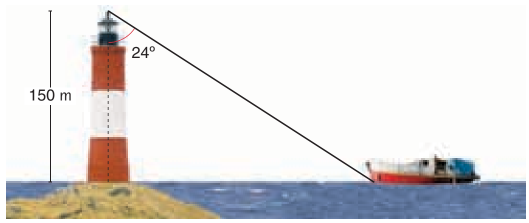
$$\text{sen}(40°) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos(40°) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan(40°) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Sustituye los valores conocidos en la razón que elegiste y encuentra el valor de la altura del edificio.

Altura del edificio: ___________

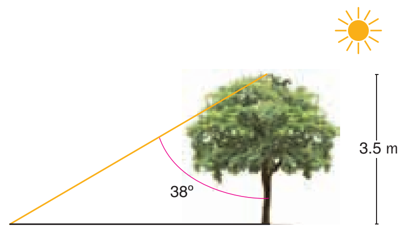
Comparen sus respuestas y comenten sus procedimientos.

2. Desde un faro situado a 40 m sobre el nivel del mar, se observa un barco bajo un ángulo de 24°, como se muestra en el dibujo.



¿A qué distancia se encuentra el barco del faro? ___________

3. La inclinación de los rayos solares en cierto momento es de 38°. Si un árbol tiene 3.5 m de altura como en el dibujo:



Sombra proyectada m

¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por el árbol? ___________

Respuesta. Para resolver este problema también se usa la razón tangente.

$$\tan(38°) = \frac{\mathbf{CO}}{\mathbf{CA}}$$

$$0.7812 = \frac{\mathbf{CO}}{3.5}$$

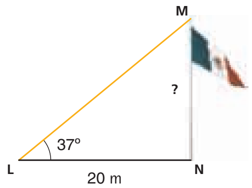
Despejando el valor del **CO**, queda:

$\mathbf{CO} = 0.7812 \times 3.5$

$\mathbf{CO} = 2.73$

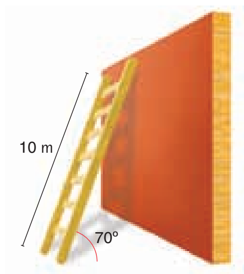
La longitud de la sombra proyectada es de 2.73 m.

4. Calcula la altura del asta bandera, si a cierta hora del día el ángulo que forma el extremo de su sombra con la punta del asta mide 37°.



Medida del asta bandera: __________

5. Una escalera de 10 m de longitud se apoya en una pared formando un ángulo de 70° con el piso.



Usa el seno del ángulo de 70° para calcular qué distancia hay del piso a la altura de la escalera.

Distancia del piso a la punta de la escalera: __________

Para analizar más ejemplos de aplicación de las razones trigonométricas, pueden ver el programa *Ejercicios con razones trigonométricas*.

>>> Para saber más

Sobre las razones trigonométricas, consulta:
http://w3.cnice.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Razones_trigonometricas_operaciones_identidades/razones2.htm
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Respuesta. Usando la razón tangente se tiene que:

$\tan(37°) = \frac{\textbf{CO}}{\textbf{CA}}$

$0.7535 = \frac{\textbf{CO}}{20}$

A partir de ese punto, hay que despejar el valor del **CO**, quedando:

CO = 0.7535 × 20

CO = 15.07

La medida del asta bandera es 15.07 m.

Respuesta. Hay que utilizar la razón seno porque se conoce la medida de la hipotenusa y se quiere averiguar la del cateto opuesto (**CO**). Así pues,

$\text{sen}(70°) = \frac{\textbf{CO}}{\textbf{H}}$

$0.9396 = \frac{\textbf{CO}}{10}$

A partir de ese punto, hay que despejar el valor del **CO**, quedando:

CO = 0.9396 × 10

CO = 9.39

La distancia del piso a la punta de la escalera es de 9.39 m.

Propósito del programa 44. Mostrar mediante una serie de ejercicios la aplicación de las razones trigonométricas en la resolución de problemas.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Comparar el crecimiento exponencial con el proporcional, en el contexto de generación de las especies.

Propósito de la actividad. Se pretende poner a prueba el razonamiento proporcional contra el exponencial, ayudando al alumno a descubrir que en el crecimiento de las hormigas, es cierto que al doble de tiempo habrá el doble de hormigas (porque es una relación de proporcionalidad directa), pero que no se cumple en el caso de las bacterias (porque tienen un crecimiento exponencial).

Sugerencia didáctica. No adelante a los alumnos información acerca de cómo es el tipo de crecimiento de las hormigas y de las bacterias, permítales avanzar en la resolución y podrán llegar a sus propias conclusiones.

Respuestas.

a) 8 bacterias. A los 10 minutos ya hay 2, a los 20 minutos hay 4, a los 30 minutos ya son 8.

b) 10 minutos, porque si en 10 minutos cada bacteria se convierte en 2, entonces les tomará ese tiempo crecer al doble y llenar el frasco.

c) 10 hormigas.

d) Dos años.

Propósito del Interactivo. Estudiar el crecimiento exponencial en diversos ejemplos de la realidad.

SECUENCIA 24

El crecimiento exponencial y el lineal

Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial de diversas situaciones.

SESIÓN 1

CRECIMIENTO DE POBLACIONES

>>> Para empezar

Las bacterias son organismos unicelulares, tan pequeños que no pueden verse sin microscopio. Y son causantes de múltiples enfermedades.

En la naturaleza se pueden encontrar distintas formas de reproducción de las especies.

Por ejemplo, las bacterias se parten en dos para reproducirse, es decir, una bacteria se alarga y se estrecha por la mitad hasta que se parte y se convierte en dos bacterias idénticas a la original.

Otra forma peculiar la podemos encontrar en las colonias de hormigas. La mayoría de las colonias se inician con una hormiga reina proveniente de otro hormiguero. La hormiga reina cava un agujero y se esconde ahí; después de un tiempo empieza a procrear nuevas hormigas. Durante un largo periodo, la reina es la única encargada en generar nuevos miembros a la colonia; más adelante aparecen nuevas reinas que la ayudan a seguir procreando.

>>> Consideremos lo siguiente

En un frasco hay una bacteria y se sabe que le toma 10 minutos para partirse en dos.

a) ¿Cuántas bacterias habrá en el frasco después de 30 minutos? ________

b) Si después de 10 días el frasco está a la mitad, ¿cuánto tiempo faltará para llenarse? ________

c) Si la hormiga reina engendra dos nuevas hormigas cada día, ¿cuántas hormigas habrá (sin incluir a la reina) después de 5 días? ________

d) Si el hormiguero está a la mitad de su capacidad después de 1 año, ¿cuánto tiempo faltará para llenarse? ________

146

Eje
Manejo de la información.
Tema
Representación de la información.
Subtema
Gráficas.
Antecedentes
Los alumnos han estudiado diversos aspectos de las relaciones lineales. En esta secuencia las compararán con las relaciones exponenciales utilizando el llenado de tablas y las gráficas.

Propósito de la secuencia
Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Crecimiento de poblaciones** Comparar el crecimiento exponencial con el proporcional, en el contexto de generación de las especies.	Programa 45 Interactivo
2	**Interés compuesto** Observar que el crecimiento exponencial siempre rebasa al crecimiento lineal.	
3	**La gráfica exponencial** Reconocer que el crecimiento exponencial aumenta a una razón constante.	Programa 46
4	**La depreciación de las cosas** Definir el decrecimiento exponencial.	Programa 47 Interactivo

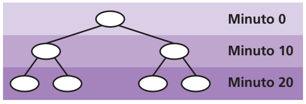
Comparen sus respuestas y comenten

Para duplicar la cantidad de bacterias, ¿se requiere el doble de tiempo?

Para duplicar la cantidad de hormigas, ¿se requiere el doble de tiempo?

>>> Manos a la obra

I. Observa el siguiente diagrama que ilustra cuántas bacterias habrá después de 20 minutos.



Completa la siguiente tabla para calcular cuántas bacterias habrá en el frasco después de una hora.

Minutos	0	10	20	30	40	50	60
Bacterias	1	2	4	8	16	32	64

II. De las siguientes sucesiones de números, ¿cuál está asociada al crecimiento de las bacterias en espacios de 10 minutos? Subráyala.

a) 1, 2, 4, 8, 16, ... b) 1, 2, 3, 4, 5, ... c) 1, 2, 4, 6, 8, ...

Describe con tus palabras cómo generar cada elemento de la sucesión.

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Las sucesiones en las que cada término es resultado de multiplicar el término anterior por un número fijo son llamadas **sucesiones exponenciales**. El número fijo por el que se multiplica es llamado **razón común**. Por ejemplo, la sucesión correspondiente a la reproducción de las bacterias es exponencial porque el número de bacterias que habrá dentro de 10 minutos se obtiene multiplicando el número actual por 2. En este caso la razón común es 2.

Además, en las sucesiones exponenciales, los términos también se pueden obtener elevando la razón común a algún exponente. Por ejemplo, la siguiente sucesión exponencial con razón común 2:

$$7, \quad 14, \quad 28, \quad 56, \quad 112, \ldots$$

se puede escribir como:

$$7 \times 2^0, \quad 7 \times 2^1, \quad 7 \times 2^2, \quad 7 \times 2^3, \quad 7 \times 2^4, \ldots$$

147

Respuestas. Para duplicar la cantidad de bacterias no se requiere el doble de tiempo, se reproducen mucho más rápido. En cambio, para duplicar la cantidad de hormigas sí es necesario el doble de tiempo.

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos discutan esta cuestión dando el tiempo que sea necesario, ya que es esencial que se percaten de las diferencias entre uno y otro crecimiento.

Sugerencia didáctica. Si lo considera útil, diga a los alumnos que sigan dibujando el diagrama añadiendo "niveles" para que observen cómo es el crecimiento de las bacterias.

Es importante que a partir de este punto en la sesión, no confundan el crecimiento exponencial (el de las bacterias) con el lineal (el de las hormigas).

Cuando hayan completado la tabla, haga notar que entre el minuto 10 y el 20 es cierto que transcurrió el doble de tiempo para que hubiera el doble de bacterias, pero que entre el minuto 20 y el 30 (y de ahí en adelante) no transcurrió el doble de tiempo pero sí se duplicaron las bacterias.

3

Posibles respuestas. Se esperan respuestas que señalen el carácter recursivo de la sucesión, por ejemplo:

- Se van duplicando los números.
- Se multiplica por dos al número anterior.

Sugerencia didáctica. Convendría que los alumnos extiendan la tabla de la actividad I hasta los 120 minutos (dos horas) para completarla y obtener las respuestas a estas preguntas.

Respuestas.

a) 2 048

b) No, si fuera el doble serían 128 bacterias.

c) No es correcto, porque la cantidad de bacterias que hay a los 10 días se duplicará en sólo 10 minutos.

Sugerencia didáctica. Comente a los alumnos que cada día hay dos nuevas hormigas, por lo que hay que aumentar de dos en dos.

Posibles dificultades. Responder a esta pregunta puede ser complicado para los alumnos, sin embargo es importante que intenten buscar las razones por las que la relación entre el número de días y el número de hormigas es de proporcionalidad. Usted puede dibujar en el pizarrón las dos tablas que llenaron para analizarlas juntos. Resalte el hecho de que el número de hormigas es igual al doble del número de días, por ello, es una relación de proporcionalidad. Si y representara al número de hormigas y x el número de días, la expresión que modela este fenómeno sería $y = 2x$.

Insista en que expliquen esa diferencia. Si no logran ponerse de acuerdo o no tienen claro en qué consiste la diferencia, más adelante habrá otra oportunidad para discutirlo.

SECUENCIA 24

III. a) Calcula el número de bacterias que habrá en el frasco después de 2 horas.

______

b) ¿Es este número el doble que el número de bacterias que había en 1 hora?

______

c) En el problema del apartado *Consideremos lo siguiente*, ¿será verdad que el frasco se llenará en 20 días? ______ . ¿Por qué? ______

______

IV. Completa la siguiente tabla para calcular cuántas hormigas habrá después de 5 días (sin contar a la hormiga reina).

Número de días	0	1	2	3	4	5
Hormigas	0	2	4	6	8	10

¿Cuántas hormigas habrá después de 10 días? 20

¿Cuántas hormigas habrá después de 30 días? 60

Comparen sus respuestas y comenten.

La relación entre el número de días y el número de hormigas, ¿es de proporcionalidad?

V. De las siguientes sucesiones, ¿cuál asociarías al crecimiento de las hormigas? Subráyala.

a) 2, 4, 8, 16, 32, ... b) 2, 4, 6, 8, 10,... c) 2, 3, 4, 5, 6, ...

Explica con tus propias palabras cómo se genera la sucesión que elegiste.

______

______

Comparen sus respuestas. Y comenten si es exponencial el crecimiento de las hormigas.

>>> A lo que llegamos

La diferencia entre el crecimiento de las bacterias y el de las hormigas es que, mientras el de las bacterias es exponencial (se multiplica por dos para obtener el siguiente), el de las hormigas es lineal (se suman dos para obtener el siguiente). Entonces, para duplicar o triplicar la cantidad en un crecimiento exponencial no es correcto duplicar o triplicar el tiempo. Por otro lado, la cantidad de hormigas además de crecer linealmente lo hacen proporcionalmente y esto implica que al doble de tiempo hay el doble de hormigas.

148

Posibles respuestas. Se espera que los alumnos contesten cosas como:

- Se le suman dos al número anterior.
- Se multiplica por dos la cantidad que corresponde al número de días.

Respuesta. El crecimiento de las hormigas no es exponencial sino lineal.

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que la tabla del crecimiento de las hormigas es proporcional, como las que llenaron en los grados anteriores.

× 2

Número de días	Número de hormigas
0	0
1	2
2	4
3	6

Al contestar esta pregunta se da respuesta a lo que se comentó en la confrontación grupal anterior: ¿Qué diferencia hay entre el crecimiento de las hormigas y el de las bacterias? El de las primeras es lineal porque es de proporcionalidad directa, su gráfica es una línea recta que pasa por el punto (0, 0) y la constante de proporcionalidad es 2. En cambio, el crecimiento de las bacterias es exponencial, la razón común es 2 y su gráfica es una curva.

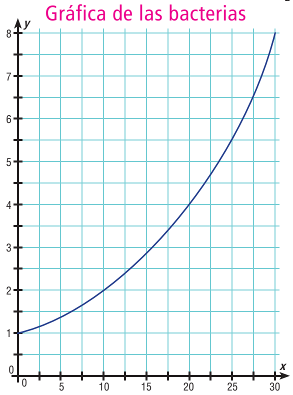
Para conocer más sobre el crecimiento exponencial, pueden ver el programa *La exponencial y la lineal.*

Propósito del programa 45. Explicar la definición de crecimiento exponencial y dar ejemplos de tal crecimiento.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

VI. Decide cuál de estas gráficas corresponde al crecimiento de las hormigas y cuál al de las bacterias. Y después anota en cada gráfica el nombre de los ejes. Las posibilidades son: "Días", "Minutos", "Cantidad de hormigas" y "Cantidad de bacterias".

Gráfica de las bacterias



Gráfica de las hormigas

Comparen sus respuestas y comenten sus razones.

Sugerencia didáctica. Los alumnos pueden hacer una tabla para encontrar la respuesta. Quedaría así:

Minutos	Número de bacterias
0	3
10	6
20	12
30	24
40	

>>> Lo que aprendimos

1. ¿Cuál de las siguientes tres sucesiones crece exponencialmente? Señálala con una ✓.

   ☐ **1, 3, 5, 7, 9, ...**   ☑ **1, 3, 9, 27, 81, ...**   ☐ **1, 4, 9, 16, 125, ...**

2. Las siguientes sucesiones crecen de forma exponencial. Para cada una escribe cuál es su razón común.

   a) 3, 6, 12, 24, 48, ...   **Razón común =** 2

   b) 2, 6, 18, 54, 162, ...   **Razón común =** 3

3. En un frasco hay tres bacterias que se generan por bipartición cada 10 minutos.

   a) ¿Cuántas bacterias habrá en el frasco después de 1 hora? __________

   b) Si el frasco está a la mitad en 10 días, ¿cuánto tiempo faltará para llenarse?

   ____

Respuestas.

a) 192 bacterias.

b) Los 10 días que ya lleva más 10 minutos.

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos que le entreguen una copia de sus respuestas a las actividades de este apartado.

Propósito de la sesión. Observar que el crecimiento exponencial siempre rebasa al crecimiento lineal.

Sugerencia didáctica. Asegúrese de que los alumnos han entendido cómo se paga el interés bancario, no es el 10% de la cantidad que se depositó originalmente, sino de la que se encuentra en ese momento en la cuenta.

Sugerencia didáctica. Permita a los alumnos utilizar la calculadora para llenar la tabla.

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos opinen sobre esta cuestión. Quizá les ayude continuar la tabla para verificar sus hipótesis de si convienen o no los $1,500 anuales conforme pasa más tiempo.

Respuesta. Sí cambia, pues al paso de 10 años con la opción de $1,500 anuales se ganarían $25,000, mientras que con la opción de 10% anual se ganarían $25,937.

SESIÓN 2

INTERÉS COMPUESTO

>>> Para empezar

El interés es el porcentaje de ganancia que se obtiene al hacer un préstamo o una inversión. Por ejemplo, si alguien presta $1 000 pesos y al año le pagan $1 500, se dice que ganó 500 de interés, o bien, que cobró 50% de interés. Cuando el interés ganado se reinvierte (o se vuelve a prestar), la nueva suma de dinero generará más ganancias. Al porcentaje ahora ganado se le llama interés compuesto, pues se obtuvo de interés sobre el interés antes ganado.

>>> Consideremos lo siguiente

Don Armando invirtió $10 000 pesos en una cuenta bancaria y el banco le pagará el 10% anual de interés. Es decir, por el primer año que deje invertido el dinero, le darán $1 000 pesos de interés (10% de $10 000 pesos). Si don Armando decide no retirar sus ganancias y dejar el dinero un año más, al año siguiente el banco le dará $1 100 pesos de interés (10% de $11 000 = $10 000 + $1 000) por lo que en la cuenta habrá $12 100. Esto es, el banco está pagando interés compuesto.

Don Armando deja su dinero en el banco por cinco años, sin retirar las ganancias de su inversión. Gracias al interés que le paga el banco, el dinero en inversión aumenta año con año.

a) Completa la siguiente tabla y observa cómo crece el dinero de don Armando.

Tiempo de inversión (años)	0	1	2	3	4	5
Cantidad en la cuenta (pesos)	10 000	11 000	12 100	13 310	14 641	16 105.1

b) Si el banco pagara a don Armando $1 000 pesos cada año (sin calcular ningún porcentaje), ¿qué cantidad de dinero tendría don Armando al final de los 5 años? $15 000 . ¿Y si le pagara $1 500? $17 500

c) ¿Con cuál de estas tres opciones ganaría más: 10% anual reinvirtiendo las ganancias, $1 000 pesos anuales o $1 500 pesos anuales? $1 500 anuales

Comparen sus repuestas.

Si pasara más tiempo, ¿cambiaría la opción con la que se gana más dinero?

¿Cuánto tiempo más?

>>> Manos a la obra

I. Para calcular lo que ganará cada año, don Armando multiplica por un **número** la cantidad de un año para obtener la del siguiente, la idea que usó don Armando para encontrar el número fue:

Lo que tendré el siguiente año = lo que tenga este año + 0.10 × lo que tenga este año =

= (?) × lo que tenga este año.

¿Qué **número** encontró? ________

Escribe los primeros términos de la sucesión asociada a la inversión de don Armando.

10 000, 11 000, 12 100, 13 310, 14 641, 16 105.1, ...

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Es exponencial el crecimiento de la inversión?

b) ¿Cuál es la razón común de este crecimiento?

>>> A lo que llegamos

El crecimiento de una inversión que paga interés compuesto es exponencial, pues se multiplica la inversión por un número fijo cada periodo de tiempo. Por ejemplo, si se invierten $1 000 pesos con interés del 2% mensual, entonces, la inversión se multiplica por 1.02 cada mes, es decir, la razón común es 1.02.

Tiempo de inversión (meses)	0	1	2	3
Inversión (pesos)	1 000	1 000 × (1.02) = 1020	1 020 × (1.02) = 1 040.04	1 040.04 × (1.02) = 1 061.208

II. La siguiente tabla muestra cómo fue creciendo el dinero de don Armando al paso de los años. Completa el tercer renglón para determinar en cuánto se incrementó cada año.

Tiempo de inversión (años)	0	1	2	3	4	5
Inversión (pesos)	10 000	11 000	12 100	13 310	14 641	16 105.10
Cantidad ganada en el año (pesos)		$1 000	$1 100	$1 210	$1 331	$1 464.10

a) La cantidad ganada en cada año, ¿aumenta, disminuye o se queda igual? ______

b) La cantidad ganada en cada año, ¿crece exponencialmente? ________

¿Cuál es la razón común? ________

151

Posibles dificultades. Quizá los alumnos tengan problemas para hallar el número que se les pide. Posiblemente les ayude si escriben con números la idea de Don Armando. Utilizando lo que depositó originalmente y la ganancia del primer año, sería:

11 000 = 10 000 + 0.10 × 10 000 = (   ) × 10 000

11 000 = 10 000 + 1 000 = 1.1 × 10 000

Respuesta. El número es 1.1

Respuesta. Para escribir esta sucesión, los alumnos no tendrán mas que copiar la tabla que llenaron en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

Respuestas. Para contestar estas preguntas, es necesario que los alumnos recuerden qué es el crecimiento exponencial y cuál es la razón común.

El crecimiento sí es exponencial porque la ganancia se obtiene al multiplicar la inversión por cierto número. La razón común es ese número, que en este caso es igual a 1.1

Respuestas.

a) Aumenta.

b) Sí es exponencial, y la razón común es 1.1

Respuestas.

a) Sí es lineal, cada aumento de 1 en los años, corresponde a un aumento de 1 500 en la inversión. La expresión sería $y = 10\,000 + 1\,500x$.

b) Se queda igual.

Sugerencia didáctica. Aclare a los alumnos que la pregunta del inciso a) se refiere a la relación entre el número de años y la cantidad en la inversión, no sobre la cantidad ganada.

Respuestas.

La inversión que aumenta cada vez más es la de la tabla 3, es decir, la inversión con intereses del 10% anual.

Las siguientes preguntas pueden replantearse así: ¿En algún momento la sucesión: 1 000, 1 100, 1 210, 1 331, 1 464.1 … es mayor que 1 500?, ¿y que 2 000?

La respuesta a la primera pregunta se encuentra si se calcula el siguiente valor de la sucesión (1 610.15). Para la segunda tendrían que calcular los tres siguientes: 1 771.5, 1 948.7 y 2 143.6

Propósito de la actividad. Con esta actividad se pretende generalizar el comportamiento de la exponencial: siempre rebasa a la lineal. La idea es que los alumnos se basen en lo que respondieron en la actividad III para crear un argumento que apunte a esta propiedad de la exponencial.

III. La siguiente tabla muestra cómo crecería el dinero de don Armando si el banco le ofreciera pagar $1 500 por año. Completa la tabla.

Tiempo de inversión (años)	0	1	2	3	4	5
Inversión (pesos)	10 000	11 500	13 000	14 500	16 000	17 500
Cantidad ganada en el año (pesos)		$1 500	$1 500	$1 500	$1 500	$1 500

Recuerdan que:
Una relación es lineal si es de la forma $y = ax + b$ *con* a *y* b *números constantes.*

a) La relación entre el número de años (x) y la cantidad en inversión (y), ¿es lineal? _____ . Escribe la expresión: ______________________

b) La cantidad ganada cada año, ¿aumenta, disminuye o se queda igual? ________

IV. Observa las tablas de la actividad **II** y **III**, y contesta:

¿En qué caso la cantidad ganada por año aumenta cada vez más? ____________

Si se dejaran pasar más años, el aumento anual de esta inversión, ¿será mayor que $1 500? __________

¿Y mayor que $2 000? __________ . ¿Por qué? ______________________

____

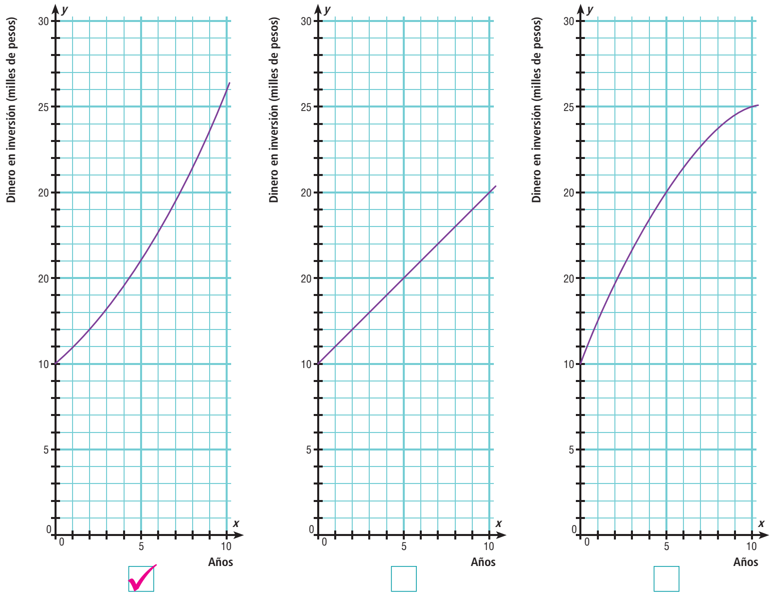
Comparen sus respuestas, comenten cuál de las siguientes afirmaciones será cierta y expliquen sus razones.

- Una inversión de $10 000 pesos puede ganar más dinero con pagos del 10% anual que con pagos anuales fijos.
- Una inversión de $10 000 pesos siempre gana más dinero con pagos fijos de $2 000 pesos anuales, que con una al 10% anual.

>>> A lo que llegamos

Los términos de una sucesión exponencial aumentan cada vez más.
Por ejemplo, en el caso de las inversiones con intereses fijos que es exponencial, el aumento en la inversión se hace más grande año con año.
Las sucesiones lineales aumentan siempre lo mismo, por lo que las exponenciales terminan por crecer más rápido que las lineales.

¿Cuál de las siguientes gráficas representa cómo incrementa la inversión de don Armando al paso de los años? Márcala con una ✓.



Respuesta.

La gráfica correcta es la primera porque en ella se representa un crecimiento que continúa aumentando con el paso del tiempo.

La segunda gráfica no es correcta porque muestra un comportamiento lineal.

La tercera tampoco pude ser porque crece cada vez menos (y no cada vez más), por ejemplo, del 2 000 al 2 001 creció poco más de 12 000, pero para del 2 009 al 2 010 creció muchísimo menos, 500.

>>> Lo que aprendimos

Si una inversión bancaria genera interés al 15% anual, ¿por cuál número hay que multiplicar la cantidad en la cuenta para obtener la cantidad que habrá al siguiente año?

____

Respuesta. Por 1.15, que sería igual que sumar a la cantidad original el 15%.

Propósito de la sesión. Reconocer que el crecimiento exponencial aumenta a una razón constante.

Propósito de la actividad. Que los alumnos comparen el crecimiento lineal y el exponencial en un mismo fenómeno.

Mientras que los cálculos del periodista remiten a una situación de crecimiento lineal, las afirmaciones del analista tienen que ver con un crecimiento exponencial.

Respuestas.

En el año 2000 afirma que había 6 000 millones de personas, así que 10 años antes habría 5200 millones.

Aunque los alumnos no conocen los cálculos que hizo el analista, podrán anticipar que éste los hizo suponiendo un crecimiento exponencial que conserva la misma razón común. Faltaría saber cuál es esa razón común.

Posibles dificultades. La pregunta puede ser confusa para los alumnos. Para ayudarlos, podría hacerse en dos partes:

¿Qué es crecer a una tasa constante?

¿Qué es crecer aumentando la misma cantidad?

Una vez que los alumnos se den cuenta de que ambas definiciones son diferentes, puede complementarse comparando con el problema original. Las siguientes preguntas pueden ayudar a orientar la comparación:

¿Qué crecimiento supone el analista?

¿Corresponde el cálculo del reportero a este crecimiento?

SECUENCIA 24

SESIÓN 3

GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN EXPONENCIAL

>>> Para empezar

El crecimiento de la población mundial es de importancia para todos. ¿Cuántos somos y cúantos seremos? son el tipo de preguntas que se hacen a menudo los gobernantes de todos los países. Para contestarlas, hay organismos internacionales que realizan censos (conteos) para estimar cuántos somos. Pero para saber cuántos seremos no es tan fácil, pues es complicado determinar si habrá guerras, enfermedades o algo que desacelere el crecimiento de la población. Lo que se hace a menudo para dar respuesta es suponer que se mantendrá constante la tasa (porcentaje) de crecimiento de los últimos años.

>>> Consideremos lo siguiente

En el año 2000 un analista hizo la siguiente afirmación:

"Hoy somos aproximadamente 6 000 millones de personas y en los últimos 10 años hemos crecido aproximadamente 800 millones. Si se mantiene esta tasa de crecimiento, dentro de 50 años seremos más del doble".

El reportero que entrevistaba al analista le comentó:

"Disculpe la interrupción, pero no me salen las cuentas. Si creciéramos 800 millones cada 10 años, dentro de 50 años seríamos 10 000 millones, que no es el doble".

Según lo dicho por el analista, ¿cuánta población había en el año 2000? __________ ;

¿y en 1990? ________ ; ¿crees que el analista se equivocó en sus cálculos? ________ .

¿Por qué? ____

____ .

¿Cómo supones que hizo sus cálculos el analista para llegar a esa conclusión? ______

____

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Es lo mismo decir que la población crece a una tasa constante a decir que aumenta la misma cantidad?

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas,

a) Entre el año 1990 y el 2000, ¿cuál fue la tasa de crecimiento de la población? __________ %.

b) Si se conservara la tasa para el año 2010, ¿cuánta población habrá para esa fecha? __________

154

Sugerencia didáctica. Si a los alumnos les cuesta trabajo hallar la tasa de crecimiento de la población, quizás les sirva el siguiente ejemplo:

En una ciudad había 1 000 habitantes.

La población aumentó en 500 habitantes.

Ahora hay 1 500 habitantes.

La población aumentó un 50%

La tasa de crecimiento fue de 50%

Respuestas.

a) Si en 1990 había 5 200 millones y aumentó a 6 000 millones para el año 2000, la tasa de crecimiento es 15% aproximadamente.

b) Si a los 6 000 millones que había en el 200 se les aplica la misma tasa de crecimiento (15%) para el año 2010 habrá 6 900 millones.

c) ¿Cómo calculaste cuánta pobación habrá en el 2010? ______________

Comparen sus respuestas.

II. Completa la siguiente tabla para determinar cuánta población habrá en 2050 según los cálculos del analista.

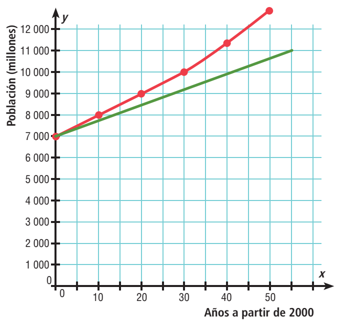
Año	1990	2000	2010	2020	2030	2040	2050
Población (millones)	5 200	6 000	6 900	7 935	9 125	10 494	12 068
Tasa de crecimiento		15%	15%	15%	15%	15%	15%

En esta tabla, el crecimiento de la población es exponencial. ¿Cuál es la razón común?
1.15

Comparen sus respuestas y comenten si es correcta la afirmación del analista:

Si se mantiene esta tasa de crecimiento, dentro de 50 años seremos más del doble.

III. En el siguiente plano cartesiano localiza los puntos que corresponden a la relación entre el año y la cantidad de población, si se mantuviera la tasa del 15% de crecimiento (tabla anterior). Después traza una curva que pase por todos los puntos que localizaste.



IV. Sobre el mismo plano cartesiano localiza los puntos que corresponden a cómo crecería la población si cada 10 años se incrementara 800 millones de habitantes. Después une los puntos. ¿De qué tipo de gráfica se trata: recta o curva? De una recta

155

Respuesta.

c) Los alumnos pueden hacer el cálculo de distintas maneras, lo importante es que al total que se tenía (la población del año 2000) le aumenten un 15%.

Sugerencia didáctica. Debido al redondeo, los cálculos que aparecen como respuestas en este libro pueden tener ligeras diferencias con las de los alumnos. Si lo considera útil, lleguen a un acuerdo sobre si van a manejar cifras decimales.

Sugerencia didáctica. Permita que los estudiantes expresen sus ideas al llegar a esta parte de la sesión. Es importante que reflexionen en grupo y que usted oriente la discusión hacia la diferencia que hay entre lo que afirmaba el analista y lo que afirmaba el reportero.

Si el crecimiento de la población es exponencial, entonces el analista tenía razón.

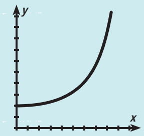
Respuestas. La línea roja corresponde a las cantidades que se obtienen utilizando el razonamiento del analista. La línea verde a las del reportero.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que expliquen sus respuestas acerca de cuál gráfica corresponde a cuál razonamiento. Ellos ya han aprendido distintas características de las situaciones lineales (como la del reportero), mismas que les servirán para comparar con la curva que obtienen con la situación exponencial (como la del analista).

V. De las dos gráficas que quedaron dibujadas, señala la que corresponde al cálculo del analista y la que corresponde al cálculo del reportero.

>>> A lo que llegamos

Cuando la tasa de crecimiento de una población se mantiene constante, entonces el crecimiento es exponencial. La gráfica de una relación exponencial es una curva que se ve así:



Propósito del programa 46. Analizar la gráfica del crecimiento exponencial.

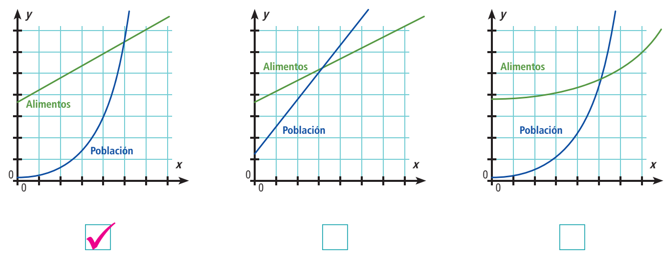
Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Para conocer más ejemplos de crecimiento exponencial y su gráfica, pueden ver el programa *Gráfica de la exponencial*.

>>> Lo que aprendimos

Respuesta. La primera gráfica porque en ella la línea correspondiente a la producción de alimentos es recta, y la del crecimiento de la población es una curva.

1. Algunas teorías económicas, de mucha controversia, explican que el crecimiento de la población mundial es exponencial y el de la producción de alimentos es lineal. Por lo que, en algún momento, habrá una catástrofe mundial por la disputa de alimentos. Elige la gráfica que bosqueja mejor esta idea y márcala con ✓.



Respuesta. El momento de la catástrofe es el punto de intersección de las dos gráficas, porque la población superaría a la producción de alimentos.

En la gráfica que elegiste, marca el punto que correspondería al momento de la catástrofe.

156

LA DEPRECIACIÓN DE LAS COSAS

SESIÓN 4

Propósito de la sesión. Definir el decrecimiento exponencial.

>>> Para empezar

Por lo general, el valor real de un objeto empieza a disminuir al paso del tiempo, a eso se le llama ***depreciación***. Por ejemplo, el valor de un automóvil disminuye al paso de los años, pues ya está usado, ya hay otros más nuevos, etc., así que, entre más tiempo pase, más barato se tiene que vender el automóvil. Hay otras cosas que no se deprecian, y que inclusive pueden subir de precio, por ejemplo, un terreno bien ubicado o un collar de oro.

2

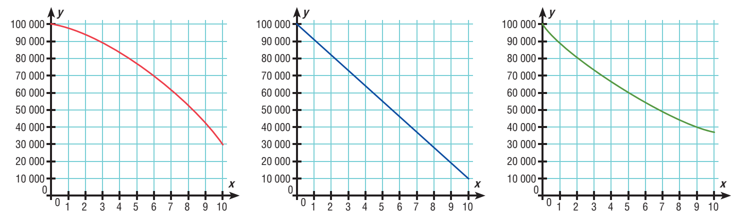
Propósito del Interactivo. Estudiar el decrecimiento exponencial en diversos ejemplos de la realidad.

>>> Consideremos lo siguiente

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen la depreciación con la gráfica que le corresponde.

Un automóvil que cuesta $100 000 pesos se deprecia un 10% cada año. ¿Cuánto costará el automóvil después de 1 año? _______________ . ¿Y después de dos años? _______________

¿Cuál de las siguientes gráficas describe mejor el cambio de precio del automóvil? Márcala con ✓.



Respuestas. Después de un año el automóvil valdrá 10% menos, es decir, $90,000. Después de dos años valdrá el 10% menos con respecto al último precio, es decir, $81,000.

La gráfica que representa este comportamiento es la tercera.

Sugerencia didáctica. Si los alumnos eligen una gráfica incorrecta o bien, eligen la correcta pero no saben cómo justificar su respuesta, permítales seguir resolviendo la sesión ya que en el siguiente apartado aprenderán a hacerlo.

Comparen sus respuestas y comenten:

Si el precio disminuyera $10 000 pesos cada año, ¿cómo se vería la gráfica?

Respuesta. Se vería como una recta con pendiente negativa, como la segunda gráfica.

>>> Manos a la obra

I. Calculen el valor del automóvil al paso de los años, y completen la tabla.

Tiempo de vida del automóvil (años)	0	1	2	3	4	5	6
Valor actual del automóvil (pesos)	100 000	90 000	81 000	72 900	65 610	59 049	53 144
Disminución respecto al año anterior (pesos)		10 000	9 000	8 100	7 290	6 561	5 905

157

Respuesta. La cantidad se reduce, cada año el precio disminuye menos.

Sugerencia didáctica. Diga a los alumnos que revisen la respuesta que dieron al elegir una gráfica en el apartado *Consideremos lo siguiente*, y que corrijan si es necesario verificando que la gráfica pase por los puntos que corresponden a las cantidades de la tabla que acaban de completar.

Propósito del programa 47. Analizar situaciones que corresponden a un decrecimiento exponencial y sus gráficas.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Respuesta. 0.9

Posibles dificultades. Si los alumnos no saben cuál es la razón común en este caso, dígales que escriban los datos de la tabla como una sucesión de números. Deben hallar un número por el cual se puede multiplicar cada número de la sucesión y obtener el siguiente, es decir, la razón común.

Recuérdeles que el número que buscan es menor que 1, según la información del *A lo que llegamos*.

Quizá los alumnos piensen que la respuesta es 0.1 (porque pueden relacionarlo con el 10%), pero es incorrecto. Pídales que comprueben si multiplicando 100 000 × 0.1 obtienen 90 000, o si 90 000 × 0.1 es igual a 81 000, así se darán cuenta del error.

La diferencia del valor de un año al otro, ¿se hace más grande, se reduce o se queda igual cada año? ______________

Comparen sus respuestas y los procedimientos que usaron para llenar la tabla. Verifiquen que los datos en la tabla coincidan con la gráfica que eligieron.

>>> A lo que llegamos

Al igual que hay crecimiento exponencial, también hay decrecimiento exponencial. La diferencia es que, en el decrecimiento exponencial, la razón común es menor a uno; y en el crecimiento exponencial, es mayor a uno. Por ejemplo, la siguiente sucesión decrece exponencialmente, pues su razón común es $\frac{1}{2}$.

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Para conocer más sobre las características del decrecimiento exponencial, pueden ver el programa *Decrecimiento exponencial*.

II. En el caso del automóvil, su valor año con año decrece de forma exponencial. ¿Cuál es la razón común? ______________

>>> Lo que aprendimos

Realicen la siguiente actividad. Recorten un cuadrado de lado 16 cm y anoten aquí su área:

Área del cuadrado: 256 cm².

Doblen el cuadrado a la mitad varias veces y por cada doblez que hagan calculen y apunten el área de la región más pequeña que se forma en la hoja. Llenen la siguiente tabla:

Número de doblez	1	2	3	4	5
Área de la región pequeña (cm²)	128	64	32	16	8

¿El área decrece exponencialmente? ________ . ¿Cuál es la razón común? ________

¿Qué área tendrá la región más pequeña después de doblar 10 veces al cuadrado original? ______________ cm².

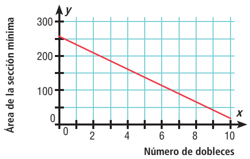
Integrar al portafolios. Analice las respuestas de los alumnos a las actividades de este apartado y guarde una copia en el portafolios de cada uno.

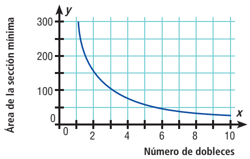
Respuestas.

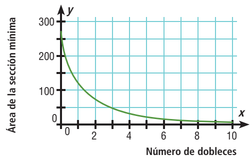
El área sí decrece exponencialmente, y la razón común es $\frac{1}{2}$ ya que si se multiplica cada uno de los números por esta razón, se obtiene el siguiente.

Si se doblara 10 veces el área sería 0.25 cm².

¿Cuál de las siguientes gráficas creen que refleje cómo se comporta este decrecimiento?







>>> Para saber más

Sobre el interés compuesto, consulten:
http://valle.fciencias.unam.mx/~lugo/bach1/Intereses/index.html
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Facultad de Ciencias. UNAM.

Sobre el crecimiento exponencial, consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Perelman, Yakov. "54. Leyenda sobre el tablero de ajedrez" en *Matemáticas recreativas*. México: SEP/Planeta, Libros del Rincón, 2003.

Respuestas.

La primera gráfica no puede ser la correcta puesto que representa a una situación lineal.

La segunda se puede eliminar observando al hacer el segundo doblez el área ya debe ser menor que 100 cm^2.

La tercera gráfica es la correcta.

SECUENCIA 25

Representación de la información

En esta secuencia conocerás problemas cuya resolución requiere que tomes en cuenta mucha información.

Propósito de la sesión. Obtener nueva información a partir del estudio de un conjunto grande de datos.

SESIÓN 1

MUCHOS DATOS

>>> Para empezar

Nuestro sistema solar está conformado por ocho planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno (recientemente, Plutón fue eliminado de la lista debido a que es demasiado pequeño para ser considerado planeta). En la siguiente figura se muestran los cinco planetas más cercanos al Sol.

Los asteroides son cuerpos rocosos o metálicos más pequeños que los planetas. En la figura puedes ver que entre Marte y Júpiter hay un grupo de asteroides, y debido a su ubicación en el sistema solar, algunos científicos plantearon la hipótesis de que eran los restos de un planeta que se desintegró hace muchos años.

Actualmente se sabe que esa hipótesis es falsa, y en esta sesión estudiaremos cómo se llegó a dicha conclusión. Empecemos suponiendo que sí existió un planeta entre Marte y Júpiter al que llamaremos planeta X.

Propósito de la actividad. A través del llenado y análisis de la tabla, se pretende que los alumnos utilicen sus conocimientos sobre patrones para anticipar las distancias a la que se encuentran los planetas.

Sugerencia didáctica. Una cosa que seguramente los alumnos notarán, es que la distancia entre los planetas va aumentando mientras éstos son más lejanos al Sol. Sin embargo, quizás sea difícil encontrar un patrón para saber las distancias que no aparecen en la tabla.

Si es el caso, permita que los alumnos hagan sus conjeturas y sigan resolviendo, en el siguiente apartado se les brindarán elementos para hallar el patrón.

>>> Consideremos lo siguiente

Para medir las distancias que hay entre los cuerpos celestes de nuestro sistema solar, los astrónomos utilizan una unidad de longitud llamada Unidad Astronómica (UA), que es la distancia de la Tierra al Sol.

En la siguiente tabla se muestran las distancias que hay entre algunos planetas y el Sol. Descubre el patrón y aproxima las distancias a las que se encuentran Mercurio, Neptuno y el planeta X.

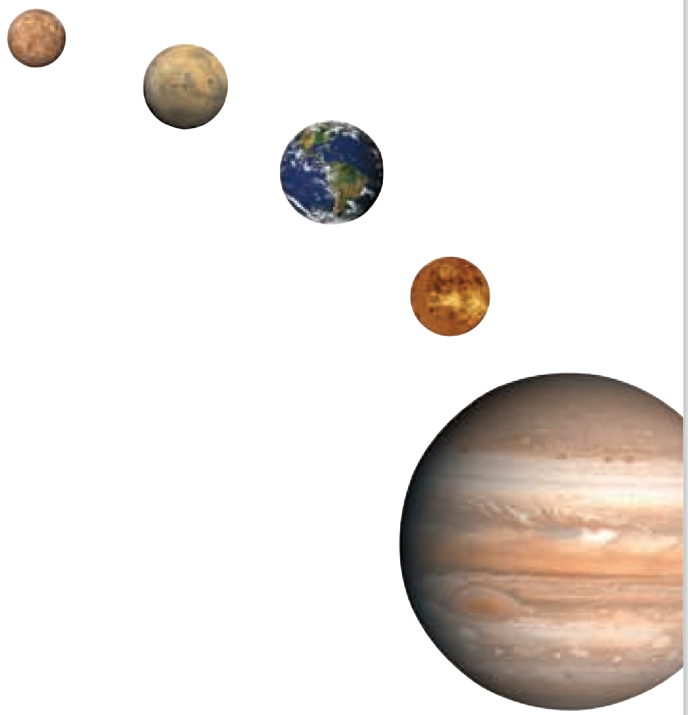
Propósito del Interactivo. Ilustrar que en ocasiones la información numérica detallada de un fenómeno puede esconder relaciones funcionales relativamente simples pero no triviales.

160

Eje
Manejo de la información.
Tema
Representación de la información.
Subtema
Gráficas.
Antecedentes
En esta secuencia los alumnos continuarán obteniendo y analizando información, y además vincularán datos de distintas fuentes para mejorar sus análisis.

Propósito de la secuencia
Analizar la relación entre datos de distinta naturaleza para producir nueva información sobre algún fenómeno.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Muchos datos** Obtener nueva información a partir del estudio de un conjunto grande de datos.	Programa 48 Interactivo
2	**De importancia social** Obtener nueva información a partir de datos agrupados en una tabla.	



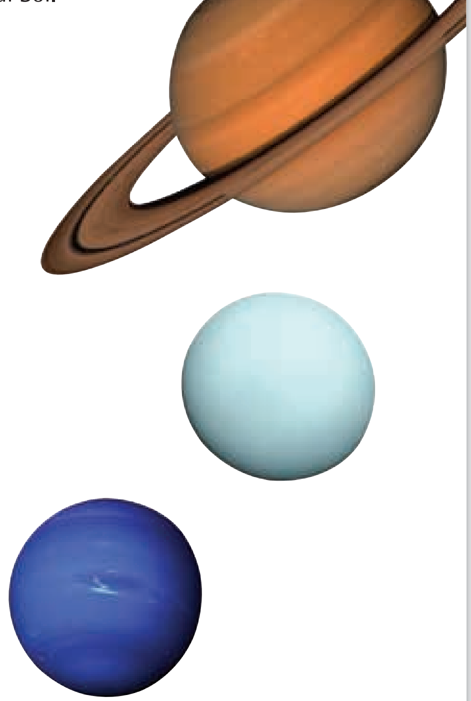
Planeta	Distancia al Sol (UA)
Mercurio	
Venus	0.7
Tierra	1.0
Marte	1.6
Planeta X	
Júpiter	5.2
Saturno	10.0
Urano	19.6
Neptuno	

Tabla 1

Comparen sus respuestas y sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. Encuentra el patrón que hay en las diferencias de distancias completando la tabla 2. Esto te ayudará a descubrir el patrón en las distancias de los planetas al Sol.



Número de Planeta	Planeta	Distancia al Sol (UA)
1	Mercurio	0.55
2	Venus	0.7
3	Tierra	1.0
4	Marte	1.6
5	Planeta X	2.8
6	Júpiter	5.2
7	Saturno	10.0
8	Urano	19.6
9	Neptuno	38.8

Tabla 2

Diferencia de distancias (UA)
0.15
0.3
0.6
1.2
2.4
4.8
9.6
19.2

Respuesta. El patrón de las diferencias es una sucesión exponencial con factor común 2, o sea, cada diferencia se multiplica por 2 para obtener la siguiente.

Sugerencia didáctica. Una vez que hayan encontrado las diferencias, diga a los alumnos que hagan las correcciones necesarias a la tabla que llenaron en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

Sugerencia didáctica. Aproveche este momento para que varios alumnos comenten al grupo sus estrategias y respuestas, y para que quienes no hayan encontrado el patrón o tengan uno equivocado, lo corrijan. La sucesión es la exponencial con factor común 2 (ir multiplicando por 2 o sacando el doble).

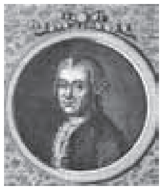
Propósito de la actividad. Esta actividad, además de poner a prueba su comprensión de la lectura, también les exige relacionar los datos aquí mencionados con los que ellos ya calcularon.

a) Describe cuál fue el patrón que encontraste para las diferencias.

b) Usa estas diferencias para calcular nuevamente las distancias al Sol de los planetas Mercurio, Neptuno y el planeta X. Después, compara estos valores con los que habías calculado antes.

Comparen sus respuestas.

II. Al patrón que encontraste en la actividad anterior se le conoce como Ley de Bode. Lee la siguiente reseña sobre la Ley de Bode y después contesta las preguntas.



En 1772 el astrónomo alemán Johann Daniel Titius descubrió un patrón entre las distancias de los planetas al Sol. Este descubrimiento fue publicado más tarde por Johan Elert Bode y hoy se le conoce como la ley de Bode. Basado en el patrón, Bode afirmó que debía existir un planeta ubicado a 2.8 UA del Sol: el planeta X. Muchos buscaron al planeta, mas lo que hallaron fueron asteroides. En 1801 el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi descubrió a 2.76 UA del Sol (muy cerca de lo predicho por Bode) un asteroide hoy conocido como Ares, y miles de otros pequeños asteroides han sido encontrados a distancias similares.

La ley de Bode también ayudó a descubrir a Urano, sin embargo, cuando Neptuno fue descubierto a 30 UA del Sol los astrónomos se dieron cuenta de que la ley de Bode no describe completamente la distribución de los planetas en nuestro sistema solar.

a) ¿Por qué la existencia de los asteroides era evidencia a favor de la ley de Bode?

b) ¿Cómo ayudó la ley de Bode para encontrar el planeta Urano?

c) ¿Por qué el descubrimiento de Neptuno hizo que los astrónomos desecharan la ley de Bode?

Comparen sus respuestas.

162

Respuestas.

a) Por que fueron encontrados a una distancia de 2.8 UA , donde Bode suponía que debía haber un planeta.

b) Según Bode, a 19.6 UA debía existir un planeta, sí que los astrónomos apuntaron sus telescopios a esa distancia y encontraron a Urano.

c) Por que se encontraba a una distancia de 30 UA, y según la ley de Bode, debía estar a una distancia de 38.8 UA.

Sugerencia didáctica. Resalte que para responder estas preguntas usaron tanto los datos del texto como los de la tabla.

>>> Lo que aprendimos

1. La siguiente tabla contiene información sobre los ocho planetas que conforman el sistema solar. Usa esos datos para contestar lo que se te pide.

Planeta	Tierra	Júpiter	Marte	Mercurio	Neptuno	Saturno	Urano	Venus
Distancia promedio al Sol (millones de km)	149.6	778	227.9	57.9	4 497	1 427.2	2 870	108.2
Diámetro (km)	12 755	14 2748	6 786	4 879	49 568	120 057	51 820	12 104
Velocidad de traslación alrededor del Sol (km/h)	107 248	47 018	86 872	172 412	19 549	34 705	24 517	126 115
Velocidad de rotación sobre su eje (km/h)	1 674	45 585	866	11	9 719	36 841	14 795	6
Periodo de traslación: tiempo que tarda en dar una vuelta al Sol (años)	1	11.86	1.88	0.2408	164.8	29.46	84.01	0.6151
Periodo de rotación (tiempo que tarda en dar una vuelta sobre su eje)	23.9 horas	9.9 horas	24.6 horas	58.7 días	15.8 horas	10.2 horas	10.7 horas	243 días
Número de lunas	1	12	2	0	2	10	5	0

Tabla 3

Las siguientes afirmaciones están basadas en la información de la tabla anterior, ¿cuál o cuáles son correctas?

- [x] A mayor distancia al Sol, mayor periodo de traslación.
- [ ] Entre más grande sea un planeta, tiene más lunas.
- [ ] Entre más pequeño es el planeta, más lentamente gira sobre su eje.

Comparen sus respuestas.

2. El matemático Johannes Kepler (1571-1630) descubrió la relación entre el tiempo que tarda un planeta en darle la vuelta al Sol (T años) y la distancia media entre el planeta y el Sol (R millones de kilómetros). La relación se representa con la expresión:

$$\frac{R^3}{T^2} = K, \text{ donde } K \text{ es una constante.}$$

Recuerda que:

1 UA es aproximadamente 149.6 millones de kilómetros.

163

Propósito de la actividad. Explorar conjeturas ya hechas y decidir si son verdaderas o falsas a través del análisis de la información presentada.

Sugerencia didáctica. Para contestar las preguntas puede sugerir a los alumnos que organicen la información de la manera que a ellos les parezca conveniente, por ejemplo, en otra tabla o en una gráfica. Lo importante es que sean ellos quienes decidan cómo hacerlo.

Respuestas.

La primera afirmación es correcta.

La segunda afirmación es falsa, pues Marte tiene menor diámetro que la Tierra y tiene más lunas.

La tercera afirmación también es falsa porque Marte es más pequeño que la Tierra y sin embargo, gira más lento que ésta última.

2

Respuestas.

a) 3 375 000. Esta constante puede obtenerse utilizando los datos de cualquiera de los planetas.

b) 4.68 años. Para responder esta pregunta los alumnos necesitarán hacer dos cosas: en primer lugar, convertir la distancia del Planeta X al Sol de UA a km, en segundo lugar necesitan usar la fórmula de la Ley de Keppler reacomodándola para obtener el dato que desconocen. Quedaría:

$$T^2 = \frac{R^3}{K}$$

$$T = \sqrt{\frac{R^3}{K}}$$

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que hagan estas operaciones con la calculadora.

Propósito del programa 48. Presentar datos del sistema solar y generar información con base en ellos.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Obtener nueva información a partir de datos agrupados en una tabla.

Sugerencia didáctica. Las actividades están planeadas en parejas y en casi todas ellas es recomendable el uso de la calculadora.

a) Con los datos de la tabla 3, encuentra el valor de la constante ***K***.

K = ________

b) Usa el valor de ***K*** para encontrar un valor estimado del tiempo que, de existir, le tomaría al planeta X dar la vuelta al Sol.

Tiempo en dar una vuelta completa al Sol = ______________

Para conocer más datos del Sol y los planetas, pueden ver el programa *El sistema solar*.

SESIÓN 2

DE IMPORTANCIA SOCIAL

>>> Para empezar

La siguiente tabla contiene algunos datos recaudados por el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI), en el *Censo 2005*, de las mujeres mexicanas de 12 o más años. En esta tabla se han clasificado las mujeres por cantidad de hijos nacidos vivos y su condición de saber leer y escribir. Por ejemplo, el número 393 958 es la cantidad de mujeres que no tienen hijos y que no saben leer ni escribir.

Hijos por mujer	Mujeres que no saben leer ni escribir	Mujeres que sí saben leer y escribir	Mujeres que no especificaron
0 hijos nacidos	393 958	11 840 516	4 915
1 hijo nacido	184 497	4 437 193	2 007
2 hijos nacidos	247 674	5 803 809	2 379
3 hijos nacidos	297 985	4 862 409	2 176
4 hijos nacidos	325 930	2 622 937	1 864
5 hijos nacidos	326 915	1 488 118	1 574
6 o más hijos nacidos	1 703 444	3 081 457	6 606
No especificó el número de hijos nacidos vivos.	83 880	1 511 771	49 608

Tabla 4

Sugerencia didáctica. En esta parte es importante asegurarse de que todos los alumnos entiendan perfectamente el contenido de la tabla, por lo que es recomendable que la analicen juntos. Puede hacerles algunas preguntas como ¿cuántas mujeres tienen dos hijos y sí saben leer y escribir?, ¿en qué casilla estaría una mujer con 7 hijos que no sabe leer ni escribir?, ¿cuántas mujeres tienen un hijo y se desconoce si saben leer y escribir?, ¿cuántas mujeres saben leer y escribir y se desconoce si han tenido hijos?

>>> Consideremos lo siguiente

A partir de la información de la tabla anterior, un analista mexicano explicó en una entrevista que:

Cuando las mujeres saben leer y escribir, comienza el control de natalidad.

El analista detalló su afirmación explicando que las mujeres en edad reproductiva, que no saben leer ni escribir, no acostumbran tomar medidas para limitar la cantidad de hijos que van a tener, por lo que dichas mujeres tienen más hijos que una mujer que sabe leer y escribir.

El entrevistador le replicó al analista:

Disculpe... pero en 2005, de las mujeres que tuvieron 6 o más hijos, las que saben leer y escribir casi duplican en número a las que no saben.

a) ¿Es cierta la afirmación del entrevistador? __________ . ¿Contradice esto lo dicho por el analista? __________ . ¿Por qué? ______________________________

b) Con los datos de la tabla 4, decidan si lo dicho por el analista fue cierto en el año 2005. Justifiquen su respuesta: ______________________________

Comparen sus respuestas. y comenten si la siguiente afirmación es cierta o falsa:

Es natural que ocurra lo dicho por el entrevistador pues, en general, son muchas más las mujeres que saben leer y escribir que las que no saben.

>>> Manos a la obra

I. Con los datos de la tabla 4, calculen lo siguiente. Para simplificar los cálculos, ignoren los datos no especificados: la última columna y el último renglón.

a) ¿Cuántas mujeres de 12 años o más no saben leer y escribir? __________

b) De este total de mujeres, ¿qué porcentaje representan las mujeres que tuvieron 6 o más hijos? __________%.

c) ¿Cuántas mujeres de 12 años o más saben leer y escribir? __________

d) De este grupo de mujeres, ¿qué porcentaje representan las mujeres que tuvieron 6 o más hijos? __________%.

e) De los dos porcentajes calculados, ¿cuál es mayor? __________

Comparen sus respuestas y comenten si estos porcentajes reafirman o refutan lo dicho por el analista.

165

Propósito de la actividad. Aquí se pretende confrontar dos formas de analizar la misma tabla. La primera, que corresponde a la afirmación del analista, es más complicada; y la segunda, que corresponde a la afirmación del entrevistador, describe un error en el que fácilmente podrían caer los alumnos.

Sugerencia didáctica. Permita a los alumnos responder según sus propios análisis de los datos de la tabla, la oportunidad de evaluar sus respuestas la harán más adelante.

Posibles respuestas. En la pregunta del inciso a) los alumnos podrían responder "sí", pues efectivamente es casi el doble, pero podrían ocurrírseles argumentos que expliquen el comportamiento de los datos e incluso responder "no".

En la pregunta del inciso b) la respuesta debe ser negativa, pues son afirmaciones completamente distintas, pero permita que los estudiantes contesten lo que crean correcto.

Sugerencia didáctica. Antes de analizar esta nueva afirmación, dé tiempo para que los alumnos comparen las respuestas anteriores.

La nueva afirmación pone en duda la del reportero desechando cualquier intento de análisis no relativo sobre los datos, es decir, análisis que no incluyan porcentajes, proporcionalidad, razón ni promedios.

Propósito de la actividad. Mediante estas preguntas se apoya a los estudiantes para que construyan un análisis con porcentajes. Se espera que, una vez concluido, observen que:

1. Lo dicho por el entrevistador no es cierto si se analizan los porcentajes.
2. El uso de los porcentajes es más apropiado para este problema.

Respuestas.

a) 3 480 403

b) 48.94%

c) 34 136 439

d) 9.01%

e) El de las mujeres que no saben leer y escribir, 48.94%

Propósito de la actividad. Esta discusión es muy importante, dé tiempo para que los alumnos expongan sus argumentos y enfatice cómo el uso de los porcentajes permite analizar los datos de una manera completamente distinta a la que hizo el entrevistador.

Respuestas. Para obtener los datos que faltan de la tabla hay que multiplicar el número de mujeres por el número de hijos que tuvieron, por ejemplo, 297 985 × 3 (porque ese número de mujeres tuvieron cada una 3 hijos).

En el caso de aquellas que tuvieron 6 o más hijos, hay que multiplicar 1 703 444 × 6 porque es el número mínimo de personas que nacieron de esas mujeres.

a) 14 732 759 que es la suma de todos los datos de la columna derecha.

b) 4.23 hijos. Este dato se obtiene al dividir el número total de hijos entre el número total de mujeres.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos ¿qué significa la afirmación "cada mujer tiene 4.23 hijos en promedio"? Es importante que después de hacer el cálculo, traten de dar significado a la respuesta.

II. Llenen ahora la siguiente tabla para encontrar el número total de individuos cuyas madres no saben leer ni escribir. En el caso de 6 o más hijos nacidos, calculen la cantidad mínima de individuos.

Hijos por mujer	Mujeres que no saben leer ni escribir	Total de individuos nacidos
0 hijos nacidos	393 958	0
1 hijo nacido	184 497	184 497
2 hijos nacidos	247 674	495 348
3 hijos nacidos	297 985	893 955
4 hijos nacidos	325 930	1 303 720
5 hijos nacidos	326 915	1 634 575
6 o más hijos nacidos	1 703 444	10 220 664

Tabla 5

Población femenina de 12 años y más por hijos nacidos vivos, según condición no saber leer ni escribir. *Censo 2005*, INEGI.

a) ¿Cuántos individuos son hijos de mujeres que no saben leer ni escribir? ________

b) En promedio, ¿cuántos hijos tiene una mujer que no sabe leer ni escribir? ________

III. Hagan una tabla como la anterior para encontrar el número total de individuos cuya madre sabe leer y escribir, y contesten lo siguiente:

a) ¿Cuántos individuos son hijos de mujeres que sí saben leer y escribir? ________

b) En promedio, ¿cuántos hijos tiene una mujer que sí sabe leer y escribir? ________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) En promedio, ¿quiénes tienen más hijos, las mujeres que sí saben leer y escribir o las que no?

b) Sus resultados, ¿corroboran lo dicho por el analista?

c) Si se tuvieran datos más precisos, ¿creen que cambiarían mucho los resultados?

d) En la cantidad de hijos de una familia, ¿cómo creen que afectará que el padre sepa o no leer y escribir?

166

Integrar al portafolios. Pida a sus alumnos una copia de sus respuestas a la actividad III de este apartado.

Respuestas. Hay que hacer una tabla similar a la anterior, quedaría:

Hijos por mujer	Mujeres que sí saben leer y escribir	Total de individuos nacidos
0 hijos nacidos vivos	11 840 516	0
1 hijo nacido vivo	4 437 193	4 437 193
2 hijos nacidos vivos	5 803 809	11 607 618
3 hijos nacidos vivos	4 862 409	14 587 227
4 hijos nacidos vivos	2 622 937	10 491 748
5 hijos nacidos vivos	1 488 118	7 440 590
6 hijos nacidos vivos o más	3 081 457	18 488 742

a) 67 053 118

b) 1.96

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que además de comentar al grupo sus resultados, expliquen cómo los obtuvieron. La primera pregunta puede usarse como pretexto para ello.

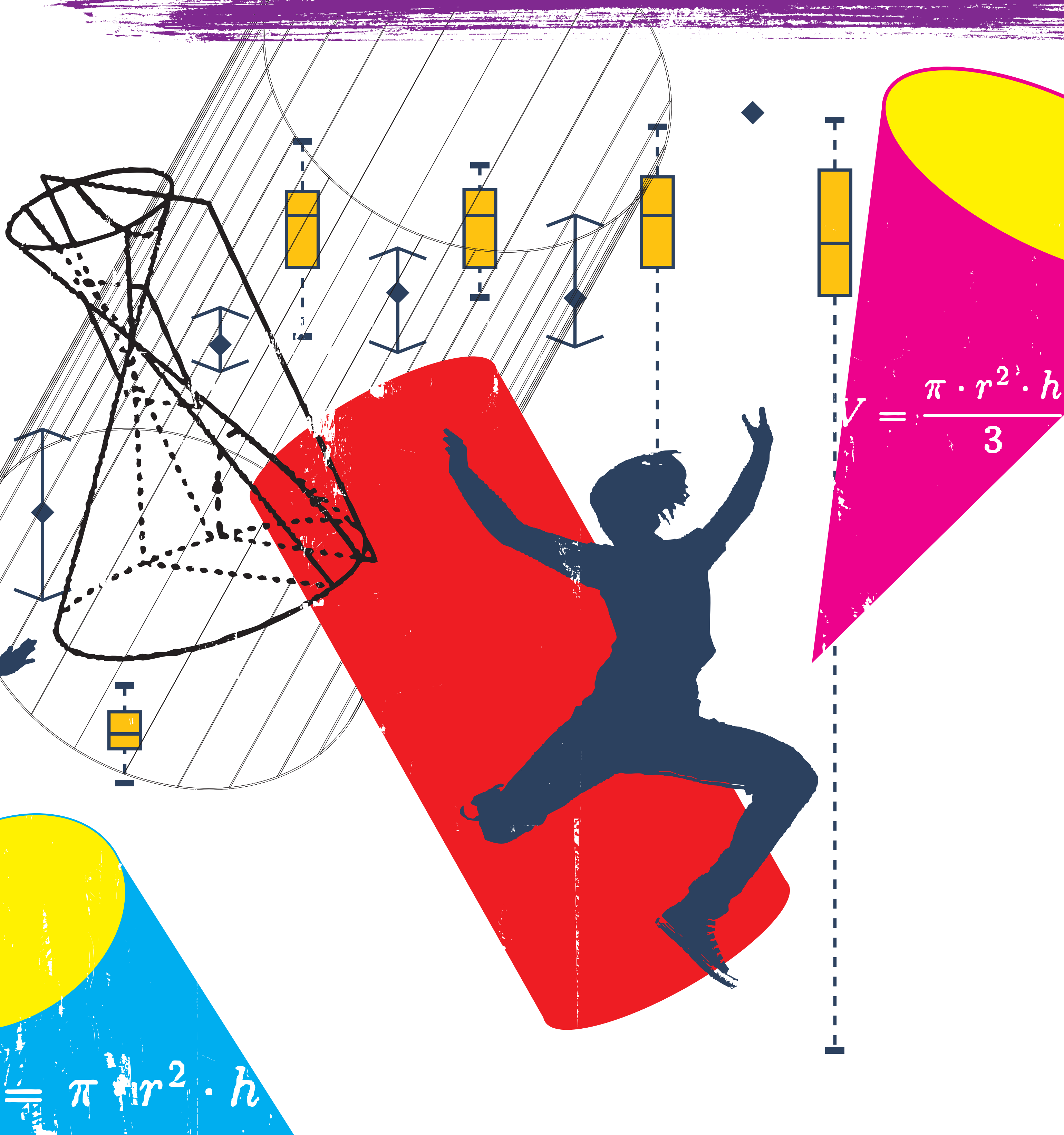
Con la segunda pregunta se espera que mediten sobre el significado de los resultados y, por supuesto, éstos corroboran lo dicho por el analista.

La tercera pregunta es para terminar la discusión sembrando una duda. Si los alumnos se animan a hacer conjeturas, pregúnteles qué datos necesitarían para sustentar sus hipótesis y sugiera que los busquen en la página de INEGI.

>>> Para saber más

Sobre los datos de las mujeres que saben leer y escribir, consulten:
http://www.inegi.gob.mx/
Ruta: II-Conteo de Población y Vivienda 2005 → Consulta Interactiva de Datos → Población femenina de 12 años y más → Elegir en la variable Fecundidad la opción Hijos nacidos vivos y en Educación elegir Nivel de escolaridad, por último presionar Ver Consulta.
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática.

BLOQUE 5



SECUENCIA 26

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

En esta secuencia aprenderás a determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se puede resolver un problema, y viceversa, proponer una situación que se modele con alguna ecuación de este tipo.

Propósito de la sesión. Solucionar problemas mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer grado.

SESIÓN 1

LOS DISCÍPULOS DE PITÁGORAS

>>> Para empezar

En la secuencia 19 y en la secuencia 30 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste a resolver ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones respectivamente. En la secuencia 15 de tu libro de **Matemáticas III**, volumen II, aprendiste a resolver ecuaciones de segundo grado. En esta secuencia aprenderás a plantear y resolver problemas cuya solución requiere resolver ecuaciones de los tipos mencionados anteriormente.

Propósito de la actividad. Con este problema se trata que de, a partir de un enunciado en lenguaje común, los alumnos logren traducir el problema a un lenguaje algebraico.

Si lo considera necesario, repasen las secuencias 19 y 30 del libro **Matemáticas II** y la 15 de **Matemáticas III**.

Respuesta. Tenía 60 discípulos.

Sugerencia didáctica. Si los alumnos no saben cómo solucionar el problema, permítales seguir resolviendo la sesión ya que en el siguiente apartado se les ayuda a plantear la ecuación.

>>> Consideremos lo siguiente

Pitágoras planteó este problema sobre el número de sus discípulos:

- El número de discípulos que tengo se distribuye de la siguiente manera:

Una mitad estudia matemáticas, una cuarta parte física, una quinta parte estudia filosofía, y además hay tres mujeres.

¿Cuántos discípulos tenía Pitágoras? ____________________

>>> Manos a la obra

I. Si x es el número de discípulos de Pitágoras, subraya la respuesta correcta.

a) ¿Qué cantidad de discípulos estudia matemáticas?

$2x$ $\qquad$ $x+2$ $\qquad$ $\frac{x}{2}$

b) ¿Qué cantidad de discípulos estudia física?

$\frac{x}{4}$ $\qquad$ $x+4$ $\qquad$ $4x$

170

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de las literales.
Subtema
Ecuaciones.
Antecedentes
Los alumnos anteriormente plantearon y resolvieron problemas mediante ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones de primer grado y ecuaciones de segundo grado. En esta secuencia continuarán utilizándolas para elegir cuál de ellas resulta pertinente para resolver cierta situación. Aunque es una secuencia en la que más que aprender algo nuevo, se aplican los conocimientos previamente adquiridos, el planteamiento de ecuaciones representa un reto importante para los alumnos.

Propósito de la secuencia
Determinar con cuál(es) ecuación(es) se puede resolver un problema, y viceversa, proponer un problema que se resuelva con cierta ecuación.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Los discípulos de Pitágoras** Solucionar problemas mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer grado.	
2	**Ecuaciones y geometría** Solucionar problemas mediante ecuaciones de segundo grado.	Programa 49 Interactivo

c) ¿Qué cantidad de discípulos estudia filosofía?

$x + 5$ $\qquad$ $\frac{x}{5}$ $\qquad$ $5x$

d) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas corresponden las condiciones del problema?

$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 3 = x$ $\qquad$ $2x + 4x + 5x + 3 = x$ $\qquad$ $\frac{x}{2} + 4x + \frac{x}{5} + 3x = x$

e) Resuelve la expresión que elegiste, ¿cuál es el valor de x? ____________

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

II. El caballo y el asno.

Un caballo y un asno caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el caballo de su enojosa carga, a lo que el asno dijo. "¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualaría a la mía."

a) ¿Cuántos sacos llevaba el caballo? 5

b) ¿Cuántos sacos llevaba el asno? 7

c) Si x es el número de sacos que lleva el caballo y si es y el número de sacos que lleva el asno, anota en el paréntesis el número de la ecuación que describe la situación.

(1) Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya.	1) $y + 1 = 2(x - 1)$ 2) $x - 1 = 2y$ 3) $x = y$
(3) Si te doy un saco, tu carga se igualaría a la mía.	1) $x = y$ 2) $x - 1 = 2y$ 3) $y - 1 = x + 1$

d) ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones está asociado con la resolución del problema anterior? Subraya el inciso correcto.

a) $y + 1 = 2(x - 1)$, $y - 1 = x + 1$ $\qquad$ b) $x - 1 = 2y$, $y - 1 = x + 1$ $\qquad$ c) $y + 1 = 2(x - 1)$, $y = x$

e) Resuelve el sistema que elegiste y verifica que los valores de x y de y sean la solución del problema.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

171

Respuesta. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 3 = x$ se puede resolver de la siguiente manera:

$\frac{10}{20}x + \frac{5}{20}x + \frac{4}{20}x + 3 = x$

$\frac{19}{20}x + 3 = x$

$3 = x - \frac{19}{20}x$

$3 = \frac{1}{20}x$

$3(20) = x$

$60 = x$

Entonces, 30 alumnos estudian matemáticas, 15 física, 12 estudian filosofía y 3 son mujeres, que hacen un total de 60 alumnos.

Posibles dificultades. Aunque la ecuación ya esté planteada los alumnos posiblemente no sepan cómo resolverla. Quizá convenga recordarles que necesitan encontrar un denominador común. El menor denominador común para 2, 4 y 5 es 20.

Partiendo de esa información, pregunte a los estudiantes: ¿qué fracción representan los discípulos que estudian matemáticas?
La respuesta es $\frac{10}{20}x$.

Hagan los mismo con las otras dos fracciones.

Sugerencia didáctica. Anote en el pizarrón las opciones con las que se puede representar cada afirmación y analícenlas en grupo, es importante que los alumnos logren traducir los enunciados en una expresión algebraica.

Respuesta. El sistema de ecuaciones

$y + 1 = 2(x - 1)$

$y - 1 = x + 1$

se puede resolver de varias formas. Si se elige despejar el valor de y en la segunda ecuación, quedaría:

$y = x + 1 + 1 = x + 2$

Entonces se sustituye en la primera ecuación:

$x + 2 + 1 = 2(x - 1)$

$x + 3 = 2x - 2$

$3 + 2 = 2x - x$

$5 = x$

Luego se averigua el valor de y:

$y + 1 = 2(5 - 1)$

$y + 1 = 8$

$y = 7$

Respuestas.

a) $2x + y = 31$

$3y - x = 23$

Despejando la x en la segunda ecuación:

$x = 3y - 23$

Se sustituye en la primera ecuación:

$2\,(3y - 23) + y = 31$

$6y - 46 + y = 31$

$7y = 77$

$y = 11$

Se busca el valor de x:

$2x + 11 = 31$

$2x = 20$

$x = 10$

b) $y - 1 = 2\,(x + 1)$

$y + 1 = 4\,(x - 1)$

Despejando la y en la primera ecuación:

$y - 1 = 2x + 2$

$y = 2x + 3$

Se sustituye en la segunda ecuación:

$2x + 3 + 1 = 4\,(x - 1)$

$2x + 4 = 4x - 4$

$4 + 4 = 4x - 2x$

$8 = 2x$

$4 = x$

Se busca el valor de e busca el valor de y:

$y + 1 = 4\,(4 - 1)$

$y + 1 = 12$

$y = 11$

c) $y = 2x + 1$

$y = 4x - 1$

Como y ya está despejada en las dos ecuaciones, entonces es cierto que:

$2x + 1 = 4x - 1$

$1 + 1 = 4x - 2x$

$2 = 2x$

$1 = x$

Se busca el valor de y:

$y = 2\,(1) + 1$

$y = 3$

SECUENCIA 26

III. a) Determina a cuál de los enunciados no le corresponde ninguno de los sistemas y relaciona las columnas cuando haya correspondencia.

Sistema asociado		Enunciado del problema
(c)	$y = 2x + 1$ $y = 4x - 1$	a) *El doble de la edad de Pedro más la edad de Ana es 31 años y el triple de la edad de Ana menos la edad de Pedro es 23 años.*
(a)	$2x + y = 31$ $3y - x = 23$	b) *Juan le dice a Lucía, si te doy un peso entonces tendría el doble de dinero del que tendrías tú, pero si me das un peso yo tendría el cuádruple de dinero del que tendrías tú.*
(b)	$y - 1 = 2\,(x + 1)$ $y + 1 = 4\,(x - 1)$	c) *Dos naranjas más un peso cuestan lo que cuesta un melón. Pero, también, cuatro naranjas menos un peso cuestan lo que cuesta un melón.*
( )	$y - 1 = 2\,(x + 1)$ $x + 1 = 4\,(y - 1)$	

b) Simplifiquen los sistemas de ecuaciones y resuélvanlos. Verifiquen también que la solución del sistema coincida con condición del enunciado.

>>> Lo que aprendimos

1. Diofanto fue un notable matemático de la Antigüedad. Parte de la historia de su vida fue tomada de la dedicatoria que aparece en la lápida de su sepulcro. La inscripción en la lápida constituye además un interesante ejercicio matemático. Completa la tabla usando la información que fue tomada de la lápida:

Lo que dice en la lápida de Diofanto	Lo que significa en lenguaje algebraico
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán larga fue su vida.	x = número de años que vivió Diofanto
La sexta parte de su vida constituyó su hermosa infancia.	$\frac{x}{6}$
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubriese su barbilla.	$\frac{x}{12}$
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en retiro.	$\frac{x}{7}$
Pasó un lustro más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito.	5
El cual tuvo una hermosa existencia, que duró tan sólo la mitad de la de su padre.	$\frac{x}{2}$
Y con profunda pena descendió a la sepultura habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo.	4

Con la información de la tabla anterior completa la ecuación y resuélvela:

$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \_\_\_\_\_\_ + 5 + \frac{x}{2} + 4$

¿Cuántos años vivió Diofanto? __________

172

Respuesta. Vivió 84 años. Una manera de resolver la ecuación es la siguiente:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

Se busca un denominador común:

$$x = \frac{14}{84}x + \frac{7}{84}x + \frac{12}{84}x + \frac{42}{84}x + 9$$

$$x = \frac{75}{84}x + 9$$

$$x - \frac{75}{84}x = 9$$

$$\frac{9}{84}x = 9$$

$$x = 9 \div \frac{9}{84}$$

$$x = \frac{756}{9}$$

$$x = 84$$

Posibles dificultades. Si los alumnos no saben cómo resolver la ecuación, ayúdelos comentando que deben encontrar un denominador común. ¿Cuál es el menor denominador común para 6, 12, 7 y 2?

Habiendo encontrado dicho denominador (84), deben escribir la ecuación utilizándolo. Plantee lo siguiente: si la vida de Diofanto se representa como x y sabemos que $x = \frac{84}{84}$ ¿qué fracción de la vida de Diofanto es la correspondiente a su infancia? Así podrán encontrar que su infancia es igual a $\frac{14}{84}x$ porque es la sexta parte de $\frac{84}{84}$.

Deben hacer lo mismo para encontrar las demás fracciones.

2. Emilio y Mauricio se fueron a pescar, al final del día Mauricio dijo: "Si tu me das 3 de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú." A lo que Emilio respondió: "Si tú me das 3 de tus peces yo tendré el doble de peces que tú".

a) ¿Cuántos peces tiene Mauricio? __________

b) ¿Cuántos peces tiene Emilio? __________

ECUACIONES Y GEOMETRÍA

SESIÓN 2

>>> Lo que aprendimos

1. Se va a lanzar un cohete de juguete puesto sobre el piso. Se sabe que la altura h (en metros) que alcanza el cohete en determinado tiempo t (en segundos) está dada por la fórmula:

$$h = -2t^2 + 20t$$

a) Si se lanza el cohete, ¿cuánto tarda en llegar al piso nuevamente? ________

b) Completa la tabla de la derecha para saber la altura que tiene el cohete en determinados periodos de tiempo.

c) ¿Para qué valores de t el valor de h es cero?

________ y __________

d) Si el valor de la altura h es cero, ¿qué ecuación permite encontrar el tiempo en que alcanza esa altura? Subráyala.

$h = 0$

$0 = -2t^2 + 20t$

$h = -2t^2 + 20t$

e) Usando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado encuentra las soluciones de la ecuación que elegiste.

t_1 = ________ t_2 = ________

f) En el plano cartesiano de la siguiente página, grafica los puntos de la tabla anterior y completa la gráfica de la expresión algebraica.

t Tiempo transcurrido (en segundos)	h Altura alcanzada (en metros)	Punto (t,h)
0	0	(0,0)
1	18	(1,18)
2	32	(2,32)
3	42	(3,42)
4	48	(4,48)
5	50	(5,50)
6	48	(6,48)
7	42	(7,42)
8	32	(8,32)

173

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad.

Respuestas.

a) Mauricio tiene 15 peces.

b) Emilio tiene 21 peces.

Si se representan los peces que tiene Mario con m y los de Emilio con e, el sistema de ecuaciones sería:

$e - 3 = m + 3$

$e + 3 = 2\ (m - 3)$

A partir de la primera ecuación, se puede saber que $e = m + 6$. Sustituyendo ese valor en la segunda ecuación se tiene que:

$m + 6 + 3 = 2\ (m - 3)$

Y resolviendo:

$m + 9 = 2m - 6$

$15 = m$

Conociendo el número de peces que tiene Mauricio, se puede averiguar cuántos tiene Emilio sustituyendo ese valor en cualquiera de las ecuaciones. En la primera sería:

$e = 15 + 6$

$e = 21$

Propósito de la sesión. Solucionar problemas mediante ecuaciones de segundo grado.

Propósito del Interactivo. Dado un problema plantear y resolver la ecuación que lo modela.

Respuestas.

a) 10 segundos, porque cuando $t = 10$, $h = 0$

$h = -2\ (10^2) + 20\ (10)$

$h = -200 + 200$

$h = 0$

Sugerencia didáctica. Si los alumnos no logran responder esta pregunta a partir de la ecuación, dígales que completen la tabla del inciso siguiente.

Aunque llega sólo hasta los 8 segundos, ellos pueden darse cuenta de que hasta el segundo 5 el cohete va alcanzando mayor altura, pero que a partir del segundo 6 empieza a descender. También puede sugerirles ampliar la tabla.

c) Para $t = 10$ y $t = 0$, es decir, cuando el cohete está en el suelo antes de ser lanzado (segundo 0) y cuando han transcurrido 10 segundos desde que se lanzó.

e) La fórmula general es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

entonces quedaría:

$$x = \frac{-(20) \pm \sqrt{20^2 - 4(-2)(0)}}{2(-2)}$$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 0}}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-20 + 20}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$x_1 = \frac{-20 - 20}{-4} = \frac{-40}{-4} = 10$$

Respuestas.

g) (0, 0) y (0, 10).

h) 0 y 10.

i) Iguales.

Sugerencia didáctica. Dé a los alumnos tiempo para reflexionar sobre el número de soluciones de una ecuación de segundo grado, según lo que aprendieron en la secuencia 15, y sobre el número de intersecciones con la gráfica de la expresión algebraica asociada a la ecuación (ambos números son iguales).

Respuestas.

j) Entre 2 y 3 segundos.

k) Entre 2 y 3 segundos y entre 7 y 8 segundos.

Permita que los alumnos den respuestas aproximadas a estas dos preguntas, de acuerdo a la tabla que completaron al inicio de la sesión.

Sugerencia didáctica. Permita a los alumnos usar la calculadora para obtener estas respuestas.

Respuesta. Para utilizar la fórmula general, primero deben escribir la ecuación en su forma general, sería: $-2t^2 + 20t - 40 = 0$, o bien, $2t^2 - 20t + 40 = 0$.

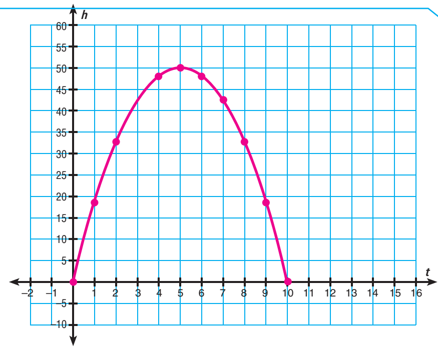
$$x = \frac{20 \pm \sqrt{-20^2 - 4(2)(40)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 320}}{4}$$

$$x_1 = \frac{20 + 8.94}{4} = \frac{28.94}{4} = 7.23$$

$$x_2 = \frac{20 - 8.94}{4} = \frac{11.06}{4} = 2.76$$

SECUENCIA 26



g) ¿En qué puntos interseca la gráfica el eje t?

(____ , ____) y (____ , ____)

h) ¿Cuál es la abscisa de estos puntos? Subráyala.

(____ , ____) y (____ , ____)

i) ¿Cómo son las abscisas anteriores y las soluciones de la ecuación que resolviste en el inciso e) distintas o iguales?

____

Comparen sus resultados y comenten:

- Toda expresión de la forma $h = at^2 + bt + c$ tiene como ecuación asociada $0 = at^2 + bt + c$ para el valor de $h = 0$.
- Las soluciones de la ecuación anterior son las abscisas de los puntos donde la gráfica de la expresión $h = at^2 + bt + c$ interseca al eje t.

j) ¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que el cohete alcance una altura de 40 m sobre el piso? ____________

k) ¿Para qué valores de t el valor de h es 40? __________ y __________

l) Si el valor de la altura h es 40, ¿qué ecuación permite encontrar el tiempo en que alcanza esa altura? Subráyala:

$h = 40$ $\qquad$ $40 = -2t^2 + 20t$ $\qquad$ $h = -2t^2 + 20t$

m) Usando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, encuentra las soluciones de la ecuación que elegiste, aproxímalo con hasta dos decimales:

t_1 = 7.23 $\qquad$ t_2 = 2.76

Comparen sus resultados y comenten la relación que existe entre las soluciones anteriores y la gráfica de la expresión.

2. Para la expresión algebraica $y = x^2 - x - 16$ encuentra:

a) La ecuación asociada para el valor de $y = 0$.

b) Las soluciones de la ecuación que obtuviste en el inciso anterior.

c) Haz la gráfica de la expresión $y = x^2 - x - 16$.

d) Verifica que las soluciones que encontraste sean las abscisas de los puntos donde la gráfica interseca el eje x.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

174

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad y valore si es necesario volver a revisar algún tema.

Respuestas.

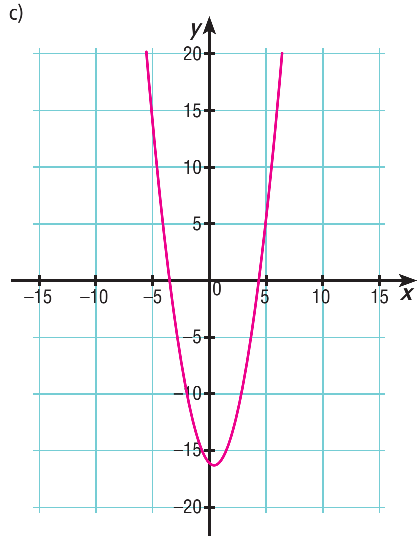
a) $0 = x^2 - x - 16$

b) $x_1 = 4.53$

$x_2 = -3.53$

Respuesta.

c)



3. Encuentra los números que satisfacen: *La suma de un número más uno elevada al cuadrado es igual al doble del número elevado al cuadrado.*

¿Cuántos números satisfacen la siguiente propiedad: la suma de un número más 1 elevada al cuadrado es igual al doble del número elevado al cuadrado? ________

a) ¿Qué número o números satisfacen la condición anterior? ________

b) Una de las siguientes ecuaciones modela el problema anterior:

1. $x + 1^2 = 2x^2$ 2. $(x+1)^2 = (2x)^2$

Desarrolla ambas y encuentra las soluciones de ambas ecuaciones.

Soluciones de la ecuación 1	Soluciones de la ecuación 2
$x_1 = -\frac{1}{2}$	$x_1 = 1$
$x_2 = 1$	$x_2 = -\frac{1}{3}$

Recuerda que:
$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$

c) Se sabe que uno de los números que satisfacen la propiedad es $-\frac{1}{3}$. Verifica con esta información las respuestas dadas anteriormente.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

4. ¿Cuántas soluciones tiene la expresión $(x+5)^2 + 3 = (x+1)^2 + 4^3$? ________

Simplifica la ecuación y resuélvela para comprobar tu respuesta.

Para conocer más ejemplos de problemas modelados con ecuaciones, pueden ver el programa *Planteamiento de problemas diversos*.

>>> Para saber más

Sobre resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/
Ruta: Aplicaciones → Álgebra → Ecuaciones y sistemas → Resolución de sistemas de ecuaciones
[Fecha de consulta: 8 de octubre de 2008].

Sobre resolución de ecuaciones de segundo grado, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/
Ruta: Aplicaciones → Álgebra → Ecuaciones y sistemas → Ecuación de segundo grado
[Fecha de consulta: 8 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos traduzcan un enunciado a una ecuación y que la resuelvan para dar respuesta al problema planteado en dicho enunciado.

Entonces, quizá la pregunta del inciso a) sea difícil que la contesten antes de resolver el resto, aunque también pueden probar con algunos números por ensayo y error para ver si cumplen la condición.

Si al responder la pregunta del inciso b) hubiera estudiantes que eligen erróneamente la ecuación 1, permítales seguir contestando. Al resolver las dos ecuaciones en el inciso c) podrán darse cuenta de que el 1 es una solución en ambas, sin embargo, en el inciso d) se les plantea que una de las soluciones es $-\frac{1}{3}$, y dicho número no es solución en la ecuación 1, así que la ecuación que modela correctamente el problema, es la 2.

Respuestas.

Ecuación 1

$x + 1^2 = 2x^2$

En su forma general quedaría:

$-2x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(1)}}{2(-2)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - 3}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Ecuación 2

$(x + 1)^2 = (2x)^2$

$x^2 + 2x + 1 = 4x^2$

$2x + 1 = 3x^2$

En su forma general quedaría:

$0 = 3x^2 - 2x - 1$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-2^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6}$$

$$x_1 = \frac{2 + 4}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{2 - 4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Respuesta. Tiene una solución.

$x^2 + 10x + 25 + 3 = x^2 + 2x + 1 + 64$

$10x - 2x = 65 - 28$

$8x = 37$

$x = 4.625$

Propósito del programa 49. Mostrar la forma de plantear problemas a partir de un enunciado y solucionarlos de formas diversas.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Identificar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras.

En esta sesión los alumnos van a analizar cómo se genera la esfera, el cono y el cilindro a partir de girar una figura sobre un eje: un círculo para la esfera, un triángulo isósceles para el cono y un rectángulo para el cilindro; también comprobarán que el cilindro se puede generar al deslizar o trasladar un círculo a través de una recta perpendicular a él.

Materiales. Instrumentos geométricos, cartulina o cualquier otro papel grueso, popotes o palitos de madera, tijeras, cinta adhesiva y pegamento.

Propósito del programa 50. Mostrar cómo generar cilindros y conos a partir de rotar figuras y construir sus desarrollos planos.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la actividad. En ésta y en varias actividades de la secuencia se pretende desarrollar la imaginación espacial de los alumnos.

Posibles respuestas. Dado que en ambos cuerpos hay círculos, algunos alumnos podrían pensar que, al girar un círculo, se puede generar el cono y el cilindro, pero esto no es así.
Es probable que identifiquen que el cilindro puede generarse a partir de rotar un rectángulo alrededor de su eje de simetría o también alrededor de uno de sus lados o de un segmento paralelo a ellos; mientras que el cono puede generarse a partir de girar triángulos, tendrán que buscar qué tipos de triángulos y cuál es el eje de giro (puede ser un triángulo rectángulo al girarlo alrededor de uno de sus catetos, o un triángulo isósceles al girarlo alrededor de su eje de simetría). Algunos alumnos podrán responder las preguntas sin necesidad de hacer las figuras, en cualquier caso se cumple el propósito de que los alumnos hagan hipótesis, ya sea que las validen físicamente o que lo hagan mentalmente.

SECUENCIA 27

Conos y cilindros

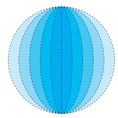
En esta secuencia vas a construir conos y cilindros y estudiarás algunas de sus características. Harás cortes a cilindros y conos rectos y estudiarás las secciones que se obtienen.

SESIÓN 1

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

>>> Para empezar

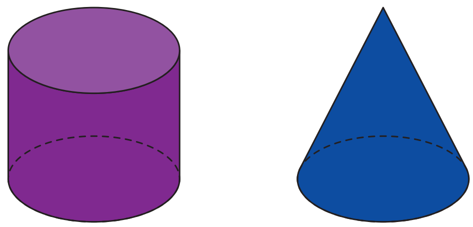
Los sólidos de revolución



Imagina que haces girar rápidamente un círculo alrededor de uno de sus diámetros, como se muestra en la figura. ¿Qué cuerpo geométrico se genera?

>>> Consideremos lo siguiente

Los siguientes cuerpos geométricos también pueden generarse al hacer girar figuras geométricas.



a) ¿Qué figura geométrica usarán y sobre cuál eje la pueden girar para generar un cilindro?

b) ¿Qué figura geométrica usarán y sobre cuál eje la pueden girar para generar un cono?

Comparen sus respuestas, observen que hay varias respuestas correctas.

176

Propósito del Interactivo. Ilustrar la generación de superficies de revolución.

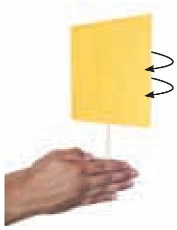
Sugerencia didáctica. Es importante que comparen las maneras distintas de generar un cono y un cilindro a las que llegaron. Invítelos a que expliquen sus respuestas.

1 3

>>> Manos a la obra

I. Recorten un rectángulo de cartulina. Peguen un popote y gírenlo como se observa en la ilustración.





a) ¿Qué cuerpo geométrico se genera? ______________________

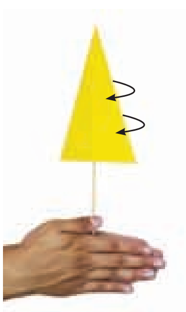
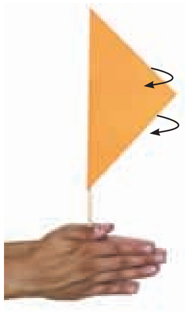
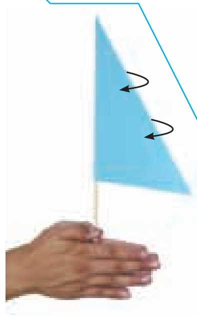
b) Si el popote se pega en un lado del rectángulo y se hace girar, ¿en qué se parece y en qué difiere el cuerpo generado con el que se generó en el inciso a)?

____

II. Recorten un círculo, ¿cómo pueden moverlo para generar el mismo cuerpo de la actividad **I**? ______________________

Pista:
El círculo no se gira alrededor de uno de sus diámetros. Se traslada sobre una recta, ¿sobre cuál?

III. Un cono puede generarse al girar un triángulo, anoten ✓ a aquellos casos en los que se genera un cono parecido al de la página 176.

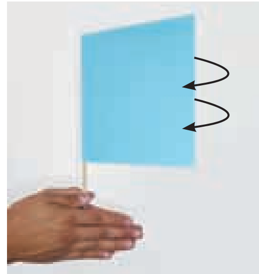
☐ ☐ ☐

177

Respuestas.

a) Un cilindro.

b) Se genera un cilindro con la misma altura pero con la base más grande.



Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos identifiquen que, al deslizar o trasladar un círculo a través de una recta perpendicular a él, se genera un cilindro. El círculo representa un corte transversal del cilindro.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos con qué tipo de triángulos, al girarlos, se genera un cono.

Posibles errores. El segundo caso es el único que no genera un cono, es probable que algunos alumnos marquen este dibujo porque observarán que se generan dos conos, en este caso puede confrontar sus hipótesis con la siguiente situación: si ponemos un cubo arriba de otro, *¿la figura que resulta es un cubo?*

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Formas geométricas.
Subtema
Cuerpos geométricos.
Antecedentes
Durante la primaria los alumnos identificaron el desarrollo plano de un cilindro y un cono, pero no calcularon todas sus medidas, en esta secuencia van a calcular las medidas de los desarrollos planos si conocen las medidas del cono y el cilindro y viceversa. En las secuencias 13, 14 y 15 de **Matemáticas II**, volumen I, los alumnos realizaron un trabajo similar al que van a hacer en las secuencias 27, 28 y 29, al construir desarrollos planos de cubos, prismas y pirámides, calcular su volumen y establecer la relación entre la fórmula para calcular el volumen de un prisma y de una pirámide.

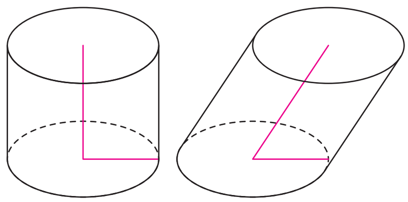
Propósito de la secuencia

Identificar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras. Construir e identificar desarrollos planos de conos y cilindros rectos. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Determinar la variación que se da en el radio de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto o en una esfera.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Sólidos de revolución** Identificar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras.	Programa 50 Interactivo
2	**Cilindros rectos** Construir e identificar desarrollos planos de cilindros rectos.	
3	**Conos rectos** Construir e identificar desarrollos planos de conos rectos.	Programa 51
4	**Secciones de corte** Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Determinar la variación que se da en el radio de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto o en una esfera.	Interactivo

Propósito de la sesión. Construir e identificar desarrollos planos de cilindros rectos.

En las secuencias 27, 28 y 29 se trabaja con cilindros rectos, en los que la cara lateral forma un ángulo recto con cada base. También hay cilindros oblicuos en los que la cara lateral no forma ángulo recto con las bases.



Materiales. Instrumentos geométricos, cartulina o cualquier papel grueso, tijeras y pegamento.

Propósito de la actividad. Lo que se pretende es centrar la atención en que los lados del rectángulo donde están trazadas las bases deben medir lo mismo que el perímetro de dichas bases (para que embonen perfectamente). En el caso del desarrollo verde esos lados son menores que las circunferencias, mientras que en el desarrollo lila son mayores (de ahí que en la consigna diga que no se tiene que desperdiciar papel).

Posibles dificultades. Si nota que en algún desarrollo los alumnos no se ponen de acuerdo, invítelos a que lo calquen, lo recorten y verifiquen sus hipótesis.

SECUENCIA 27

>>> A lo que llegamos

Un **cilindro sólido** es un cuerpo geométrico que puede generarse cuando un rectángulo gira en torno a uno de sus lados o a un segmento paralelo a ellos. Por tal motivo, es un **sólido de revolución** y se le llama así porque un significado de revolución es vuelta o giro.

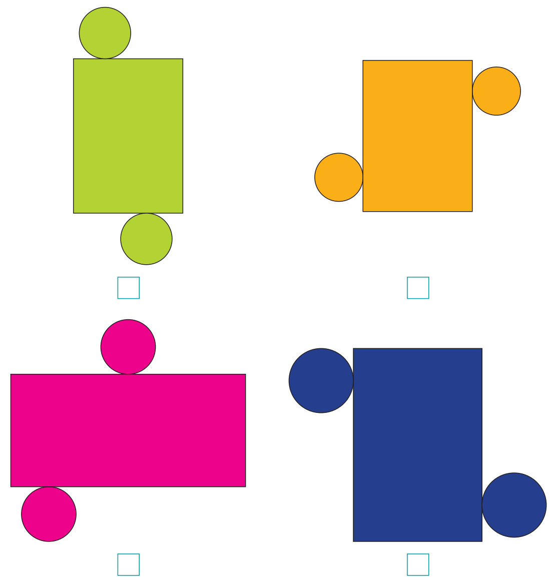
Un **cono sólido** es un cuerpo geométrico que puede generarse cuando un triángulo isósceles gira en torno a su eje de simetría. La **esfera** es un cuerpo geométrico que puede generarse cuando un círculo se gira en torno a uno de sus ejes. Por tal motivo, el cono y la esfera también son **sólidos de revolución**.

SESIÓN 2

CILINDROS RECTOS

>>> Consideremos lo siguiente

Anoten ✓ a los desarrollos planos con los que se puede construir un cilindro recto sin que se desperdicie papel. Tomen medidas si lo consideran necesario.



Comparen sus respuestas y comenten con sus compañeros la manera en que determinaron los desarrollos planos correctos.

178

Sugerencia didáctica. En este momento lo importante es que identifiquen las características que debe tener un desarrollo plano para generar un cilindro. Aunque no hayan tomado las medidas, es suficiente con que comprueben sus respuestas al calcar y recortar las figuras. Pregunte a los alumnos si es determinante la posición de las bases (debe haber una en cada lado opuesto, pero pueden colocarse en cualquier lugar de esos lados).

1 3

>>> Manos a la obra

I. Consideren el siguiente desarrollo para armar un cilindro:

a) Observen que la medida del ancho del rectángulo debe coincidir con el perímetro del círculo.

¿Por qué? ____________________

____

____

____

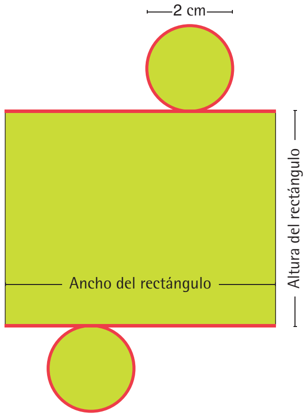
b) ¿Cuánto mide el perímetro del círculo? __________

c) Entonces, ¿cuánto debe medir el ancho del rectángulo?

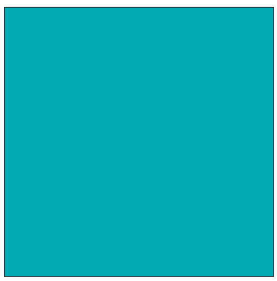
____

d) La altura del rectángulo es también la altura del cilindro. Si se arma el cilindro, ¿cuánto medirá de altura?

____



II. El siguiente cuadrado forma parte del desarrollo plano de un cilindro, termínenlo trazando sus bases. Para determinar el diámetro de las circunferencias hagan los cálculos necesarios.



III. Armen con cartulina un cilindro que mida 12 cm de altura y 5 cm de radio en sus bases. Guarden su cilindro porque lo van a ocupar en la siguiente secuencia.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo.

179

Propósito de la actividad. Explicitar la relación entre el ancho del rectángulo y la medida de la circunferencia de las bases (el perímetro de los círculos).

Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario puede recordar a los alumnos que el perímetro del círculo se calcula multiplicando la medida del diámetro por π.

Recuerde a los alumnos que 3.14 es una aproximación al valor de π. Si tienen calculadora les puede pedir que utilicen el valor de 3.14159 o el valor que venga en la calculadora.

Respuestas.

a) Para que el cilindro cierre exactamente y no sobre ni falte papel.

b) $2\pi = 6.28$ cm.

c) $2\pi = 6.28$ cm.

Posibles dificultades. Para decidir la medida del radio de la base deben usar la fórmula

perímetro $= \pi \times$ **diámetro**

en la que el perímetro es igual a la medida de uno de los lados del cuadrado.

Se despeja el diámetro

$$\textbf{diámetro} = \frac{\textbf{perímetro}}{\pi}$$

y de ahí se obtiene el radio, que es la mitad del diámetro.

Si nota que tienen dificultades puede preguntarles *¿cómo pueden obtener el diámetro de una circunferencia si conocen el perímetro?*

Propósito de la actividad. Armar un cilindro dadas sus dimensiones.

Deben trazar un rectángulo con un lado de 12 cm, el otro lado debe medir lo mismo que el perímetro de las bases, es decir 31.4 cm. Las circunferencias de radio de 5 cm van sobre los lados mayores.

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos que le entreguen una copia del dibujo de su desarrollo plano. Es importante que indiquen las medidas. Si tienen dificultades revise con ellos el apartado *A lo que llegamos* de esta sesión.

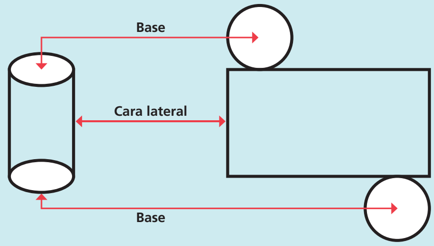
Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos lleven a cabo esta actividad porque integra las dos actividades anteriores y porque van a utilizar este cilindro en la siguiente secuencia. En clase deben encontrar la medida del lado que falta en el rectángulo. Puede pedirles que armen el cilindro en casa, Indíqueles que agreguen las pestañas para que puedan pegar todas las caras.

4

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que hagan en sus cuadernos el dibujo del desarrollo plano de un cilindro y el dibujo del cilindro que le corresponde y que indiquen todas las medidas.

>>> A lo que llegamos

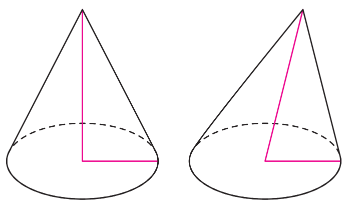
El desarrollo plano del cilindro está formado por dos caras circulares llamadas **bases** y una **cara lateral** que es un rectángulo.



La medida del ancho del rectángulo es $2\pi r$, donde r es el radio de la base; la medida de la altura del rectángulo es la medida de la altura del cilindro.

Propósito de la sesión. Construir e identificar desarrollos planos de conos rectos.

En las secuencias 27, 28 y 29 se trabaja con conos rectos, en los que si se traza una recta del vértice al centro de la base, la recta es perpendicular a la base. También hay conos oblicuos, en los que si se traza una recta del vértice al centro de la base, la recta no es perpendicular a la base.



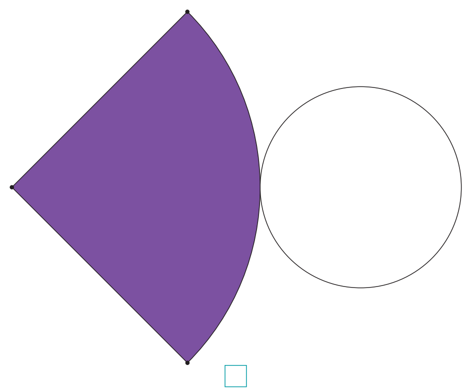
Materiales. Instrumentos geométricos, cartulina o cualquier papel grueso, tijeras y pegamento.

SESIÓN 3

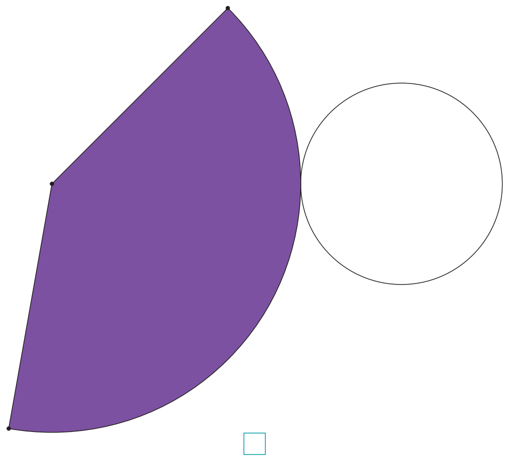
CONOS RECTOS

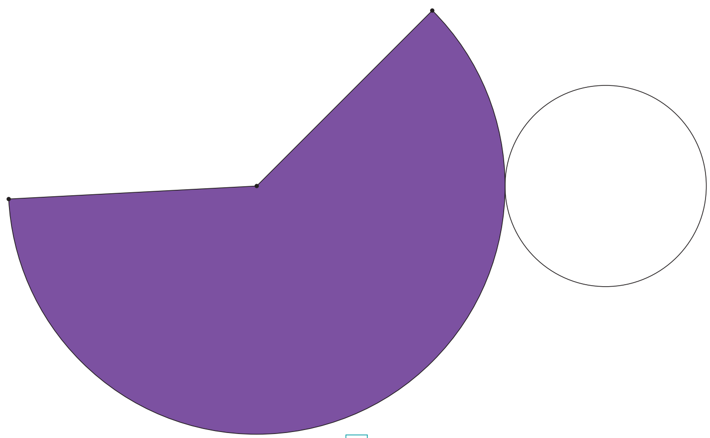
>>> Consideremos lo siguiente

Anoten ✓ a los desarrollos planos con los que se puede construir un cono recto sin que se desperdicie papel.



Posibles dificultades. La dificultad principal es que puedan determinar que el desarrollo plano de la cara lateral del cono es un sector circular y que la medida del arco del sector circular es la misma que la medida del perímetro del círculo que sirve como base. Si nota que algunos alumnos no pueden decidir si es posible o no armar un cono, invítelos a que calquen los moldes y traten de validar las hipótesis que hayan hecho. El único caso en el que es posible armar un cono es el del segundo desarrollo, en el primero el cono no alcanza a cerrar y en el tercero se desperdicia papel porque el sector circular es más grande de lo que se necesita.

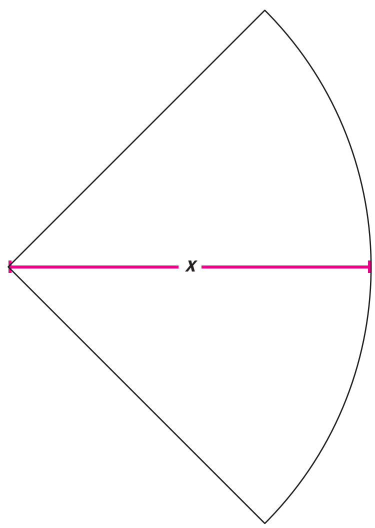


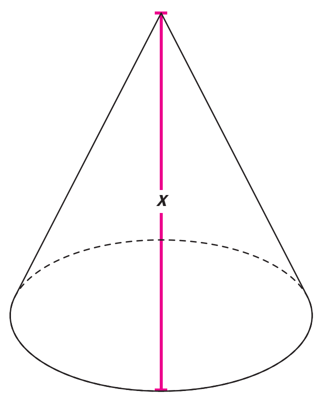


Comparen la manera en que llegaron a sus resultados. Si en alguno tienen duda pueden calcar el desarrollo y tratar de armar el cono.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos por qué el desarrollo plano de la cara lateral del cono es un sector circular y no es otra figura, por ejemplo un triángulo isósceles. Los alumnos tienen que identificar que la distancia del vértice del cono a cualquier punto del perímetro de la base debe ser la misma, en el desarrollo plano esta medida corresponde a la distancia del centro a cualquier punto del arco.

1 3





Propósito de la actividad. Que los alumnos determinen las medidas de la base del cono si se conoce el sector circular que forma la cara lateral del cono.

La longitud del perímetro de la circunferencia de la base es igual que la longitud del arco del sector circular.

En este proceso intervienen aspectos de proporcionalidad: El sector circular tiene un ángulo de cierta medida que corresponde a una parte de la circunferencia a la que pertenece. Por ejemplo, en este caso, el sector es de 120°, que es la tercera parte de los 360° que forman toda la circunferencia; así que la medida del arco del sector circular también es la tercera parte de la medida de toda la circunferencia. Si el ángulo fuera la quinta parte de 360°, entonces el arco sería la quinta parte de toda la circunferencia. Esta relación de proporcionalidad es la que se trabaja en esta actividad.

Respuestas.

a) $6\pi = 18.84$ cm.

b) Una tercera parte.

c) $2\pi = 6.28$ cm.

d) El perímetro de la base debe medir lo mismo que el arco del sector circular, es decir 6.28 cm.

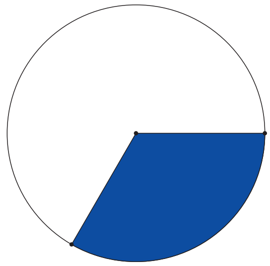
e) El diámetro de la base se calcula como en la sesión pasada:

$$\textbf{diámetro} = \frac{\textbf{perímetro}}{\pi}$$

Entonces el diámetro mide 2 cm y el radio de la base mide 1 cm.

>>> Manos a la obra

I. Consideren la siguiente circunferencia de 3 cm de radio y el sector circular azul que abarca un ángulo central de 120°.



a) ¿Cuánto mide la circunferencia? ___________

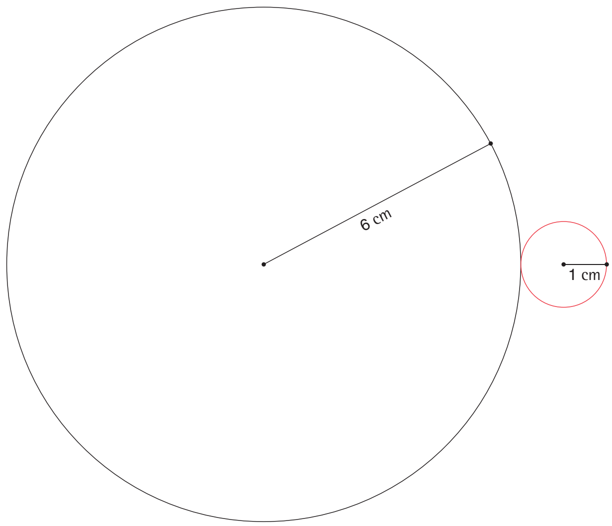
b) ¿Qué parte de la circunferencia completa es el arco del sector circular? ___________

c) ¿Cuánto mide la longitud del arco del sector circular? ___________

d) Si el sector circular es la cara lateral de un cono, ¿cuánto debe medir el perímetro de la base del cono? ___________

e) ¿Cuánto debe medir el radio de la base del cono? ___________

II. El círculo rojo es la base de un cono y su radio mide 1 cm.



Propósito de la actividad. El problema presentado en esta actividad es el inverso del anterior: ahora se conoce la medida del radio de la base y se espera que los alumnos puedan trazar el sector circular que forma la cara lateral del cono. Este problema no es sencillo, nuevamente intervienen aspectos de proporcionalidad y esto puede representar una dificultad para los estudiantes.

Posibles procedimientos. Se debe determinar el perímetro de la base y el perímetro de la circunferencia mayor (de la que saldrá el sector circular que forma la cara lateral), ambos con la fórmula $\mathbf{P} = \pi \times \mathbf{d}$, para lo cual tendrán que usar el diámetro correspondiente en cada caso. Con esas dos medidas se encuentra la razón entre ambas: qué parte de la circunferencia grande es la circunferencia pequeña y de ahí, se calcula con la misma razón el ángulo del sector. Por ejemplo, si la circunferencia pequeña es un cuarto de la grande, entonces el ángulo será $\frac{1}{4}$ de 360°, si es $\frac{1}{5}$ el ángulo será $\frac{1}{5}$ de 360°, etcétera.

Sugerencia didáctica. Indique a los alumnos que, antes de trazar el sector circular contesten las preguntas que están a continuación, ya que les ayudarán a determinar el ángulo del sector.

En la circunferencia grande van a terminar de trazar el sector circular que será la cara lateral del cono; para determinar el ángulo de ese sector circular contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el perímetro de la base del cono? ____________

b) ¿Cuánto debe medir el arco del sector circular que será la cara lateral del cono? ____________

c) ¿Cuánto mide el perímetro de la circunferencia grande? ____________

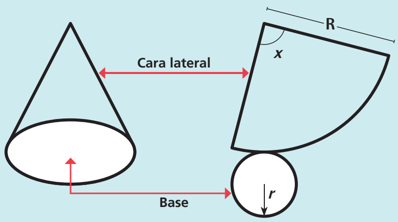
d) ¿Qué parte del perímetro de la circunferencia grande es la medida del arco del sector circular? ____________

e) ¿Cuánto debe medir el ángulo del sector circular? ____________

Tracen el sector circular.

>>> A lo que llegamos

El desarrollo plano del cono está formado por una cara circular llamada **base** y una **cara lateral** curva que es un sector circular.

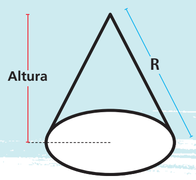


Si consideramos **R** al radio del sector circular que forma la cara lateral del cono y r al radio de la base del cono, para calcular el ángulo del sector circular (x) se establece la siguiente proporción:

$2\pi R$ corresponde a $360°$
$2\pi r$ corresponde a $x°$ o bien $\frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{360°}{x°}$

De donde se tiene que:

$$x = \frac{2\pi r \times 360°}{2\pi R}$$



Es importante que observes que la altura del cono es diferente de la medida R.

Respuestas.

a) Mide $2\pi = 6.28$ cm.

b) El arco debe medir lo mismo que el perímetro de la base, es decir 6.28 cm.

c) Mide $8\pi = 25.1$ cm (el radio de la circunferencia grande mide 4 cm)

d) Es la cuarta parte.

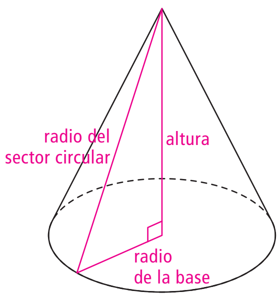
e) 90°.

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos que le entreguen una copia del dibujo de su desarrollo plano. Es importante que indiquen las medidas. Si tienen dificultades revise con ellos el apartado *A lo que llegamos* de esta sesión.

Sugerencia didáctica. En clase deben encontrar la medida del ángulo y del radio del sector circular Puede pedirles que armen el cono en casa, Indíqueles que agreguen las pestañas para que puedan pegar las caras.

El cono lo ocuparán en la siguiente secuencia para determinar la fórmula para calcular su volumen.

Respuesta. La pista que se da es para que los alumnos noten que pueden calcular el radio del sector circular si consideran que, al armar el cono, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura del cono y el radio de la base.



El radio del sector circular es la hipotenusa del triángulo rectángulo, los catetos miden 5 y 12 cm, por lo que el radio del sector circular mide 13 cm, ya que $13^2 = 12^2 + 5^2$

Para calcular el ángulo del sector circular, se debe calcular el perímetro de la circunferencia grande, que es de 26π. El perímetro de la base es de 10π.

Entonces el ángulo del sector circular es:

$$\frac{(10\pi)(360°)}{26\pi} = 138.46°.$$

Se puede redondear este valor a 138.5°.

4

Propósito del programa 51. Mostrar los diversos usos de los cilindros y los conos y repasar el trazo de los desarrollos planos de estos cuerpos.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Regresen al problema del apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen que el desarrollo plano que eligieron tiene las medidas correctas para **R**, ***r*** y para ***x***.

>>> Lo que aprendimos

Construyan un cono que mida 12 cm de altura y 5 cm de radio en la base. Guarden su cono porque lo utilizarán en la siguiente secuencia.

Pista:
Para calcular el radio del sector circular pueden usar el teorema de Pitágoras.

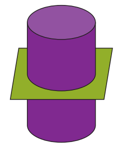
Una gran variedad de empaques y objetos tienen formas de cilindros o de conos. Puedes ver el programa *Cilindros y conos* para conocer algunos ejemplos.

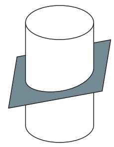
SESIÓN 4

SECCIONES DE CORTE

>>> Manos a la obra

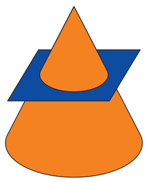
I. Cuando cortan un cilindro con un plano paralelo a la base, en la sección de corte se forma un círculo.

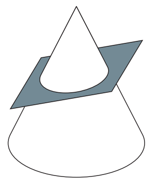


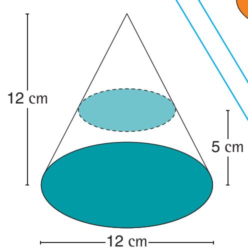


Imaginen que con una tarjeta se corta un cilindro de plastilina como se indica en la figura de la izquierda. Dibujen en su cuaderno cómo se imaginan la figura geométrica que queda en la sección de corte.

II. Dibujen en su cuaderno la figura que se formará en la sección de corte de cada cono.







III. La figura de la izquierda ilustra un cono al que se le hizo un corte formando, en la sección de corte, un círculo. ¿Cuál es el radio de ese círculo? ____________

Pista:
Pueden utilizar semejanza de triángulos.

184

Propósito de la sesión. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Determinar la variación que se da en el radio de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto o en una esfera.

Materiales. Instrumentos geométricos, plastilina, tijeras y pegamento.

Propósito del Interactivo. Explorar las diferentes secciones cónicas que se obtienen al realizar cortes a cilindros y conos.

Sugerencia didáctica. Si es posible, después de que hayan respondido, construya un cilindro y un cono con plastilina y pida a dos alumnos que pasen a hacer los cortes.

Respuestas I y II. Al hacer el corte en el cilindro se obtiene un óvalo. En el cono se obtiene un círculo con el plano paralelo a la base y un óvalo con el plano no paralelo.

Posibles procedimientos. Se forman dos conos, las medidas de uno son proporcionales con respecto a las medidas del otro. El cono mayor tiene una altura de 12 cm y el radio de su base es de 6 cm. El cono menor tiene una altura de 7 cm, por lo que su base tiene un radio de 3.5 cm.

También pueden trazarse los triángulos rectángulos determinados por la altura de cada cono y un radio en cada base. Estos triángulos son semejantes.

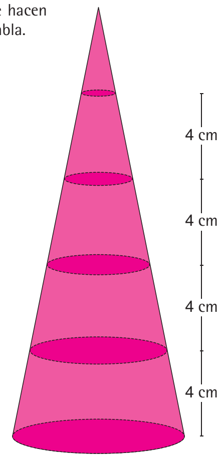
IV. Consideren una esfera de plastilina a la que se le harán diversos cortes.

a) ¿Es posible formar un óvalo al hacer un corte a la esfera? __________

b) ¿Dónde hay que cortar para obtener el círculo de radio máximo? __________

V. Consideren que el cono tiene una base con radio 8 cm y altura 20 cm y se hacen cortes paralelos a la base donde indican las líneas punteadas. Completen la tabla.

Círculo	Columna A Distancia del vértice superior a la sección de corte	Columna B Radio del círculo de la sección de corte	Columna C Área del círculo de la sección de corte
1	4 cm	1.6 cm	2.56 π cm^2
2	8 cm	3.2 cm	10.24 π cm^2
3	12 cm	4.8 cm	23.04 π cm^2
4	16 cm	6.4 cm	40.96 π cm^2



a) ¿Son proporcionales las cantidades de la columna A con respecto a las cantidades de la columna B? _____ . Justifiquen su respuesta _______

____

b) ¿Son proporcionales las cantidades de la columna B con respecto a las cantidades de la columna C? _____ . Justifiquen su respuesta _______

____

VI. Llenen un cono poco a poco de agua. Colóquenlo de tal manera que la base esté paralela al piso.

a) ¿Qué forma se genera en la superficie superior del agua?

____

b) Tracen en su cuaderno la gráfica que representa la relación del nivel del agua con el radio del círculo correspondiente a cada corte.

Comparen sus respuestas y argumentos con sus compañeros de grupo.

>>> Para saber más

Sobre conos y cilindros, consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Peña, José Antonio de la. "Los geómetras griegos" en *Geometría y el mundo.* México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2004.

Respuesta. No es posible, con cualquier corte se obtiene un círculo. Para obtener el radio máximo el plano que corta debe pasar por el centro de la esfera.

Posibles procedimientos. Para completar la tabla deben hacer un análisis parecido al que hicieron en la actividad III: los alumnos pueden observar que se forman conos cuyas medidas son proporcionales o tomar los triángulos rectángulos que se forman con las alturas y un radio de la base.

Posibles respuestas. Si se considera π = 3.14, en la Columna C se obtiene:

8.0384 cm^2, 32.1536 cm^2, 72.3456c cm^2 y 128.6144 cm^2, respectivamente.

Respuestas.

a) Las cantidades sí son proporcionales.

b) No son proporcionales.

Sugerencia didáctica. Para encontrar la relación entre el nivel del agua y el radio de los círculos, puede sugerir a los alumnos que se fijen en cómo llenaron la tabla en la actividad anterior.

Respuestas.

a) Se forma un círculo.

b) La gráfica corresponde a una relación de proporcionalidad.

Propósito de la sesión. Construir la fórmula para calcular el volumen del cilindro.

En esta sesión los alumnos van a identificar un cilindro como un prisma con base circular y, por lo tanto, se utiliza la fórmula

Volumen = área de la base por altura,

para calcular su volumen.

Sugerencia didáctica. Si lo considera conveniente puede invitar a los alumnos a que revisen la secuencia 14 de **Matemáticas II**, volumen I, en la que trabajaron las fórmulas para calcular volúmenes de prismas y pirámides.

En la secuencia se utiliza 3.14 como aproximación al valor de π. Si tienen calculadora les puede pedir que utilicen el valor de 3.14159 o el valor que venga en la calculadora.

Propósito de la actividad. Que los alumnos recuerden la fórmula para calcular el volumen de un prisma.

Posibles dificultades. Es la primera vez que los alumnos se enfrentan a un problema en el que tienen que calcular la capacidad de un cilindro. Aunque es probable que algunos sí relacionen el cilindro con los prismas y calculen el área de la base para multiplicarla por la altura, habrá otros alumnos que no lo hagan. En cualquier caso no les anticipe la fórmula o algún procedimiento, permita que lo intenten con sus propios medios. Si tienen dificultades para expresar el volumen en litros puede preguntarles cuántos decímetros hay en 0.4 m (hay 4) y cuántos hay en 1 m (hay 10). Entonces la base del cilindro es una circunferencia de radio 4 dm y la altura del cilindro es de 10 dm.

Posibles procedimientos. Los alumnos pueden estimar cuántos cubos de un decímetro (10 cm) caben aproximadamente en el tinaco (como cuando cuadriculan para calcular el área de figuras con lados curvos). Una posibilidad es que calculen el volumen de un cubo en el que los lados midan 1 m y el volumen de un cubo en el que midan 0.8 m. El volumen del cilindro es menor que la de la primera figura y mayor que la de la segunda.

Respuesta. El volumen es de 160π litros, (502.4 litros si se toma $\pi = 3.14$).

1

SECUENCIA 28

Volumen del cono y del cilindro

En esta secuencia aprenderás la fórmula para calcular el volumen del cono y del cilindro.

SESIÓN 1

TINACOS DE AGUA

>>> Para empezar

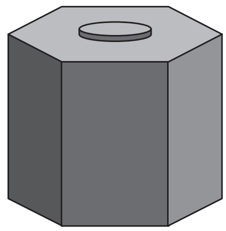
En primer grado aprendiste que para calcular el volumen de un prisma se multiplica el área de la base por la altura. Considera que la figura de la derecha es un tinaco de agua, ¿cómo calcularías la cantidad de agua que le cabe?

____

____

____

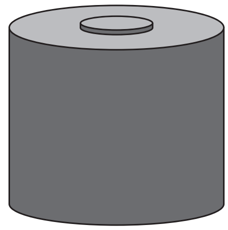
____



>>> Consideremos lo siguiente

¿Cuántos litros de agua puede almacenar un tinaco en forma de cilindro cuya base tiene un radio 0.40 m y su altura mide 1 m? ________

Recuerden que: Un decímetro cúbico equivale a un litro.

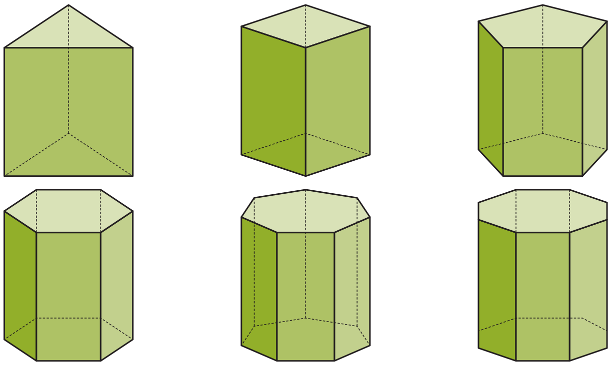


Comenten con sus compañeros la manera en que calcularon la capacidad del tinaco en forma de cilindro.

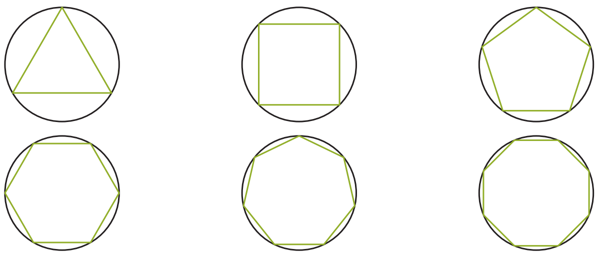
186

>>> Manos a la obra

I. Considera los siguientes prismas:



a) Si se continúa aumentando el número de lados de la base, ¿a qué figura geométrica tiende a parecerse la base? ______________________



b) Si se continúa aumentando el número de lados de la base, ¿a qué cuerpo geométrico tiende a parecerse un prisma? ______________________

c) El volumen de un cilindro puede calcularse con la fórmula para calcular el volumen de un prisma, considerando que la base es un círculo. ¿Cuál de las siguientes fórmulas sirve para calcular el volumen del cilindro de radio r y de altura h?

$V = \pi \times d \times h$ $\quad\quad$ $V = \pi \times r \times h$ $\quad\quad$ $V = \pi \times r^2 \times h$

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo.

187

Propósito de la actividad. Identificar un cilindro como un prisma de base circular.

Propósito del Interactivo. Que los alumnos lleguen a conocer y entender la fórmula para calcular el volumen de cilindros.

Respuestas.

a) A un círculo.

b) A un cilindro.

c) La tercera fórmula, se multiplica el área de la base (el área del círculo se calcula con $\pi \times r^2$) por la altura.

Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos que en la sesión pasada vieron que pueden generar un cilindro al trasladar un círculo hacia arriba o hacia abajo. Los prismas también se pueden generar al trasladar hacia arriba o hacia abajo su base. Pregúnteles cuál es la relación de esto con la fórmula para calcular el volumen de estos cuerpos geométricos (se está trasladando la base una distancia igual a la altura).

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Formas geométricas.
Subtema
Cuerpos geométricos.
Antecedentes
En la secuencia 14 de **Matemáticas II** los alumnos encontraron las fórmulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides y establecieron la relación entre la fórmula para calcular el volumen de un prisma y el de una pirámide. En la secuencia anterior identificaron y construyeron los desarrollos planos de cilindros y conos. En esta secuencia van a determinar que un cilindro es un prisma de base circular y que un cono es una pirámide de base circular.

Propósito de la secuencia
Construir las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Tinacos de agua** Construir la fórmula para calcular el volumen del cilindro.	Interactivo
2	**Conos de papel** Construir la fórmula para calcular el volumen del cono.	Programa 52 Interactivo

>>> A lo que llegamos

Para calcular el volumen de un cilindro, al igual que el de un prisma, se multiplica el área de su base por su altura. Dado que la base de un cilindro siempre es un círculo, el volumen se calcula multiplicando el valor de π por el radio al cuadrado y por la altura.

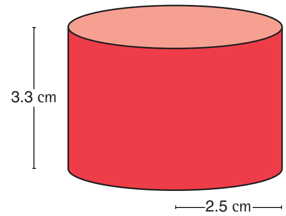
Regresen al problema del apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen que calcularon correctamente la capacidad el tinaco.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad. Si tienen dificultades revise con ellos el apartado *A lo que llegamos* de esta sesión.

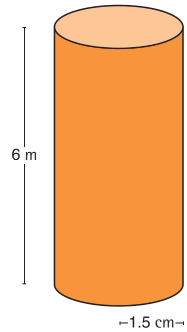
Respuestas. Los volúmenes son
cilindro rojo: 20.625π cm^3 = 64.7625 cm^3.
cilindro amarillo: 32π cm^3 = 100.48 cm^3.
cilindro naranja: 13.5π cm^3 = 42.39 cm^3.

>>> Lo que aprendimos

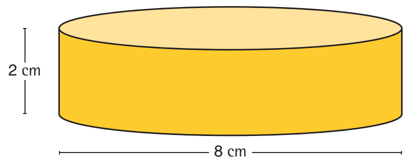
Calcula el volumen de los siguientes cilindros.



Volumen ____________



Volumen ____________



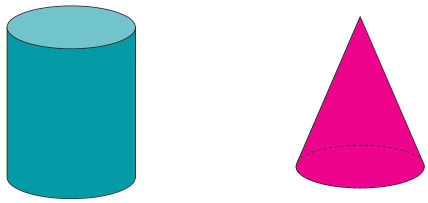
Volumen ____________

CONOS DE PAPEL

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Considera un cilindro y un cono que tienen exactamente la misma medida de la base y la altura.



¿Cuál tiene mayor volumen? ____________

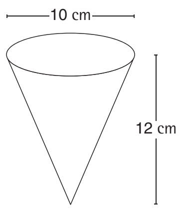
¿Cuántas veces más volumen crees que tenga? ____________

>>> Consideremos lo siguiente

¿Qué cantidad de agua consideran que le cabe a un cono de papel con las medidas indicadas? ____________

Pista:

Recuerden la relación entre el volumen del prisma y de la pirámide.



Recuerden que:

*Un decímetro cúbico **(dm³)** equivale a un litro **(l)**.*

Comparen sus procedimientos y resultados con los de otros equipos.

Propósito de la sesión. Construir la fórmula para calcular el volumen del cono.

Los alumnos van a explorar dos formas para obtener la fórmula:

1. Van a comprobar empíricamente que el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro cuyas dimensiones (radio de la base y altura) son iguales.
2. Van a identificar que un cono puede considerarse como una pirámide circular, por lo que para calcular el volumen del cono se emplea la misma fórmula que para calcular el volumen de una pirámide.

Materiales. Instrumentos geométricos. El cilindro y el cono que construyeron en la sesión pasada. Arroz o semillas pequeñas.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos observen que el volumen de un cilindro es mayor que el volumen de un cono con las mismas dimensiones; no se espera que contesten exactamente la segunda pregunta, puede ser sólo una estimación, aunque es probable que algunos recuerden la relación entre los volúmenes de prismas y pirámides y hagan la analogía para los volúmenes de cilindros y conos y determinen que el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban en su cuaderno a cuántos litros equivale un metro cúbico (son 1 000 litros) y a cuántos mililitros equivale un centímetro cúbico (a uno). Estas conversiones les serán útiles para las actividades de esta secuencia y de la siguiente.

Posibles procedimientos. Es posible que algunos alumnos utilicen la fórmula para la pirámide (área de la base por la altura entre tres). También podrían calcular la capacidad de un cilindro de la misma altura y el mismo radio en la base y, a partir de ese resultado, encuentren la capacidad del cono utilizando lo que respondieron en el apartado *Para empezar.*

Los alumnos deben convertir los centímetros cúbicos a litros. Para ello pueden:

- Considerar que cada centímetro cúbico es un mililitro.
- Expresar las medidas del cono en decímetros , 1.2 dm de diámetro y 1 dm de altura, para obtener directamente el dato en litros.

Respuesta. El volúmen es de 100π cm³. Le caben 314 mililitros de agua aproximadamente (si se toma $\pi = 3.14$).

Propósito del Interactivo. Que los alumnos lleguen a conocer y entender la fórmula para calcular el volumen de conos.

Propósito de la actividad. Que los alumnos establezcan, de manera empírica, que el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

Posibles dificultades. Si observa que no llenan el cilindro al vaciar tres veces el contenido del cono, coménteles que probablemente hubo alguna imprecisión al llenar el cono o al vaciar las semillas (algunas se pudieron haber caído), o tal vez los cuerpos no tienen exactamente la misma base y la misma altura.

2

>>> Manos a la obra

I. Utilicen el cilindro y el cono que construyeron en la secuencia 27 de **Matemáticas III**, volumen II, quiten una de las bases del cilindro y la base del cono y hagan lo siguiente:

Paso 1. Llenen el cono de arroz o de semillas pequeñas.

Paso 2. Vacíen el contenido en el cilindro

Paso 3. Repitan lo anterior hasta que se llene el cilindro.

a) ¿Cuántas veces es mayor el volumen del cilindro que el del cono? __________

b) Si conocen el radio de la base del cono y su altura, ¿cómo calculan su volumen?

____

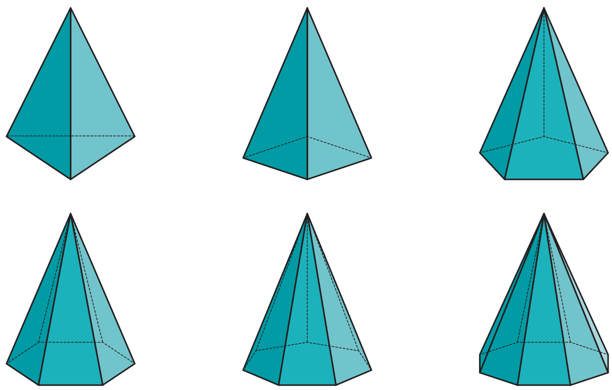
____

____

____

Propósito de la actividad. Identificar a los conos como una pirámide de base circular y que, por lo tanto la fórmula para calcular el volumen de una pirámide sirve para el volumen del cono.

II. Consideren las siguientes pirámides:



190

a) Si se continúa aumentando el número de lados de la base, ¿a qué figura geométrica tiende a parecerse la base? ______________________

b) El volumen de un cono puede calcularse con la fórmula para calcular el volumen de una pirámide, considerando que la base es un círculo. ¿Cuál de las siguientes fórmulas sirve para calcular el volumen del cono?

$V = 3\pi \times r^2 \times h$ $\quad V = \frac{1}{3}\pi \times r \times h$ $\quad V = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h$

c) Verifiquen que coincide con su respuesta al inciso b) de la actividad I.

>>> A lo que llegamos

Volumen de conos y cilindros

El volumen de un cono, al igual que el de una pirámide, es la tercera parte del área de su base por su altura. Dado que la base de un cono siempre es un círculo, el volumen se calcula multiplicando el valor de π por el radio al cuadrado y por la altura, y el resultado se divide entre tres.

Regresen al problema del apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen que calcularon correctamente el volumen del cono.

>>> Lo que aprendimos

1. Calcula el volumen de un cono que mide 2 m de altura y $\frac{3}{4}$ m de radio.

2. Anota las medidas de un cono que tenga el mismo volumen que un cilindro cuyo radio mide 4 y altura 9 cm.

>>> Para saber más

Sobre el volumen de conos y pirámides, consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula: Hernández Garcíadiego, Carlos. "Volumen del cilindro", "Volumen de conos y pirámides" en *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

191

Respuestas.

a) A un círculo.

b) La tercera fórmula.

Propósito del programa 52. Construir las fórmulas para calcular el volumen del cono y del cilindro.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Respuesta. El volumen es de 0.375π m^3 = 1.177 m^3 = 1177 litros.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad. Si tienen dificultades revise con ellos el apartado *A lo que llegamos* de esta sesión.

Posibles Respuestas. Si los alumnos han comprendido la relación entre el volumen de un cilindro y un cono podrán responder a esta pregunta sin necesidad de hacer muchas operaciones. Es un problema que tiene varias soluciones correctas. Una manera es multiplicando por tres la medida de las base o la de la altura, por ejemplo, puede ser un cono que mida 4 cm de radio de la base y 27 cm de altura o también 12 cm de radio de la base y 9 cm de altura, aunque también podrían cometer el error de pensar que tanto el radio como la altura deben aumentar tres veces y proponer un cono de radio de 12 cm y altura de 27 cm.

Propósito de la sesión. Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos. Calcular datos faltantes dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos desarrollen su capacidad para estimar resultados, es decir que den aproximaciones sin utilizar la calculadora

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que en este momento deben buscar la manera de simplificar las operaciones para encontrar resultados aproximados sin utilizar la calculadora. Por ejemplo, pueden considerar el valor de π como 3.1 o como 3, también pueden redondear los resultados intermedios, o cambiarlos por múltiplos de 10 o de 100 que estén cercanos, para que puedan hacer las operaciones. Observe los procedimientos para estimar los resultados y recupere algunos para que los expliquen a todo el grupo.

Los resultados que se indican son los resultados exactos, se tomó el valor $\pi = 3.1416$.

Propósito del programa 53. Mostrar ejemplos en donde se relaciona el cálculo de volumen y la capacidad de recipientes en forma cónica o cilíndrica

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito del Interactivo. Resolver problemas que impliquen estimar y calcular volúmenes de cilindros y conos.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que recuerden la equivalencia que obtuvieron en la sesión pasada entre centímetros cúbicos y mililitros (un mililitro equivale a un centímetro cúbico).

Respuesta. Tiene 90π cm^3. Son 282.74 mililitros.

SECUENCIA 29

Estimar volúmenes

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen estimar y calcular volúmenes de cilindros y conos.

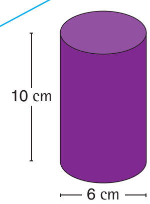
SESIÓN 1

PROBLEMAS PRÁCTICOS

>>> Lo que aprendimos

Estimar volúmenes

I. Primero, estimen el resultado aproximado de los siguientes problemas.

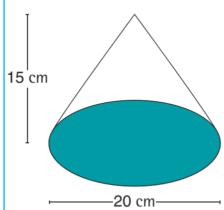


a) ¿Cuál es la capacidad en mililitros de una lata de jugo con las medidas indicadas a la izquierda? ____________

b) Anoten la medida del radio y la altura de un envase cilíndrico con capacidad para un litro. ____________

c) Don Fernando necesita un tinaco cilíndrico para almacenar 2 000 litros de agua; el señor de la tienda le ofrece uno que mide 1 m de diámetro, ¿cuál es la altura mínima del tinaco para que almacene lo que requiere don Fernando? ____________

d) Carlos cortó un triángulo rectángulo que mide 10 cm de hipotenusa y su cateto menor mide 6 cm. Si lo hace girar uno de sus catetos se genera un cono. ¿Cuál cono tiene mayor volumen: el que se genera cuando se gira sobre su cateto mayor o el que se genera cuando se gira sobre su cateto menor? ____________



e) ¿Cuánto tendría que medir la altura de un cono con una base de 5 cm de radio para tener el mismo volumen que el de la izquierda? ____________

f) Un chapoteadero (alberca para niños pequeños), en forma de cilindro, tiene una base de 2 m de radio y quiere llenarse hasta que el agua alcance $\frac{1}{2}$ m de altura. Si el agua se suministra con tres mangueras que arrojan 5 *l* de agua por minuto cada una, ¿en cuánto tiempo el agua alcanzará la altura deseada? ____________

192

Sugerencia didáctica. Este problema tiene muchas respuestas correctas, durante la puesta en común pida a los alumnos que comenten lo práctico o útil que pueden resultar ciertos envases en comparación de otros.

Posibles procedimientos. La manera más directa de resolver este problema es aplicando la fórmula: sustituir el volumen y el radio y despejar la altura. La principal dificultad está en las conversiones que tienen que hacerse. Puede ser que se pase todo a decímetros cúbicos y entonces el volumen tendrá que sustituirse por 2000 dm^3 y el radio por 5 dm, pero también puede ser que se utilicen metros cúbicos, por lo que el volumen tendrá que expresarse como 2 m^3 y el radio como 0.5 m.

Respuesta. La altura mínima es de 25.46 dm (o también 2.546 m).

Sugerencia didáctica. Para calcular la medida del cateto mayor hay que usar el teorema de Pitágoras. Si los alumnos tienen dificultades invítelos a que tracen el triángulo y lo giren cómo se indica.

Respuesta. El cateto mayor mide 8 cm. Si se gira sobre el cateto mayor, el cono tiene un radio de 6 cm y una altura de 8 cm. Su volumen es de 301.59 cm^3. Si se gira sobre su cateto menor, el cono tiene un radio de 8 cm y una altura de 6 cm. Su volumen es de 402.12 cm^3.

Posibles procedimientos. Una manera de resolver el problema es calculando el volumen del cono dibujado (500π cm^3), sustituir este valor y la medida del radio en la fórmula y, despejar la altura, se obtiene un valor de $h = 60$cm.

Otra manera es analizar que, si el radio se reduce a la mitad (de 10 a 5), al elevarlo al cuadrado (en la fórmula aparece r^2) el resultado se reduce cuatro veces (de 100 a 25) por lo que, para tener el mismo volumen, la altura tendrá que multiplicarse por cuatro: $15 \times 4 = 60$. Comente este procedimiento con todo el grupo.

Respuesta. El agua va a ocupar un volumen de 2π m^3 = 6.283 m^3. Es decir 6 283 litros. Se llenará en 418.86 minutos (casi 7 horas).

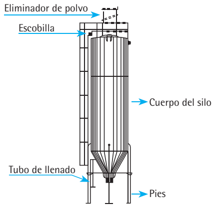
g) ¿Cuál es la altura de un cono al que le caben 250 ml de agua si el radio de su base mide 3 cm? 26.52 cm.

h) ¿Cuál es el radio de un vaso en forma de cilindro al que le caben 400 ml de agua si su altura es de 12 cm? 3.25 cm.

i) Consideren la siguiente información:

Los silos de cemento son elementos verticales, formados por un cilindro y un cono. Los silos se caracterizan, generalmente, por el tonelaje almacenado, su volumen varía entre los 15 y 50 m³ y su diámetro varía de 2.40 a 2.80 m.

Vean una foto y un dibujo de un silo de cemento:



Si se desea que el silo tenga un volumen de 25 m^3 y un diámetro de 2.5 m para el cilindro y el cono, ¿cuáles pueden ser las posibles alturas del cono y del cilindro?

__________ y __________

Comparen sus estimaciones con las de otras parejas. Aún no es necesario que hagan cálculos para saber qué estimaciones son mejores.

II. Haciendo operaciones escritas o con la calculadora, encuentren el resultado de los problemas anteriores. Anótenlo al lado de sus estimaciones. Para el caso del problema d) comprueben su respuesta calculando el volumen de ambos conos.

Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros. Si alguna pareja hizo una estimación muy buena pídanle que compartan su estrategia.

Para conocer más acerca de cómo se aplican las fórmulas del volumen del cilindro y del cono, pueden ver el programa *Problemas prácticos*.

>>> Para saber más

Sobre volumen y capacidad, consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Peña, José Antonio de la. "¿Cuánta agua le cabe a un tinaco?" en *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2004.

Posibles respuestas. El área de la base del cilindro y del cono es la misma, aproximadamente 4.9 m^2. Los alumnos tienen que decidir la altura del cono y del cilindro. Una manera de hacerlo es dar un valor para la altura del cono, por ejemplo 2 m, calcular el volumen de ese cono y restarlo de 25 m^3, esa diferencia es el volumen del cilindro y de ahí se calcula al altura del cilindro. La siguiente tabla muestra algunos resultados siguiendo este procedimiento. En esta tabla se tomó el valor $\pi = 3.1416$.

área base	altura cono	volumen cono	volumen cilindro	altura cilindro
4.90875	1	1.63625	23.36375	4.75961294
4.90875	2	3.2725	21.7275	4.4262796
4.90875	3	4.90875	20.09125	4.09294627
4.90875	4	6.545	18.455	3.75961294
4.90875	5	8.18125	16.81875	3.4262796
4.90875	6	9.8175	15.1825	3.09294627
4.90875	7	11.45375	13.54625	2.75961294
4.90875	8	13.09	11.91	2.4262796
4.90875	9	14.72625	10.27375	2.09294627
4.90875	10	16.3625	8.6375	1.75961294
4.90875	11	17.99875	7.00125	1.4262796
4.90875	12	19.635	5.365	1.09294627
4.90875	13	21.27125	3.72875	0.75961294
4.90875	14	22.9075	2.0925	0.4262796
4.90875	15	24.54375	0.45625	0.09294627
4.90875	16	26.18	–1.18	–0.24038706
4.90875	17	27.81625	–2.81625	–0.5737204

Sugerencia didáctica. No todos los valores en la tabla son factibles para este problema (hay alturas negativas), otros no son prácticos en la realidad (por ejemplo, cuando la altura del cono es mayor que la del cilindro). De entre los diferentes resultados que surjan comenten cuáles son más adecuados y por qué lo consideran así. Si los alumnos tienen acceso a una hoja de cálculo pueden hacer una tabla similar y explorar ellos mismos con diferentes valores.

4

Propósito del programa 54. Mostrar ejemplos en los que se calcula el volumen del cilindro y del cono usando las fórmulas. Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Eje

Forma, espacio y medida.

Tema

Formas geométricas.

Subtema

Cuerpos geométricos.

Antecedentes

A partir de lo que ya trabajaron en las secuencias 27 y 28, los alumnos aplicarán lo aprendido a diversas situaciones en las que tendrán oportunidad de hacer estimaciones y encontrar datos faltantes a partir de otros conocidos.

Propósito de la secuencia
Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos.
Calcular datos faltantes dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Problemas prácticos** Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos. Calcular datos faltantes dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.	Programa 53 Interactivo Programa 54

SECUENCIA 30

Gráfica cajabrazos

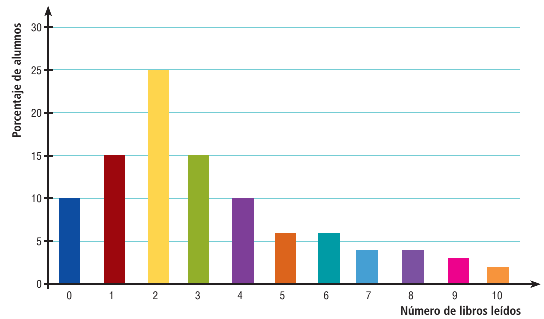
En esta secuencia, aprenderás a interpretar y construir un nuevo tipo de gráfica estadística llamada cajabrazos que se construye a partir de la mediana.

SESIÓN 1

INTERPRETACIÓN DE DATOS

>>> Para empezar

I. La siguiente gráfica muestra los resultados de una encuesta en la que se planteó la siguiente pregunta a alumnos de tercero de secundaria: ¿Cuántos libros completos has leído en los últimos doce meses, sin tomar en cuenta tus libros de texto?



Gráfica 1

¿Cuántos libros completos has leído en los últimos doce meses, sin tomar en cuenta tus libros de texto?

a) De acuerdo con la gráfica, ¿cuántos libros ha leído un mayor porcentaje de alumnos? ________

b) ¿Cuál fue el menor número de libros leídos? ________ . ¿Cuál fue el mayor? ________

c) La gráfica muestra que 10% de los alumnos no leen ningún libro, ¿qué porcentaje de los alumnos leen 2 o menos libros? ________

194

Propósito de la sesión. Organizar datos en más de una forma y hacer comparaciones globales.

Propósito de la actividad. A partir de las preguntas planteadas se pretende ir destacando la importancia del valor de la mediana para la construcción e interpretación de las gráficas de cajabrazo. Esta actividad y la siguiente nos permiten trabajar con los alumnos dos aspectos: identificar el tipo de información que se está utilizando (en estos casos es cuantitativa), y ver cómo se distribuye el conjunto de datos al analizar las medidas de tendencia central.

Respuestas.

a) 2

b) El menor fue 0 y el mayor 10.

c) El 50% de los alumnos manifiesta haber leído 2 o menos libros (hay que sumar los porcentajes de los que leyeron 2 libros, 1 libro y 0 libros).

Eje
Manejo de la información.
Tema
Representación de la información.
Subtema
Medidas de tendencia central y dispersión.
Antecedentes
Los alumnos ya conocen las medidas de tendencia central, y en las gráficas de cajabrazos éstas se integran para abordar la interpretación y la representación de los datos de una forma distinta.

Propósito de la secuencia
Interpretar y elaborar gráficas de cajabrazos para analizar la distribución de uno o dos conjuntos de datos.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Interpretación de datos** Organizar datos en más de una forma y hacer comparaciones globales.	Programa 55
2	**Construcción de la gráfica cajabrazos** Construir gráficas de cajabrazos.	Programa 56 Interactivo
3	**Comparación de datos mediante la gráfica de cajabrazos** Comparar dos o más conjuntos de datos mediante sus gráficas de cajabrazos.	Programa 57

d) ¿Qué porcentaje de alumnos es mayor: el que ha leído 5 o menos libros, o el que ha leído 5 o más? ______

e) En el eje horizontal de la gráfica 1 se muestran, ordenados de menor a mayor, el número de libros leídos por los alumnos encuestados, ¿entre cuáles de esos números se halla el valor de la mediana? ______

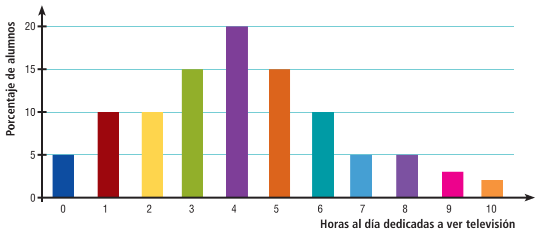
f) Si suman en orden el porcentaje de los alumnos que han leído 0, 1, 2 o más libros completos, ¿en cuál número de libros se alcanza el 75% de los alumnos? ______

Recuerda que:

La mediana es una de las medidas de tendencia central, y se define como el valor que ocupa la posición central cuando los datos se ordenan de menor a mayor. Por lo tanto, la mediana divide los datos ordenados en dos conjuntos de igual número de datos.

Comparen sus respuestas a las preguntas anteriores y contesten las siguiente pregunta: si el número total de alumnos encuestados hubiera sido 200, ¿cuántos alumnos leyeron 2 o menos libros completos? ______

II. Otra de las preguntas que debían contestar los alumnos encuestados era: ¿Cuántas horas de tu tiempo libre inviertes en ver televisión al día? Los resultados a esta pregunta se muestran en la gráfica 2.



Gráfica 2

¿Cuántas horas de tu tiempo libre inviertes en ver televisión al día?

a) ¿Qué porcentaje de los alumnos no ven la televisión? ______

b) ¿Cuál es el número de horas que mayor porcentaje de los alumnos invierten en ver televisión al día? ______ . ¿Qué cantidad de alumnos representa? ______

c) Si ordenas al total de alumnos encuestados en cuatro grupos (cada uno sería el 25%), empezando por los que no ven la televisión hasta los que la ven más tiempo, señala con una ✓ cuántas horas al día ve televisión el primer 25% de los alumnos.

☑ De 0 a 2 horas ☐ De 0 a 4 horas ☐ De 0 a 3 horas ☐ De 0 a 1 horas

Respuestas.

d) Es mayor el porcentaje de alumnos que ha leído 5 o menos libros.

e) Dado que la mediana es el "centro" de los datos, entonces, al sumar los porcentajes de cada barra empezando por cada uno de los extremos, se observa que el 50% de los alumnos lee 2 o menos libros y el otro 50% lee 3 o más libros. Por lo que el valor de la mediana se encuentra entre 2 y 3 libros leídos. Para hallar la mediana puede pensarse en hacer una lista con todos los resultados ordenados de menor a mayor. Si se asume que el total de alumnos es 100, por ejemplo, entonces 10 alumnos leyeron 0 libros, 15 alumnos leyeron 1 libro, etc. La mediana estaría entre el dato 50 y el 51. El dato 50 correspondería a un alumno que leyó 2 libros y el 51 a uno que leyó 3 libros, entonces el valor de la mediana es igual a 2.5 libros, por ser un número par de datos.

f) El 75% se alcanza con los que han leído 0, 1, 2, 3 y 4 libros. El 25% restante corresponde entonces a los alumnos que han leído de 5 a 10 libros.

Sugerencia didáctica. Un aspecto importante tanto en la pregunta planteada aquí (cuántos libros completos has leído) como en la siguiente (cuántas horas de televisión ves al día), es que la respuesta 0 es válida. Una pregunta que se podría plantear a los alumnos es: ¿la respuesta 0 es lo mismo que "no contestaron"?, si creen que sí, pídales que expliquen por qué, si creen que no, dígales que comenten en qué lugar de la gráfica pondrían a ese porcentaje de alumnos que no contestó.

Lo importante es que los estudiantes se den cuenta de que es diferente contestar que ningún libro se ha leído o ninguna hora se ha visto televisión, que no responder a la pregunta. Este tipo de reflexiones son importantes cuando se están leyendo los datos, bien sea a partir de una gráfica o cualquier otra representación.

Respuesta.

Los que leyeron 2 o menos libros son el 50%, así que serían 100 alumnos.

Respuestas.

a) 5%

b) El 20% de los alumnos ve la televisión 4 horas al día. Siguiendo con la idea de que el número de alumnos encuestados fuera 200, serían 40 los que ven la televisión 4 horas al día.

Propósito de las preguntas. A partir de esta pregunta se trabaja en la lectura entre los datos que se muestran en una gráfica. La intención es que los alumnos logren hacer comparaciones globales, en contraste con otras comparaciones más puntuales, por ejemplo, las referidas a las diferencias o similitudes entre un dato y otro.

Respuesta. El 50% de los alumnos.

Sugerencia didáctica. En la situación se pide considerar a los 200 alumnos que contestaron las preguntas. Haga notar que el primer 25% de las respuestas a cada pregunta puede ser distinto.

También puede plantearles lo siguiente: ¿es posible que las respuestas a la primera pregunta constituyan el primer 25% de los datos? Los alumnos deben notar que sí es posible y significaría que el 25% de los alumnos que respondieron no leen ningún libro. Del mismo modo, se puede reflexionar con la segunda pregunta y luego cruzar la información. Por ejemplo, el 25% de los alumnos no lee y el 25% ve televisión 10 horas ¿es posible que sean los mismos alumnos?

Propósito del programa 55. Recordar las medidas de tendencia central analizando diversas situaciones.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

d) Señala con una ✓ cuántas horas al día ve televisión el último 25% de los alumnos.

☐ 9 o más horas ☐ 8 o más horas ☐ 7 o más horas ☑ 6 o más horas

e) Señala con una ✓ cuántas horas al día ve televisión el 75% de los alumnos.

☐ Entre 0 y 6 horas ☐ Entre 0 y 5 horas ☑ Entre 0 y 4 horas ☐ Entre 0 y 7 horas

f) ¿Qué porcentaje de los alumnos ve televisión de 3 a 5 horas al día? __________

Comparen sus respuestas y realicen lo siguiente:

Consideren la información que se muestra en las gráficas de las dos actividades anteriores y, nuevamente, supongan que fueron 200 alumnos encuestados .

Ante la pregunta: ¿Cuántos libros completos has leído en los últimos doce meses, sin tomar en cuenta tus libros de textos?

a) ¿Cuántos alumnos están en el primer 25%? __________

b) ¿Cuál es el número de libros leídos que corresponde al primer 25%? __________

En la pregunta: ¿Cuántas horas de tu tiempo libre inviertes en ver televisión al día?

c) ¿Cuántos alumnos están en el primer 25%? __________

d) ¿Cuál es el número de horas al día dedicadas a ver televisión que corresponde al primer 25%? __________

Para saber más acerca de las distintas maneras en que se pueden interpretar los datos, pueden ver el programa *Interpretación de datos*.

SESIÓN 2

CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA CAJABRAZOS

>>> Para empezar

En las sesión 3 ¿Qué cantidad de agua consumes? de la secuencia 7 **Diseño de estudios y experimentos estadísticos** del libro **Matemáticas III**, volumen I, investigaste qué cantidad de agua consume el grupo diariamente y si es la que requieren de acuerdo con su edad. En esta sesión utilizarás nuevamente los datos que se recolectaron.

>>> Consideremos lo siguiente

Observen la cantidad de agua en mililitros que consumen diariamente los 20 alumnos de un grupo:

1 650, 1 300, 2 400, 2 000, 2 100, 1 700, 1 900, 1 500, 1 900, 1 850, 2 000, 2 150, 2 300, 1 600, 1 900, 2 500, 2 200, 1 650, 2 100, 1 750.

196

Propósito de la sesión. Construir gráficas de cajabrazos.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos con anterioridad esta información para agilizar el trabajo de esta sesión.

Propósitos del Interactivo. Mostrar la construcción de gráficas del tipo cajabrazos.

¿Qué conjunto de datos tiene mayor variedad: el que corresponde a los alumnos que consumen diariamente menos de 2 000 ml de agua o el de los alumnos que consumen diariamente 2 000 ml o más?

Expliquen cómo determinaron su respuesta. ______________________

____

____

Respuesta. Una de las cosas que los alumnos deben decidir es en qué grupo pondrán a los que consumen 2 000 ml. Luego, analizar los dos grupos de datos para ver en cuál de ellos hay más datos distintos. Por ejemplo, si uno de los grupos de datos fuera 2, 4, 4, 5, 3, 1 tendría una mayor variedad que el grupo 6, 7, 7, 7, 6, 9.

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas.

a) De acuerdo con los datos registrados en ese grupo, ¿cuál es la menor cantidad de agua que se consume diariamente? __________ . ¿Y cuál es la mayor? __________

b) ¿Cuál es la diferencia que hay entre la mayor y la menor cantidad de agua registrada? __________

c) Ordenen de menor a mayor las cantidades de agua en ml que consume diariamente ese grupo de alumnos. Anótenlas en las siguientes celdas.

1 300	1 500	1 600	1 650	1 650	1 700	1 750	1 850	1 900	1 900	1 900	2 000	2 000	2 100	2 100	2 150	2 200	2 300	2 400	2 500

d) Tracen una línea vertical de color rojo que divida los datos en dos partes iguales. ¿Cuál es el valor de la mediana de las cantidades de agua (en ml) que consumen diariamente ese grupo de alumnos? __________

e) ¿Qué porcentaje del total de cantidades de agua en ml que se registraron representa las cantidades de agua que son menores al valor de la mediana? __________ ¿Y qué porcentaje representa las que están por arriba de la mediana?

____

f) Ahora, tracen otras dos líneas verticales de color verde, de modo que una divida la primera mitad de datos en dos partes iguales y la otra haga lo mismo con la segunda mitad de datos. ¿Qué porcentaje de cantidades representa cada una de esas cuatro partes? __________

g) ¿Cuál es el valor de la media de las cantidades de agua que consumen diariamente esos 20 alumnos? __________

Recuerden que:

Cuando el número de datos de un conjunto es impar, la mediana será exactamente el valor central del conjunto.

Si el número de datos de un conjunto es par, la mediana será exactamente el valor que se encuentra a la mitad de los dos datos centrales del conjunto.

Por ejemplo, encontrar la mediana del conjunto de datos:

2, 9, 11, 5, 6, 27.

El conjunto tiene 6 datos.

Ordenar de menor a mayor:

2, 5, 6, 9, 11, 27

Los dos datos centrales son:

6 *y* 9.

El valor intermedio es:

$$\frac{(6 + 9)}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

que corresponde al valor de la mediana.

197

Respuestas.

a) La menor cantidad es 1 300 ml y la mayor es 2 500 ml.

b) La diferencia entre ellas es 1 200.

d) 1 900 ml

e) Por debajo de la mediana está la mitad de los datos, es decir, del 0 al 50%. Por encima de la mediana está la otra mitad de los datos, del 51 al 100%.

f) Los datos quedan divididos en cuatro partes, cada una representa un 25%.

g) 1 922.5 ml

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos no tengan dudas al leer esta gráfica. Dibújela en el pizarrón y vaya parte por parte explicando lo que significa cada uno de los puntos.

Los que deben ubicar son:

1 900 (la mediana).

2 100 (el 75% de los datos).

Respuestas.

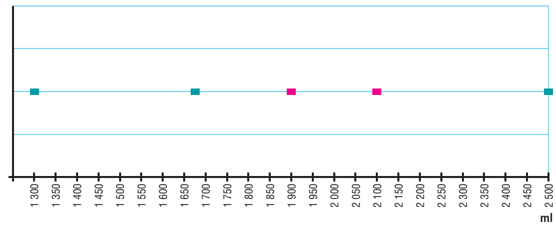
A: Lo que está hacia la izquierda de este punto es el primer 25% de los datos.

B: Este punto representa la mediana. Lo que está hacia la izquierda es la primera mitad de los datos que va del 0 al 50%, lo que está hacia la derecha es la segunda mitad que va del 51% al 100%.

C: Lo que está hacia la izquierda de este punto es el primer 75% de los datos, hacia la derecha el 25% restante.

II. En la gráfica 3 se han ubicado, a la misma altura, tres puntos:

- El primer punto muestra la menor cantidad de consumo de agua que se registró en ese grupo.
- El segundo muestra el valor hasta donde llega el primer 25% de los datos registrados en orden ascendente.
- El tercero representa la mayor cantidad de consumo de agua registrada.

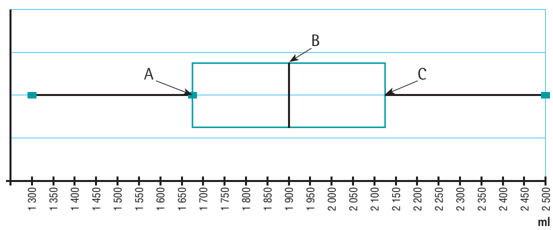


Gráfica 3

a) Ubiquen los siguientes puntos a la misma altura de los otros:

- El que represente la mediana de las cantidades de agua que consumen esos alumnos.
- Y otro punto que muestre el valor donde se alcanza 75% de los datos registrados en orden ascendente.

b) En la siguiente gráfica, anoten qué representan los valores señalados con las letras A, B, C.



Gráfica 4

A: __________ B: __________ C: __________

y compárenlo con el valor de la mediana, ¿se encuentran en el mismo lugar?

____

198

>>> A lo que llegamos

Una gráfica cajabrazos es una representación que divide en cuatro partes el total de datos.

Primer paso: se determina el valor de la mediana (Me) y, a partir de él, se forman dos grupos de datos: la primera mitad (de 0 a 50% de los datos) y la segunda mitad (de 51% a 100%).

Segundo paso: cada mitad se divide en dos grupos, en los que se identificará también su mediana. Cada grupo corresponde a un 25% de los datos.

Tercer paso: se identifican el valor más pequeño de los datos que es el extremo inferior y el valor más grande que es el extremo superior.

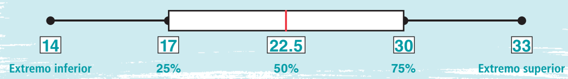
Ejemplo:

Primera mitad | mediana | Segunda mitad

14 16 16 17 17 19 20 22 22 | 22.5 | 23 25 26 27 30 30 31 31 33

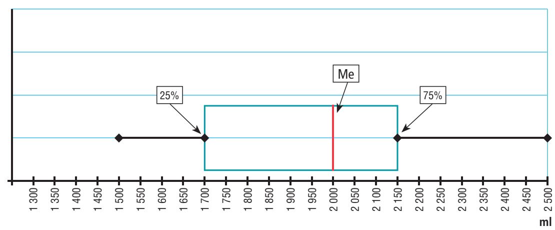
1er cuarto | 2do cuarto | 3er cuarto | 4to cuarto

25% | 50% | 75% | 100%



En el programa *Gráfica cajabrazos*, se muestra un esbozo del análisis exploratorio de datos, la cual es una nueva tendencia de la estadística.

III. La siguiente gráfica cajabrazos muestra las cantidades de agua (en ml) que consumen diariamente las 11 mujeres que integran el grupo considerado en el apartado *Consideremos lo siguiente*.



Gráfica 5

199

Propósito del programa 56. Conocer e interpretar gráficas de cajabrazo.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Respuestas.

a) El primer 25% de los datos, o sea, 3 alumnas.

b) Entre 1 300 y 1 850 ml.

c) El primer 75% que corresponde a 9 alumnas.

Posibles respuestas. Los alumnos pueden escribir diversas conclusiones al analizar la gráfica y compararla con los resultados obtenidos en su grupo. Lo importante es que consideren los 5 puntos requeridos para construir la gráfica: el límite inferior, el valor al 25% de los datos, la mediana (el valor al 50%), el valor al 75% de los datos y el valor del límite superior.

a) De acuerdo con la gráfica 5, ¿cuántas mujeres consumen entre 1 500 ml y 1 700 ml de agua diariamente? __________

b) ¿Qué cantidad de agua consume diariamente el primer 50% de mujeres? __________

c) ¿Qué porcentaje de las mujeres consumen entre 1 650 ml y 2 150 ml de agua diariamente? __________

d) Anoten en sus cuadernos una conclusión acerca de la distribución de la cantidad de agua que consumen diariamente esas mujeres. Comparen sus conclusiones.

>>> Lo que aprendimos

1. Los siguientes datos corresponden a los precios de la tortilla registrados el día 31 de enero de 2007 en diferentes ciudades del país.

Estado	Ciudad	Precio
Aguascalientes	Aguascalientes	$ 10.00
Baja California	Mexicali	$ 12.00
Baja California Sur	La Paz	$ 10.00
Campeche	San Francisco de Campeche	$ 9.50
Colima	Colima	$ 8.50
Chiapas	Tuxtla Gutiérrez	$ 8.00
Chihuahua	Chihuahua	$ 9.00
D.F.	Cd. México	$ 8.35
Durango	Victoria de Durango	$ 7.50
Guanajuato	Guanajuato	$ 8.00
Hidalgo	Pachuca de Soto	$ 8.50
Nayarit	Tepic	$ 8.50
Querétaro de Arteaga	Santiago de Querétaro	$ 8.80
Quintana Roo	Ciudad Chetumal	$ 10.00
Sinaloa	Culiacán	$ 8.50
Sonora	Hermosillo	$ 11.50
Tamaulipas	Ciudad Victoria	$ 9.80
Tlaxcala	Tlaxcala de Xicohténcatl	$ 8.00
Veracruz	Xalapa de Enríquez	$ 9.50
Yucatán	Mérida	$ 8.80
Zacatecas	Zacatecas	$ 8.50

Fuente: Sistema Nacional de Información e Integración de Mercados (SNIIM). Secretaría de Economía.

a) Elaboren en su cuaderno la gráfica cajabrazos que corresponde a estos datos.

b) ¿Qué escala y valores utilizarán para construirla? ______________________

c) ¿Cuál fue el valor de la mediana de los precios de tortilla en estas ciudades el día 31 de enero de 2007? ______________________

____

d) Calculen el valor de la media (promedio) de los precios de la tortilla y ubíquenlo en la gráfica. Comparen este valor con el valor de la mediana, ¿cuál es mayor? __________ . ¿Cómo describen lo que sucede entre estos valores y la distribución de todos los precios de la tortilla? ______________________

____

e) ¿Cuáles fueron los precios de la tortilla en el primer 25% del total de ciudades registradas? ______________________

f) Comparen sus gráficas y respuestas con las de sus compañeros de grupo.

2. Utilicen los datos que obtuvieron al realizar el estudio sobre la cantidad de agua que consume diariamente su grupo para elaborar la gráfica cajabrazos en sus cuadernos.

a) Anoten en la siguiente tabla los cinco valores que necesitan para elaborar la gráfica.

Cantidad mínima de agua que consumen diariamente	25%	Mediana 50%	75%	Cantidad máxima de agua que consumen diariamente

b) También anoten una conclusión acerca de la manera en que se distribuyen las cantidades en el grupo y compárenlas con las de sus compañeros de grupo.

____

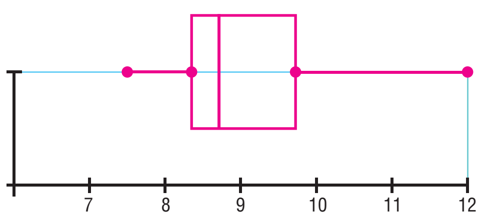
____

____

____

____

201



Respuestas.

b) Los alumnos pueden tomar distintas decisiones sobre cuáles valores señalar en el eje horizontal. Aunque éstos no son muy grandes, hay muchos decimales, así que una opción sería ir de 0.25 en 0.25 empezando en 7.5 que es el precio más bajo.

c) 8.71

d) 9.025, así que la media es mayor que la mediana.

e) Los que van de \$7.50 a \$8.35

Sugerencia didáctica. Con respecto al menor precio de la tortilla y la mediana comente con los alumnos lo siguiente. En la primera mitad de los datos se ve que éstos se encuentran más juntos, pues la variación es de 1.71; mientras que de la mediana al precio más alto (segunda mitad de los datos) la variación es mayor de 3.29.

La media es mayor que la mediana, lo que indica que se ve afectada por el hecho de que la segunda mitad de los datos estén más dispersos, de hecho la media se encuentra entre el 50% y el 75% de los datos.

Una conjetura que podría hacerse es que si la mayor variación se encontrara en la primera mitad de los datos la media estaría ubicada antes que la mediana. También cabe preguntar: ¿qué representa, en términos de dispersión de los datos, el hecho de que la media y la mediana tengan el mismo valor?

Sugerencia didáctica. Esta actividad puede utilizarse para comparar la relación entre la mediana media y analizar la dispersión de los datos.

Propósito de la sesión. Comparar dos o más conjuntos de datos mediante sus gráficas de cajabrazos.

SECUENCIA 30

SESIÓN 3

COMPARACIÓN DE DATOS MEDIANTE LA GRÁFICA CAJABRAZOS

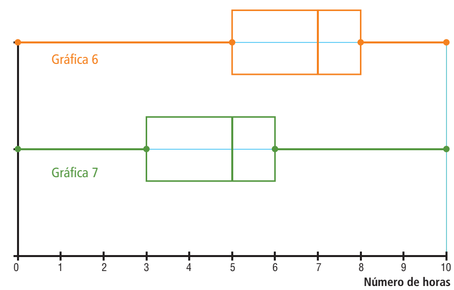
>>> Para empezar

Cuando realizan un estudio o experimento estadístico, obtienen datos que, al organizarlos y analizarlos, producen información. En algunas ocasiones resulta de gran ayuda comparar varios conjuntos de datos para tomar una decisión adecuada sobre la situación o el fenómeno que se estudia. Mediante la gráfica cajabrazos se muestra de manera clara y global la distribución de los datos de estos conjuntos.

>>> Manos a la obra

I. Las siguientes gráficas cajabrazos muestran los resultados obtenidos al preguntar:

- ¿Cuántas horas al día de tu tiempo libre utilizas en ver televisión? (gráfica 6).
- ¿Cuántas horas al día conviven contigo tus padres en los días de trabajo? (gráfica 7).



Gráficas 6 y 7

Respuestas.

a) 25%

b) Menos del 25%

a) ¿Cuál es el porcentaje de los alumnos que conviven con sus padres de 0 a 3 horas? ________

b) ¿Cuál es el porcentaje de los alumnos que se dedican a ver televisión entre 9 y 10 horas? ________

c) De acuerdo con las gráficas 6 y 7, anoten una V en el cuadrito para las afirmaciones que sean verdaderas.

☐ Menos del 50% de los alumnos encuestados conviven entre 0 y 1 horas al día con sus padres.

☐ Más del 75% de los alumnos dedican a ver televisión entre 8 y 10 horas al día.

202

Sugerencia didáctica. Dibuje en el pizarrón las gráficas y pida a dos o tres alumnos que expliquen sus respuestas el resto del grupo.

Respuestas.
La primera afirmación es falsa porque exactamente el 50% de los alumnos encuestados convive entre 0 y 5 horas al día con sus padres. La línea que se encuentra dentro del rectángulo señala la mediana precisamente en ese punto.

La segunda afirmación también es falsa porque los alumnos que ven entre 8 y 10 horas al día la televisión son un 25%

La tercera afirmación es verdadera, ya que la línea que está dentro del rectángulo señala la mediana (5 horas) y el extremo derecho del rectángulo representa el 75% de los datos (6 horas).

La cuarta afirmación es falsa. En la gráfica que representa el número de horas que los alumnos conviven con sus padres sí es cierto que el 50% de los alumnos manifestó pasar entre 3 y 6 horas con ellos.

- [x] Un 25% de los alumnos conviven entre 5 y 6 horas al día con sus padres.
- [ ] Hay un 50% de alumnos que dedican a ver televisión entre 3 y 6 horas al día.

d) En el siguiente recuadro, escriban algunas de las semejanzas o diferencias que hay entre las distribuciones de los datos de las gráficas 6 y 7, así como las relaciones que encuentran entre ellas a manera de conclusión.

Posibles respuestas. Se espera que los estudiantes logren hacer lecturas de las gráficas en las que puedan relacionarlas, por ejemplo: la mitad de los alumnos ve 7 o más horas de televisión al día, así que dicha gráfica se encuentra más "cargada" hacia los valores mayores en comparación con la de número de horas que los alumnos pasan con sus padres al día, cuya mediana está ubicada en el 5.

Comparen sus respuestas.

II. A estos alumnos también se les preguntó:

- ¿Cuántas horas al día de tu tiempo libre dedicas a la lectura, sin tomar en cuenta las que dedicas a tus libros de texto?

Los siguientes datos corresponden a los resultados de esa pregunta:

Valor mínimo (extremo inferior)	25%	Mediana 50%	75%	Valor máximo (extremo superior)
0 horas al día	1 hora al día	2 horas al día	4 horas al día	6 horas al día

a) En la misma figura de las gráficas 6 y 7, construyan la gráfica cajabrazos con los datos anteriores.

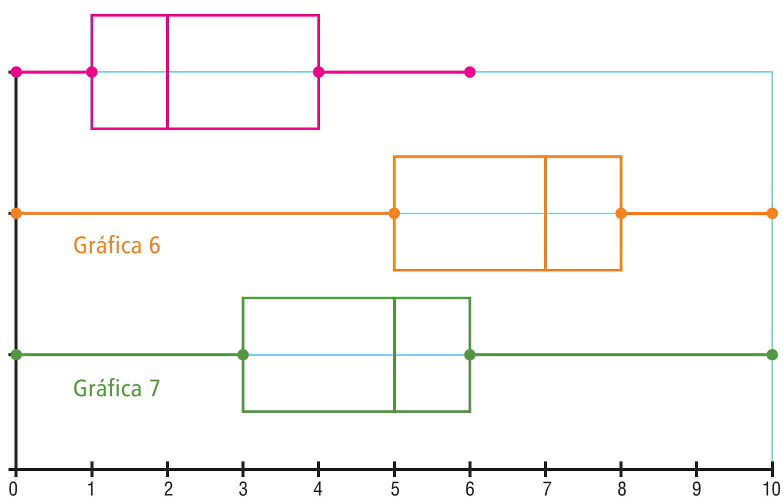
b) Escriba cada uno dos afirmaciones que puedan hacer al ver las tres gráficas, es decir, la 6, la 7 y la que acaban de construir.

1. ______________________

2. ______________________

c) Intercambien con su compañero sus afirmaciones y prueben si son ciertas. Anótenlas en sus cuadernos.

1



Posibles respuestas. Los alumnos pueden afirmar cosas como: con respecto a las otras dos gráficas, en la que se representa el número de horas que dedican al día a la lectura, los datos están más "cargados" a la izquierda, es decir, a valores más bajos.

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos trabajen con datos que ellos mismos han obtenido. Así, poco a poco irán adquiriendo experiencia para levantar datos, organizarlos, representarlos y analizarlos.

Integrar al portafolios. Solicite a cada pareja de alumnos una copia de la actividad 1 o de la actividad 2 de este apartado. Revísela para ver si es necesario hacer algún repaso.

Respuestas.

a) 61 kg es la mediana del total.

b) La mediana de la gráfica del total es mayor que la mediana del peso de las mujeres (54 kg) y menor que la de los hombres (68 kg).

c) El mínimo de la gráfica de las mujeres es igual al mínimo de la gráfica del total, y el máximo de la gráfica de los hombres es igual al máximo de la gráfica del total. Esto ocurre así porque la gráfica del total representa los valores de las otras dos gráficas (la de hombres y mujeres).

>>> Lo que aprendimos

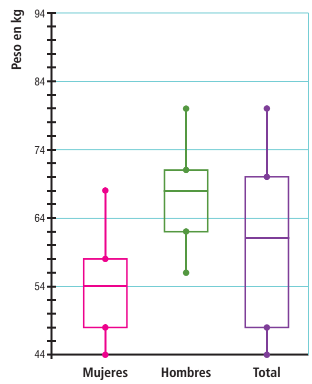
1. Realicen las siguientes preguntas a sus compañeros de grupo:
   - ¿Cuántas horas a la semana de tu tiempo libre dedicas a la lectura, sin tomar en cuenta las que dedicas a tus libros de texto?
   - ¿Cuántas horas a la semana de tu tiempo libre dedicas al estudio (buscar datos sobre los temas de clase, por ejemplo), sin tomar en cuenta las que dedicas a tus libros de texto?

   a) Anoten las respuestas y organicen de manera ascendente (de menor a mayor) los datos que obtuvieron para cada pregunta.

   b) En sus cuadernos, tracen sus gráficas cajabrazos correspondientes.

   c) Describan de qué manera se distribuyen los datos y anoten alguna conclusión.

2. Las siguientes gráficas muestran las distribuciones de los pesos en kilogramos de los alumnos de un grupo: por sexo y en total.



Gráfica 8

   a) ¿Qué valor tiene la mediana del total de alumnos de ese grupo? __________

   b) Comparen este valor con los valores de las medianas de las otras dos gráficas, ¿cuál es mayor? __________ . ¿Y cuál es menor? __________

   c) ¿Cuál es la relación que encuentran entre los valores mínimos y los máximos de las gráficas por sexo y la gráfica del total? ______________________________

____

3. En la sesión 2 construyeron la gráfica cajabrazos (gráfica 3) que muestra la cantidad de agua que consumen diariamente. Ahora se construirán las gráficas cajabrazos que muestren la distribución de la cantidad de agua que consumen diariamente los hombres y la distribución de la cantidad de agua que consumen las mujeres de tu grupo.

a) Describan y anoten cómo se distribuyen las cantidades de agua que consumen diariamente sus compañeras y compañeros de grupo, según se observa en cada gráfica que acaban de elaborar.

b) Comparen estas nuevas gráficas con la que construyeron anteriormente, que muestra los datos de todo el grupo (la gráfica 3). Escriban en sus cuadernos una conclusión sobre lo que muestran las tres gráficas.

Para conocer otras situaciones en las que se utilizan dos o más gráficas para comparar, interpretar y analizar datos, pueden ver el programa *Comparación de gráficas cajabrazos*.

>>> Para saber más

Sobre otro contexto en el que para mostrar la información utilizan gráficas cajabrazos y otras gráficas estadísticas que ya conocen, consulten:
http://www.inee.edu.mx
[Fecha de consulta: 8 de octubre de 2008].
Ruta: Publicaciones → Informes y reportes. Buscar el informe "El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria"; en el documento PDF, ir a "El aprendizaje de las Matemáticas" (página 61).
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que trabajen en equipos. Cada equipo deberá elaborar sus dos gráficas en una cartulina y péguenlas en el salón para que puedan compararlas con las de los otros equipos. Luego, pida a un representante de cada equipo que comenten al grupo sus conclusiones sobre las tres gráficas.

Propósito del programa 57. Presentar diferentes situaciones en las que se utilizan dos o más gráficas para comparar, interpretar y analizar los datos.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

PROPUESTAS DE EXÁMENES BIMESTRALES
BLOQUE 3, BLOQUE 4 Y BLOQUE 5

A continuación se presenta una propuesta para evaluar los bloques 3, 4 y 5 mediante exámenes que serán complementarios de la información que usted ha ido integrando en el portafolios del alumno.

Los exámenes tienen las siguientes características:

De cada secuencia se proponen entre uno y cuatro reactivos, cada reactivo evalúa un aspecto del contenido que se trató en la secuencia.

Cada examen se arma de la siguiente manera:

Hay dos opciones para cada reactivo, cada una evalúa el mismo contenido y tiene el mismo nivel de dificultad. La intención de poner estas dos opciones es que usted pueda elegir una o la otra y armar así distintas versiones del examen según le convenga. Encontrará todos los reactivos respondidos para facilitarle la calificación.

Recomendaciones para la aplicación de los exámenes, su revisión y calificación:

Debido a la longitud de los exámenes, se sugiere aplicar cada uno en dos sesiones de clase, al final de cada bloque. Una vez aplicado, haga una revisión grupal de las soluciones de los reactivos para aclarar dudas y dar oportunidad a que cada alumno haga las correcciones pertinentes de los errores que hubiera cometido.

Se sugiere no asignar más del 50% de la calificación bimestral a los resultados de los exámenes, considere para el otro 50% las actividades que integró en el portafolios y otros aspectos que crea importantes (como la participación, el cumplimiento de tareas, etc.).

PROPUESTA DE EXAMEN BIMESTRAL BLOQUE 3

SECUENCIA 14. RELACIONES FUNCIONALES EN OTRAS DISCIPLINAS

Reactivo 1

1. Al colocarse a 1 m de la pantalla, un proyector despliega un cuadrado que mide 3 m de lado. Si x es la distancia del proyector a la pantalla, y y es el área de la imagen proyectada, ¿cuál es la expresión que relaciona x con y?

$y =$ ____________________

Respuesta: $y = 9x^2$

1'. Al colocarse a 2 m de la pantalla, un proyector despliega un cuadrado que mide 2 m de lado. Si x es la distancia del proyector a la pantalla, y y es el área de la imagen proyectada, ¿cuál es la expresión que relaciona x con y?

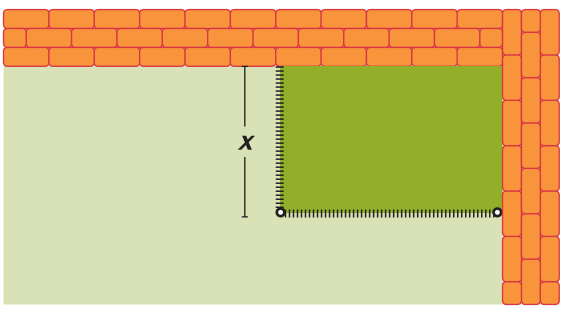
$y =$ ____________________

Respuesta: $y = 4x^2$

Reactivo 2

2. Se va a construir la cerca de una región de terreno como se muestra en la figura (región verde). La región necesita cercase sólo en dos lados, pues el resto tiene barda.

Respuesta: $y = x(10 - x)$ o bien $y = 10x - x^2$

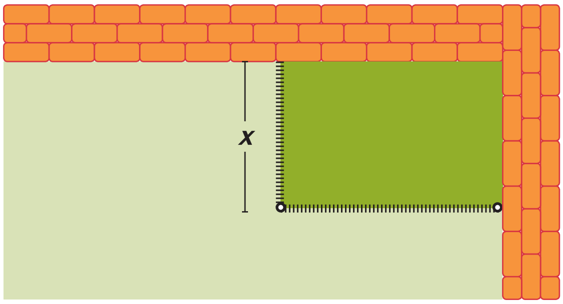


Para construir la cerca se cuenta con 10 m de malla y se tiene usar toda. Si y es el área de la región que se va a cercar y x es la longitud que se señala en la figura ¿cuál es la expresión que relaciona x con y?

$y =$ ____________________

Respuesta: $y = x(20 - x)$ o bien $y = 20x - x^2$.

2'. Se va a construir la cerca de una región de terreno como se muestra en la figura (región verde). La región necesita cercarse sólo en dos lados, pues el resto tiene barda.



Para construir la cerca se cuenta con 20 m de malla y se tiene usar toda. Si y es el área de la región que se va a cercar y x es la longitud que se señala en la figura ¿cuál es la expresión que relaciona x con y?

$y =$ ______________________

Reactivo 3

Respuesta: c)

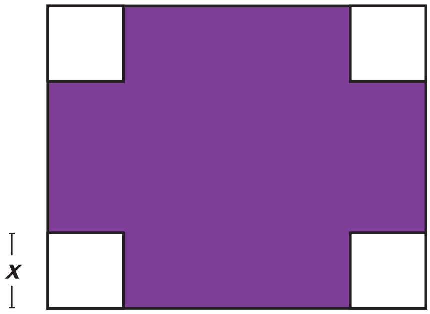
3. A un cartón rectangular cuyos lados miden 4 cm y 5 cm se le ha recortado en cada esquina un cuadrado de lado x. De las siguientes expresiones, ¿cuál permite calcular el área y del cartón sin las esquinas?

a) $y = 4x^2$

b) $y = 20 - 4x$

c) $y = 20 - 4x^2$

d) $y = 4(20 - x)$



Respuesta: b)

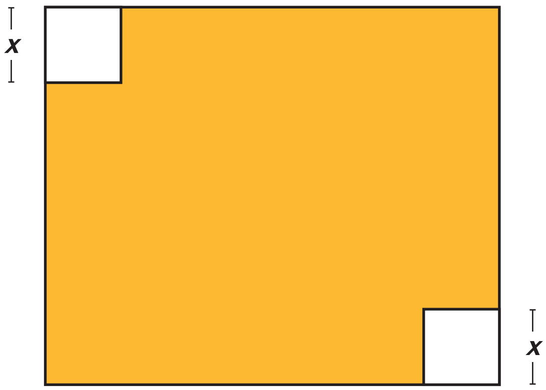
3'. A un cartón rectangular cuyos lados miden 5 cm y 6 cm se le ha recortado en dos equinas un cuadrado de lado x. De las siguientes expresiones, ¿cuál permite calcular el área y de cartón sin las dos esquinas?

a) $y = 2x^2$

b) $y = 30 - 2x^2$

c) $y = 6(5 - 2x)$

d) $y = 30 - 2x$



SECUENCIA 15. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS POR LA FÓRMULA GENERAL

Reactivo 1

1. Si se utiliza la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para resolver la ecuación $3x^2 - 56 = -2x$ ¿cuánto valen a, b y c?

a) $a = 3,\ b = -56,\ c = -2$

b) $a = 3,\ b = -2,\ c = -56$

c) $a = 3,\ b = 2\ ,\ c = -56$

d) $a = 3,\ b = -56,\ c = 2$

Respuesta: c)

1'. Si se utiliza la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para resolver la ecuación $x^2 - 5x = 6$ ¿cuánto valen a, b y c?

a) $a = 2,\ b = -5,\ c = 6$

b) $a = 2,\ b = 5,\ c = -6$

c) $a = 1,\ b = -5,\ c = -6$

d) $a = 1,\ b = 5,\ c = 6$

Respuesta: c)

Reactivo 2

2. Encuentra las dos soluciones de la ecuación $4x^2 + 8x = 5$ utilizando la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

x_1 = ________________ x_2 = ________________

Respuestas:

$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(4)(-5)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8}$$

$$x = \frac{-8 \pm 12}{8}$$

$x_1 = 0.5$

$x_2 = -2.5$

2'. Encuentra las dos soluciones de la ecuación $x^2 - x = 6$ utilizando la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

x_1 = ________________ x_2 = ________________

Respuestas:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$x_1 = 3$

$x_2 = -2$

Reactivo 3

3. La trayectoria que sigue una jabalina está dada por la ecuación: $y = -0.015x^2 + 0.64x + 1.6$, donde x representa la distancia horizontal que recorre y y la altura.

a) ¿Qué distancia ha recorrido horizontalmente la jabalina cuando está a una altura de 6.5 metros?

x_1 = ____________________ x_2 = ____________________

3'. La trayectoria que sigue una jabalina está dada por la ecuación: $y = -0.015x^2 + 0.64x + 1.6$, donde x representa la distancia horizontal que recorre y y la altura.

a) ¿Qué distancia ha recorrido horizontalmente la jabalina cuando está a una altura de 8 m?

x_1 = ____________________ x_2 = ____________________

3. Respuestas:

Cuando la jabalina se encuentra a 10 m y a 32.666 m del punto donde fue lanzada.

Ecuación:

$-0.015x^2 + 0.64x + 1.6 = 6.5$

Ecuación en su forma general:

$-0.015x^2 + 0.64x - 4.9 = 0$

$$x = \frac{-0.64 \pm \sqrt{(0.64)^2 - 4(-0.015)(-4.9)}}{2(-0.015)}$$

$$x = \frac{-0.64 \pm \sqrt{0.4096 - 0.294}}{-0.03}$$

$$x = \frac{-0.64 \pm \sqrt{0.1156}}{-0.03}$$

$$x = \frac{-0.64 \pm 0.34}{-0.03}$$

$x_1 = 10$

$x_2 = 32.666$

3'. Respuestas:

Cuando ha recorrido 16 m y 26.666 m del punto donde fue lanzada.

Ecuación:

$-0.015x^2 + 0.64x + 1.6 = 8$

Ecuación en su forma general:

$-0.015x^2 + 0.64x - 6.4 = 0$

$$x = \frac{-0.64 \pm \sqrt{(0.64)^2 - 4(-0.015)(-6.4)}}{2(-0.015)}$$

$$x = \frac{-0.64 \pm \sqrt{0.4096 - 0.384}}{-0.03}$$

$$x = \frac{-0.64 \pm \sqrt{0.0256}}{-0.03}$$

$$x = \frac{-0.64 \pm 0.16}{-0.03}$$

$x_1 = 16$

$x_2 = 26.666$

Reactivo 4

4. Relaciona las columnas de acuerdo al número de soluciones que tiene cada ecuación de la izquierda.

Ecuación	Número de soluciones
( ) $2x^2 + 3x + 6 = 0$	
( ) $x^2 + 6x + 9 = 0$	(A) Tiene una solución doble
( ) $x^2 - 7x + 2 = 0$	(B) Tiene dos soluciones distintas
( ) $-8x^2 - 2x + 10 = 0$	(C) No tiene solución real
( ) $4x^2 + 12x + 9 = 0$	

Respuestas:

(C) $2x^2 + 3x + 6 = 0$

(A) $x^2 + 6x + 9 = 0$

(B) $x^2 - 7x + 2 = 0$

(B) $-8x^2 - 2x + 10 = 0$

(A) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

4'. Relaciona las columnas de acuerdo al número de soluciones que tiene cada ecuación de la izquierda.

Ecuación	Número de soluciones
( ) $x^2 + 3x - 6 = 0$	
( ) $2x^2 + 12x + 18 = 0$	(A) Tiene una solución doble
( ) $x^2 + 3x + 2 = 0$	(B) Tiene dos soluciones distintas
( ) $-x^2 - 2x - 1 = 0$	(C) No tiene solución real
( ) $4x^2 + 5x + 3 = 0$	

Respuestas:

(B) $x^2 + 3x - 6 = 0$

(A) $2x^2 + 12x + 18 = 0$

(B) $x^2 + 3x + 2 = 0$

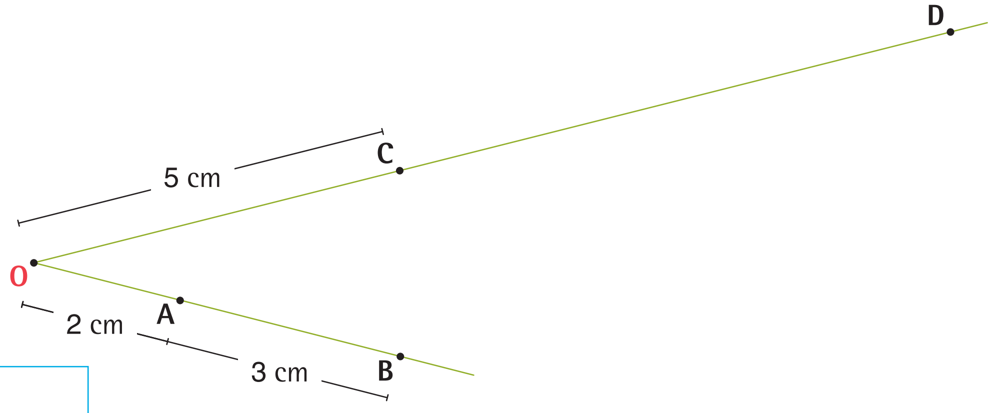
(A) $-x^2 - 2x - 1 = 0$

(C) $4x^2 + 5x + 3 = 0$

SECUENCIA 16. TEOREMA DE TALES

Reactivo 1

1. Determina lo que debe medir el segmento **CD** para que las rectas **AC** y **BD** sean paralelas.



a) El segmento **CD** debe medir ____________

b) Justifica tu respuesta ______________________________

____

____

____

____

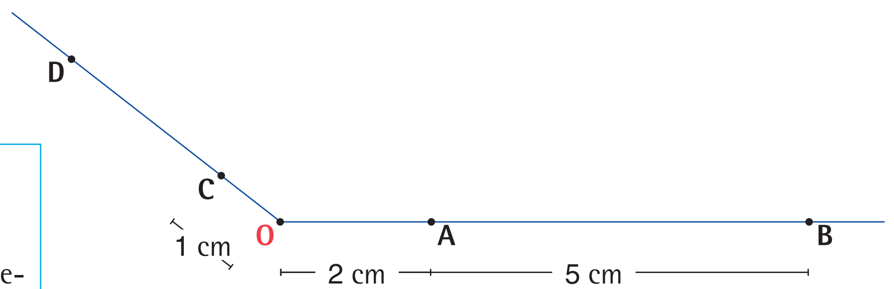
Respuestas:

a) 7.5 cm.

b) Según el recíproco del teorema de Tales, para que las rectas determinadas por $\overline{\mathbf{AC}}$ y $\overline{\mathbf{BD}}$ sean paralelas se tiene que cumplir que las medidas de los segmentos **OC** y **CD** sean proporcionales a las medidas de los segmentos **OA** y **AB**. Entonces $\frac{5}{2} = \frac{x}{3}$

De ahí que $x = 7.5$

1'. Determina lo que debe medir el segmento **CD** para que las rectas **AC** y **BD** sean paralelas.



a) El segmento **CD** debe medir ____________

b) Justifica tu respuesta ______________________________

____

____

____

____

Respuestas:

a) 2.5 cm.

b) Según el recíproco del teorema de Tales para que las rectas determinadas por $\overline{\mathbf{AC}}$ y $\overline{\mathbf{BD}}$ sean paralelas se tiene que cumplir que las medidas de los segmentos **OC** y **CD** sean proporcionales a las medidas de los segmentos **OA** y **AB**. Entonces $\frac{1}{2} = \frac{x}{5}$

De ahí que $x = 2.5$

Reactivo 2

2. Sin utilizar regla graduada, divide el segmento **GH** en 3 partes iguales.

Respuestas:

a) Los alumnos pueden realizar la división con la regla no graduada y compás o con la hoja rayada.

b) En cualquiera de los dos procedimientos, se puede justificar la división en partes iguales utilizando el teorema de Tales.

a) Describe el procedimiento que utilizaste para dividir el segmento **GH** en 3 partes iguales ______________________________

b) Justifica por qué las tres partes en las que dividiste al segmento miden lo mismo ______________________________

2'. Sin utilizar regla graduada, divide el segmento **EF** en 5 partes iguales.

Respuestas:

a) Los alumnos pueden realizar la división con la regla no graduada y compás o con la hoja rayada.

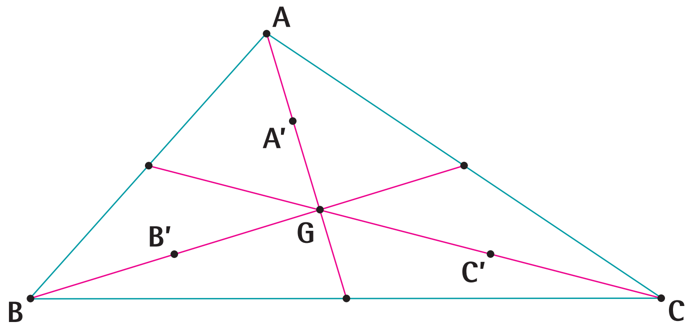
b) En cualquiera de los dos procedimientos, se puede justificar la división en partes iguales utilizando el teorema de Tales.

a) Describe el procedimiento que utilizaste para dividir el segmento **EF** en 5 partes iguales ______________________________

b) Justifica por qué las cinco partes en las que dividiste al segmento miden lo mismo ______________________________

Reactivo 3

3. En el interior del triángulo **ABC** se trazó un punto **G**. Se marcó con **A'**, **B'** y **C'** los puntos medios de $\overline{\mathbf{AG}}$, $\overline{\mathbf{BG}}$ y $\overline{\mathbf{CG}}$ respectivamente.



a) ¿El triángulo **A'B'C'** es semejante al triángulo **ABC**? __________

b) Justifica tu respuesta __________

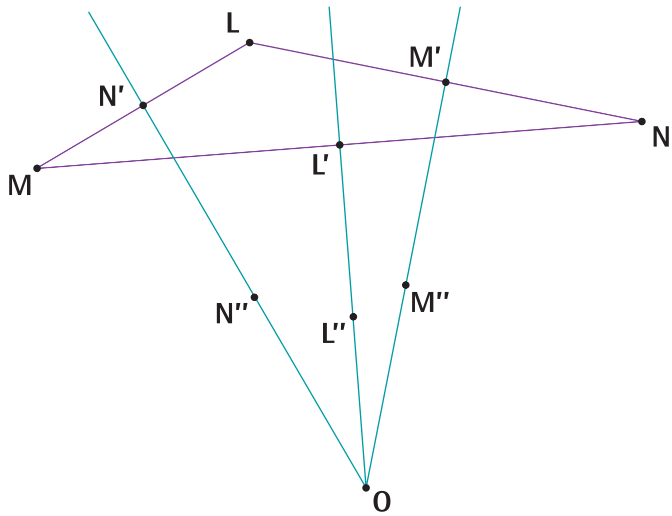
Respuestas:

a) Sí.

b) Como **A'** y **B'** son puntos medios de $\overline{\mathbf{AG}}$ y $\overline{\mathbf{BG}}$ respectivamente, entonces $\overline{\mathbf{GB'}} = \overline{\mathbf{B'B}}$ y $\overline{\mathbf{GA'}} = \overline{\mathbf{A'A}}$.

Por lo tanto $\frac{\overline{GB'}}{\overline{GA'}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{A'A}}$, así que, por el recíproco del teorema de Tales **A'B'** es paralela a **AB**. Análogamente **B'C** || **BC** y **C'A'** || **CA**; de donde se obtiene que los triángulos son semejantes.

3'. En el triángulo **LMN** se trazaron las mediatrices y se marcaron con las letras **L''**, **M''** y **N''** los puntos medios de los segmentos **OL'**, **OM'** y **ON'**, respectivamente.



a) ¿El triángulo **L''M''N''** es semejante al triángulo **LMN**? __________

b) Justifica tu respuesta __________

Respuestas:

a) Sí.

b) Como **L'** y **M'** son puntos medios de $\overline{\mathbf{MN}}$ y $\overline{\mathbf{NL}}$, entonces $\overline{\mathbf{ML'}} = \overline{\mathbf{L'N}}$ y $\overline{\mathbf{NM'}} = \overline{\mathbf{M'L}}$.

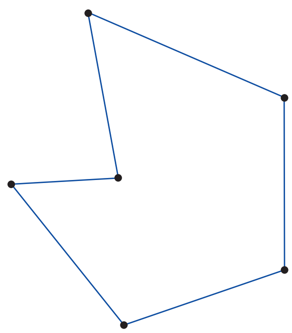
Por lo tanto $\frac{\overline{NL'}}{\overline{NM'}} = \frac{\overline{L'M}}{\overline{M'L}}$, así que, por el recíproco del teorema de Tales, **L'M'** es paralela a **LM**. Análogamente **M'N'** || **MN** y **N'L'** || **NL**.

También, como **L''** y **M''** son puntos medios de $\overline{\mathbf{OL'}}$ y $\overline{\mathbf{OM'}}$, respectivamente, por el recíproco del teorema de Tales **L''M''** || **L'M'** y por lo tanto **L''M''** || **LM**. Análogamente se obtiene que **M''N''** || **M'N'** || **MN** y que **N''L''**|| **N'L'**|| **NL**; de donde se obtiene que los triángulos **LMN** y **L''M''N''** son semejantes.

SECUENCIA 17. FIGURAS HOMOTÉTICAS

Reactivo 1

1. Construye un polígono homotético al dado de manera que la razón de homotecia sea $\frac{1}{3}$.



Describe el proceso que realizaste para construir el polígono homotético

____

____

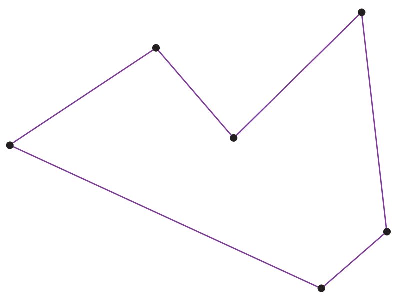
____

____

Respuesta:

1. Elegir un punto como centro de homotecia y trazar los segmentos de recta que van del centro de homotecia a los vértices del polígono dado.
2. Dividir cada uno de los segmentos en 3 partes iguales.
3. Formar el polígono con los puntos que marcan en cada segmento el primer tercio a partir del centro de homotecia.

1'. Construye un polígono homotético al dado de manera que la razón de homotecia sea $\frac{1}{5}$.



Describe el proceso que realizaste para construir el polígono homotético

____

____

____

____

Respuesta:

1. Elegir un punto como centro de homotecia y trazar los segmentos de recta que van del centro de homotecia a los vértices del polígono dado.
2. Dividir cada uno de los segmentos en 5 partes iguales.
3. Formar el polígono con los puntos que marcan en cada segmento el primer quinto a partir del centro de homotecia.

Reactivo 2

Respuestas:

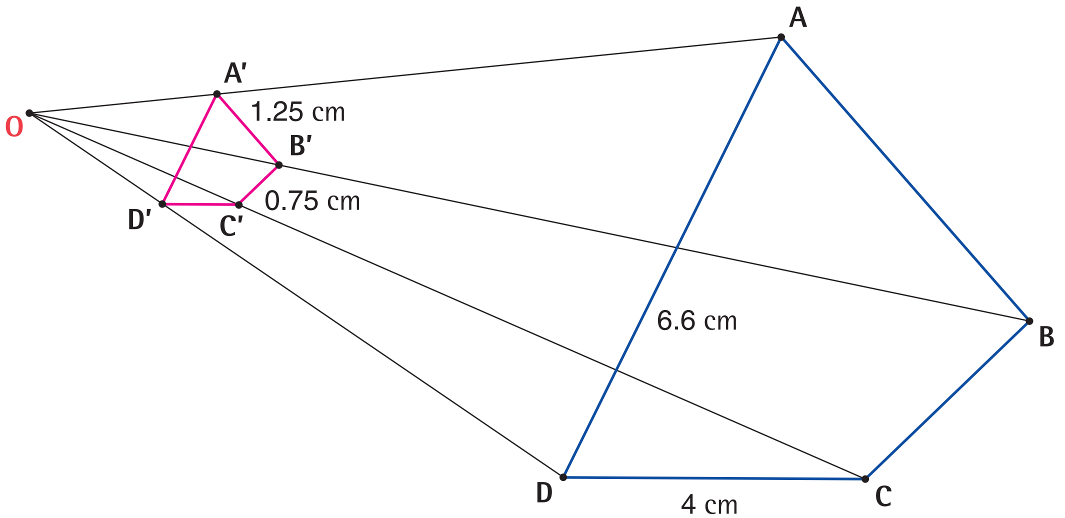
$\overline{AB}$ = 5 cm.

$\overline{BC}$ = 3 cm.

$\overline{D'C'}$ = 1 cm.

$\overline{A'D'}$ = 1.65 cm.

2. Calcula las medidas que faltan de los lados de los polígonos homotéticos dados. Considera $\overline{OA'}$ = 2.5 cm y $\overline{OA}$ = 10 cm.



Lado **AB** ______________   Lado **BC** ______________

Lado **D'C'** ______________   Lado **A'D'** ______________

Respuestas:

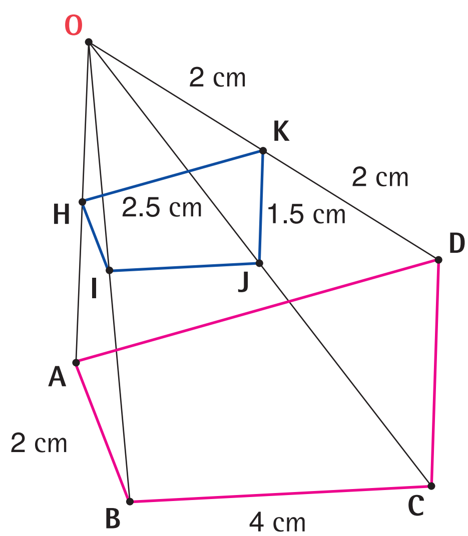
$\overline{HI}$ = 1 cm.

$\overline{IJ}$ = 2 cm.

$\overline{AD}$ = 5 cm.

$\overline{DC}$ = 3 cm.

2'. Calcula las medidas que faltan de los lados de los polígonos homotéticos dados.



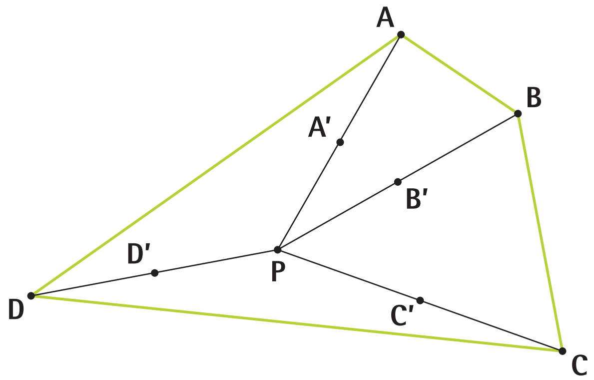
Lado **HI** ______________   Lado **IJ** ______________

Lado **AD** ______________   Lado **DC** ______________

Localiza el centro de homotecia de los polígonos dados.

Reactivo 3

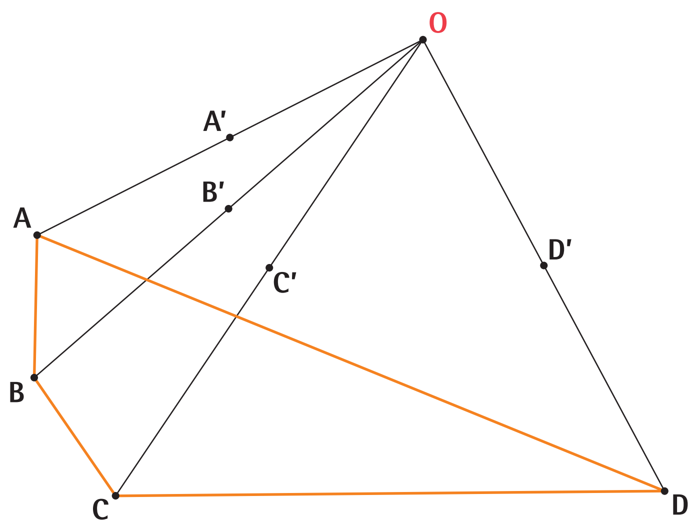
3. En el cuadrilátero **ABCD** se marcaron con **A′**, **B′**, **C′** y **D′** los puntos medios de $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ y $\overline{DP}$ respectivamente.



a) ¿El cuadrilátero **A′B′C′D′** es homotético al cuadrilátero **ABCD**? ______

b) Justifica tu respuesta ____________________

3′. En el cuadrilátero **ABCD** se marcaron con **A′**, **B′**, **C′** y **D′** los puntos medios de $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ y $\overline{DO}$ respectivamente.



a) ¿El cuadrilátero **A′B′C′D′** es homotético al cuadrilátero **ABCD**? ______

b) Justifica tu respuesta ____________________

Respuestas:

a) Sí.

b) Se debe justificar que los polígonos son semejantes y que sus lados correspondientes son paralelos.

Como **A′**, **B′**, **C′** y **D′** son puntos medios de los segmentos **AP**, **BP**, **CP** y **DP** respectivamente, entonces las medidas de los segmentos **A′P**, **B′P**, **C′P** y **D′P** son proporcionales a las medidas de los segmentos **AA′**, **BB′**, **CC′** y **DD′**.

Por la semejanza de los triángulos que se forman o por el recíproco del teorema de Tales, se puede justificar que el cuadrilátero **A′B′C′D′** es semejante al cuadrilátero **ABCD** y que **D′A′** || **DA**;

A′B′ || **AB**; **B′C′** || **BC** y **C′D′** || **CD**.

Entonces los polígonos son homotéticos.

Respuestas:

a) Sí.

b) Se debe justificar que los polígonos son semejantes y que sus lados correspondientes son paralelos.

Como **A′**, **B′**, **C′** y **D′** son puntos medios de los segmentos **AO**, **BO**, **CO** y **DO** respectivamente, entonces las medidas de los segmentos **A′O**, **B′O**, **CO′** y **D′O** son proporcionales a las medidas de los segmentos **AA′**, **BB′**, **CC′** y **DD′**.

Por la semejanza de los triángulos que se forman o por el recíproco del teorema de Tales, se puede justificar que el cuadrilátero **A′B′C′D′** es semejante al cuadrilátero **ABCD** y que **D′A′** || **DA**;

A′B′ || **AB**; **B′C′** || **BC** y **C′D′** || **CD**.

Entonces los polígonos son homotéticos.

SECUENCIA 18. GRÁFICAS DE RELACIONES

Reactivo 1

1. Para cada fenómeno de la izquierda anota el inciso de la gráfica de la derecha que le corresponde.

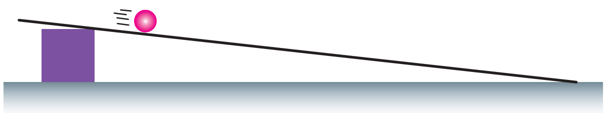
Respuestas:

1 ⟶ c)

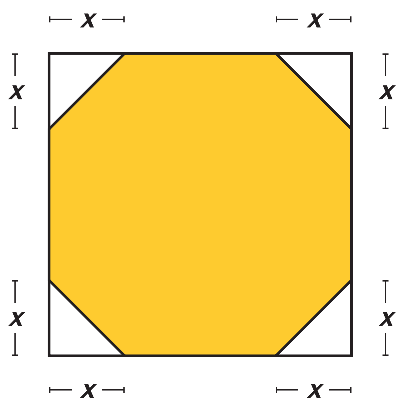
2 ⟶ a)

3 ⟶ e)

[ ] Al caer una canica por una rampa se grafica la distancia recorrida ***y*** en cada segundo del tiempo ***x***.

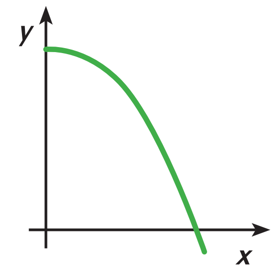


[ ] Al recortar las esquinas de un cuadrado se forma un hexágono. Se grafica la relación que existe entre el área ***y*** del hexágono y la longitud ***x*** de la esquina recortada.

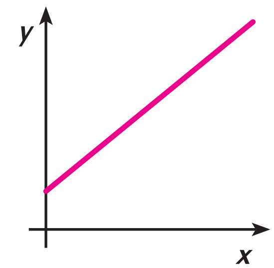


[ ] Se desea vender un terreno rectangular que tiene un área de 100 m². No se sabe cuánto miden los lados del terreno, pero para cada posible medida ***x*** del frente se ha graficado la medida ***y*** del fondo.

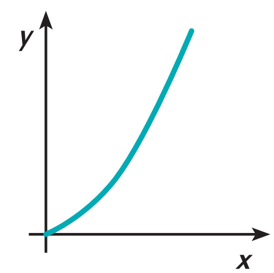
a)



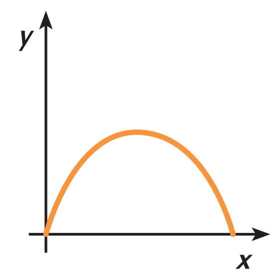
b)



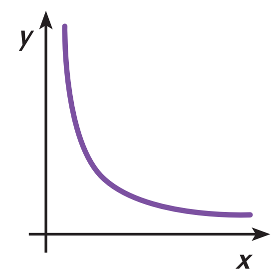
c)



d)

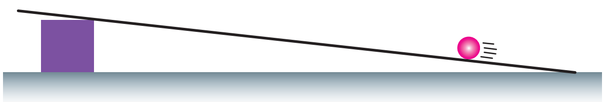


e)

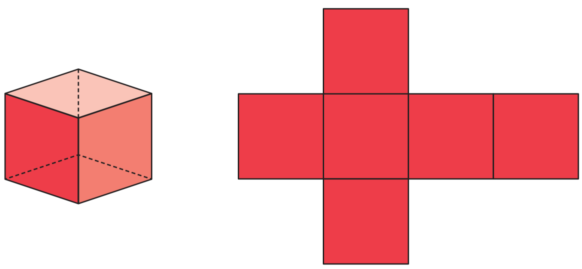


1'. Para cada fenómeno de la izquierda anota el inciso de la gráfica de la derecha que le corresponde.

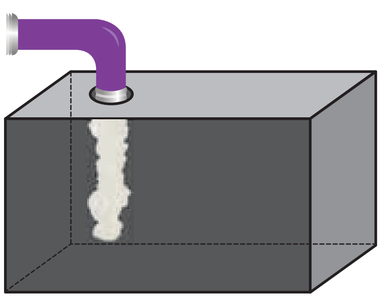
[ ] Se empuja una canica para que suba una rampa, la canica no alcanza la cima de la rampa y vuelve a caer. Se grafica ***y*** que es la distancia a la que se encontraba la canica del lugar de lanzamiento, respecto al tiempo ***x***.



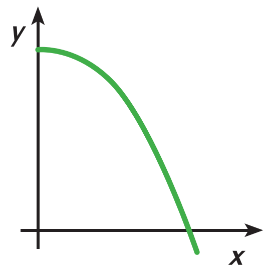
[ ] Sea ***x*** el lado de un cubo y ***y*** al área de su desarrollo plano. Se grafica ***y*** para cada valor posible de ***x***.



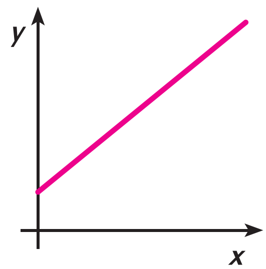
[ ] Se abre una llave para llenar un tinaco que ya tiene cierta cantidad de agua. La llave arroja la misma cantidad de agua cada segundo. Se grafica la cantidad de agua ***y*** en el tinaco con respecto al tiempo ***x*** que lleva la llave abierta.



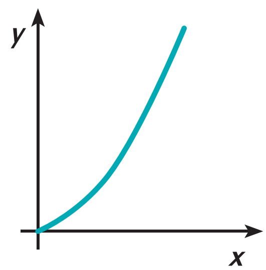
a)



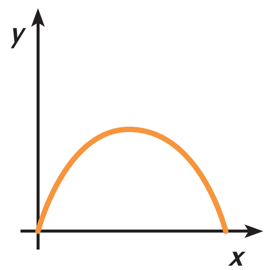
b)



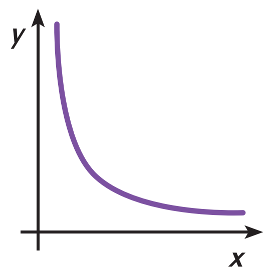
c)



d)



e)



Respuestas:

1 ⟶ d)

2 ⟶ c)

3 ⟶ b)

SECUENCIA 19. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE GRÁFICAS NO LINEALES

Respuestas:

Gráfica 1 → $y = 3x^2 + 2$

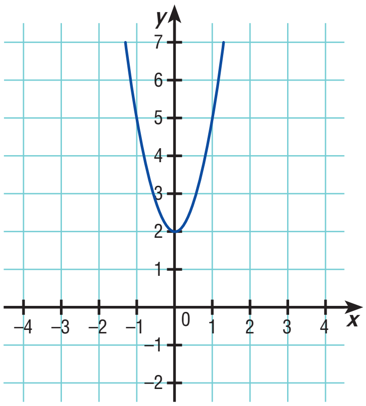
Gráfica 2 → $y = 2x^2 + 2$

Gráfica 3 → $y = \frac{x^2}{4} + 2$

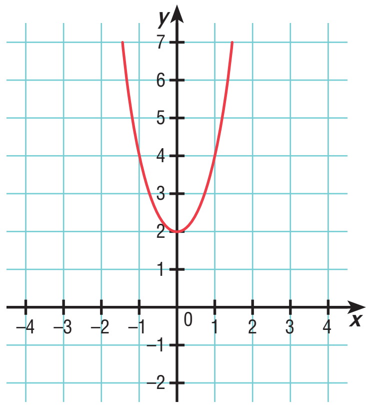
Reactivo 1

1. Las siguientes gráficas muestran los cambios en el parámetro a en la expresión $y = ax^2 + b$, pon bajo la gráfica la expresión que le corresponde a cada una de las gráficas.

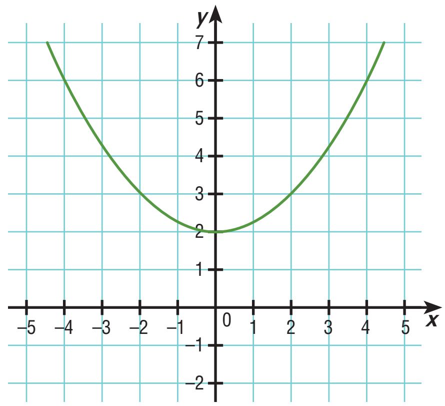
$y = 2x^2 + 2$



$y = \frac{x^2}{4} + 2$



$y = 3x^2 + 2$

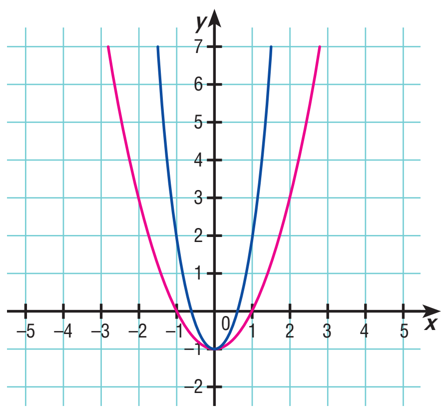


Respuestas:

a) Más abierta.

b) $y = x^2 - 1$

1'. En el siguiente plano cartesiano se encuentran las graficas de las expresiones: $y = x^2 - 1$; $y = 3x^2 - 1$



a) ¿La gráfica de la parábola $y = x^2 - 1$ estará más abierta o más cerrada que la parábola $y = 3x^2 - 1$? ________________

b) ¿A qué expresión corresponde la parábola rosa? ____________

Reactivo 2

2. Completa la siguiente tabla para encontrar los elementos de las parábolas.

Parábola	Ordenada al origen	Coeficiente del término de segundo grado	Para dónde abre la parábola (hacia arriba o hacia abajo)	Vértice
$y = -3x^2 - 1$				
$y = 3x^2 + 2$				
$y = \frac{x^2}{2} - 4$				
$y = -x^2 + \frac{1}{2}$				

2'. Completa la siguiente tabla para encontrar los elementos de las parábolas.

Parábola	Ordenada al origen	Coeficiente del término de segundo grado	Para dónde abre la parábola (hacia arriba o hacia abajo)	Vértice
$y = 3x^2 + 1$				
$y = -3x^2 - 2$				
$y = \frac{x^2}{4} + 4$				
$y = -x^2 + \frac{1}{3}$				

2. Respuestas:

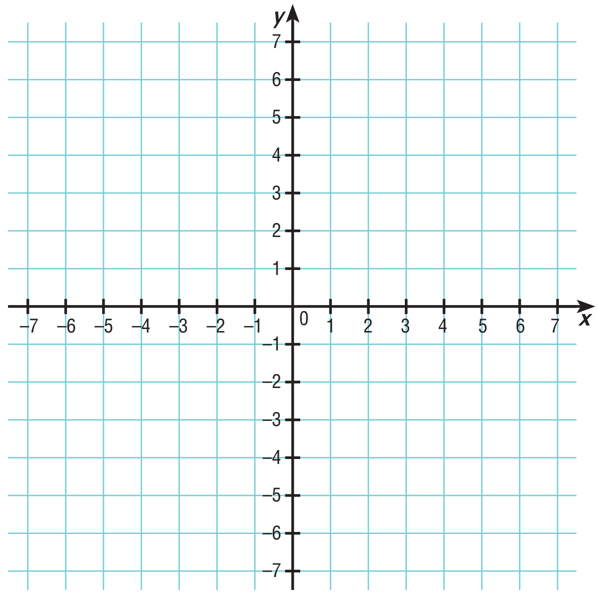
–1	–3	Hacia abajo	(0,–1)
2	3	Hacia arriba	(0,2)
–4	$\frac{1}{2}$	Hacia arriba	(0,–4)
$\frac{1}{2}$	–1	Hacia abajo	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

2'. Respuestas:

1	3	Hacia arriba	(0,1)
–2	–3	Hacia abajo	(0,–2)
4	$\frac{1}{4}$	Hacia arriba	(0,4)
$\frac{1}{3}$	–1	Hacia abajo	$\left(0,\frac{1}{3}\right)$

Reactivo 3

3. Haz la gráfica de la parábola $y = (x - 2)^2 + 1$ y responde lo que se pide.



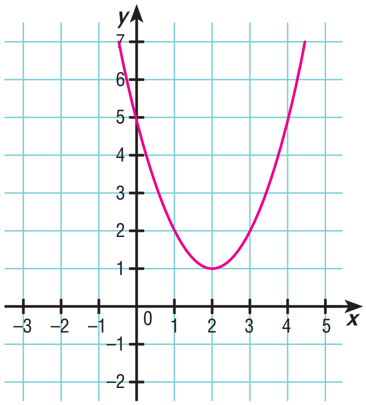
a) ¿Cuál es la ordenada al origen de la parábola? ______________

b) ¿Cuál es vértice de la parábola? ______________

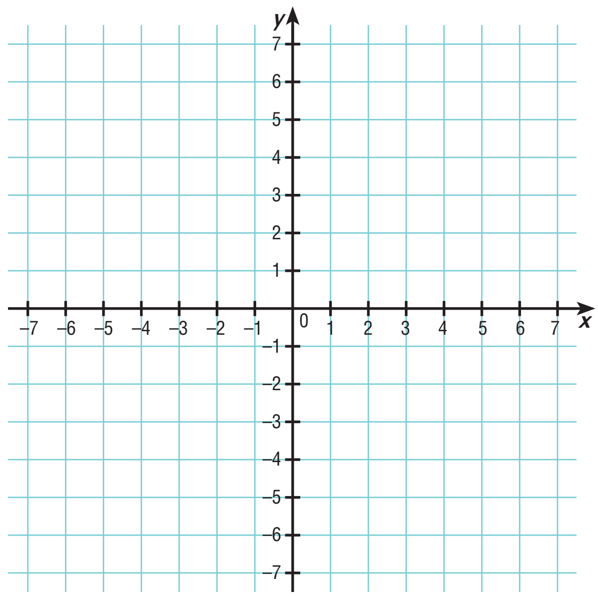
Respuestas:

a) 5

b) (2,1)



3'. Haz la gráfica de la parábola $y = (x - 2)^2$ y responde lo que se pide.



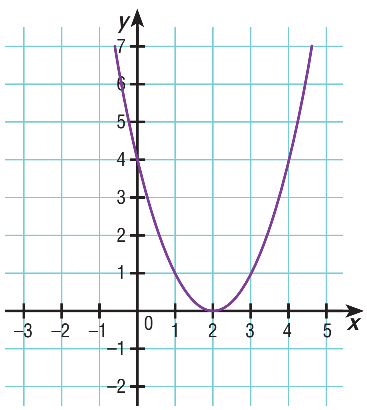
a) ¿Cuál es la ordenada al origen de la parábola? ______________

b) ¿Cuál es vértice de la parábola? ______________

Respuestas:

a) 4

b) (2,0)



Reactivo 4

4. Pon a cada una de las gráficas el inciso que le corresponda.

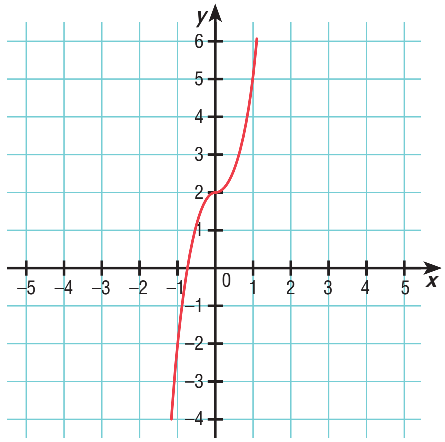
a) $y = 3x + 2$

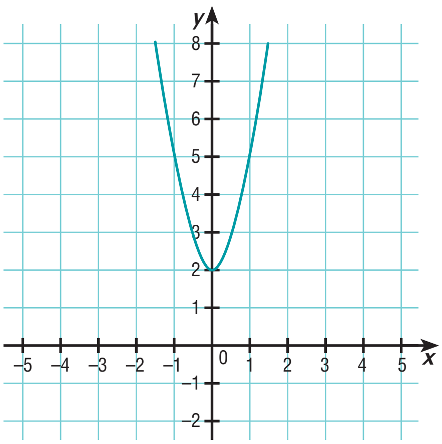
b) $y = 3x^3 + 2$

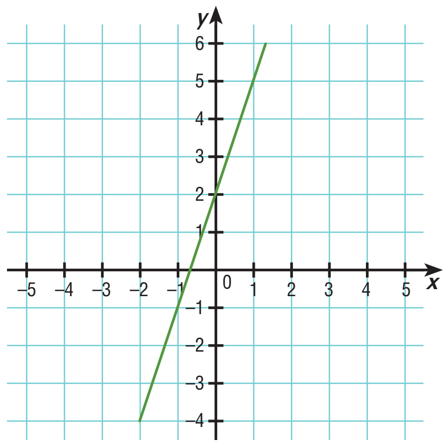
c) $y = 3x^2 + 2$

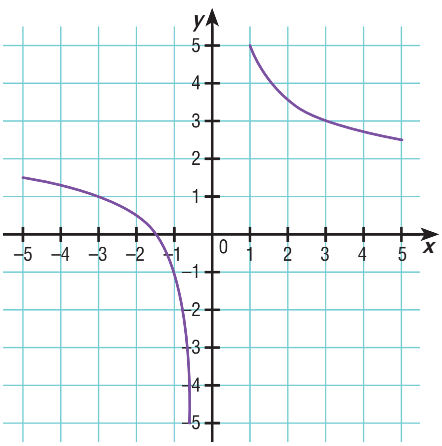
d) $y = \frac{3}{x} + 2$

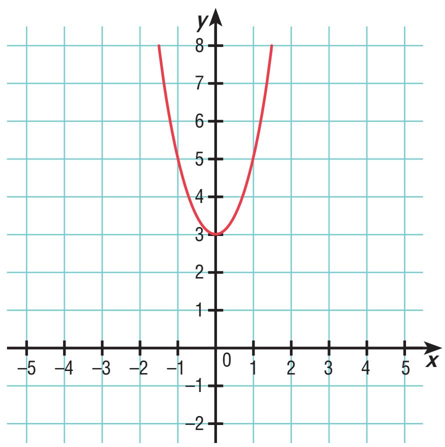
e) $y = 2x^2 + 3$











Respuestas:

Gráfica 1 → b)

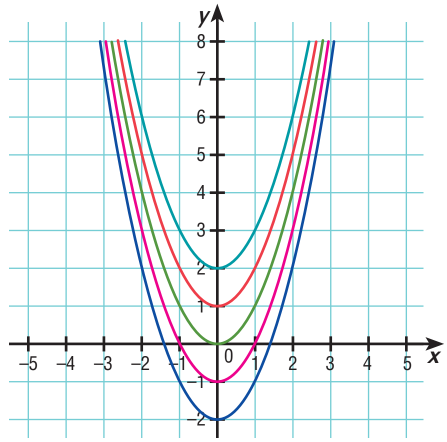
Gráfica 2 → c)

Gráfica 3 → a)

Gráfica 4 → d)

Gráfica 5 → e)

4'. Determina poniendo ✓ o ✗ si la familia de expresiones corresponde o no a la gráfica.



☐

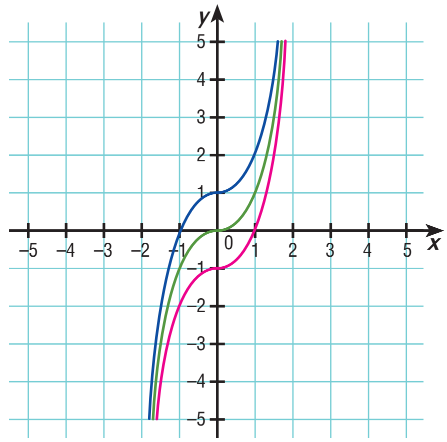
$y = x^2 - 2$

$y = x^2 - 1$

$y = x^2$

$y = x^2 + 1$

$y = x^2 + 2$

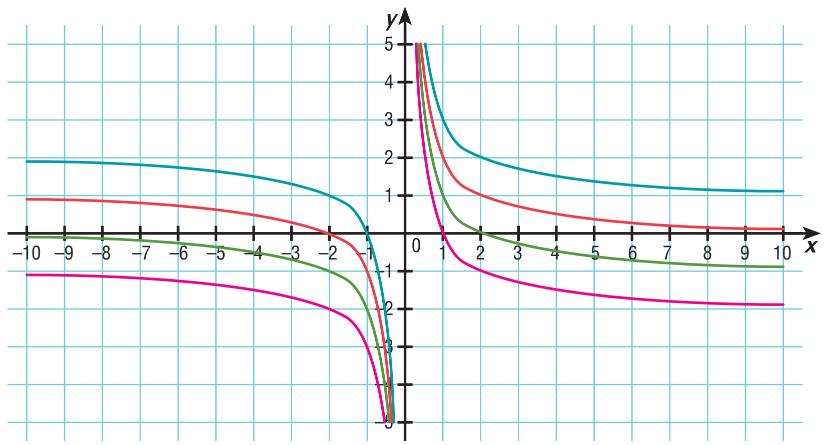


☐

$y = -x^3$

$y = 0x^3$

$y = x^3$



☐

$y = \frac{2}{x} - 2$

$y = \frac{2}{x} - 1$

$y = \frac{2}{x}$

$y = \frac{2}{x} + 2$

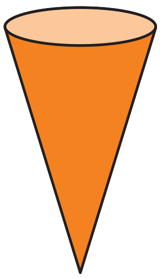
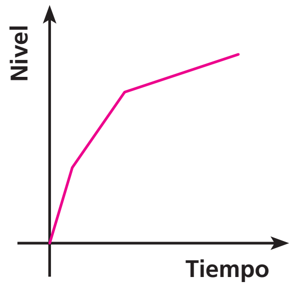
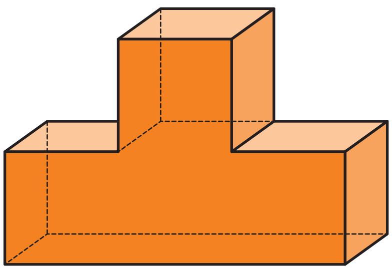
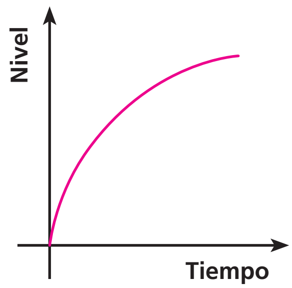
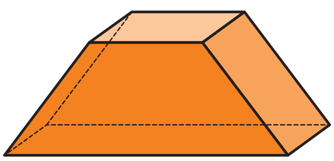
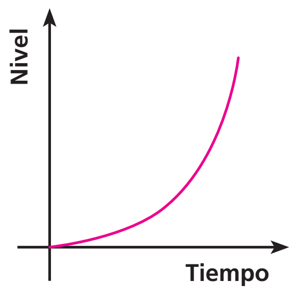
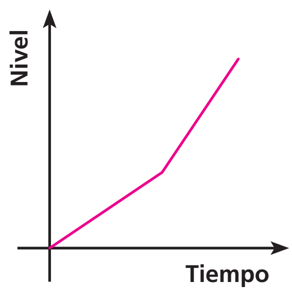
Respuestas:

Las que sí corresponden son la primera y la tercera.

SECUENCIA 20. GRÁFICAS POR PEDAZOS

Reactivo 1

1. Relaciona el llenado de cada recipiente con una de las gráficas.

Recipiente	Gráfica
a) 	☐ 
b) 	☐ 
c) 	☐ 
	☐ 

Respuestas:

Recipiente b) ⟶ Gráfica 4

Recipiente a) ⟶ Gráfica 2

Recipiente c) ⟶ Gráfica 3

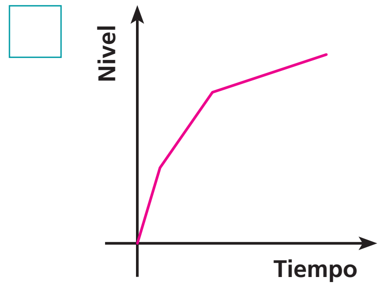
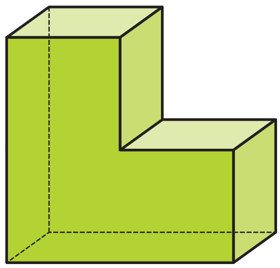
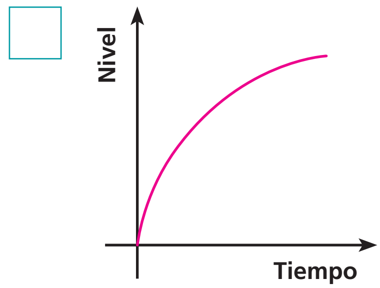
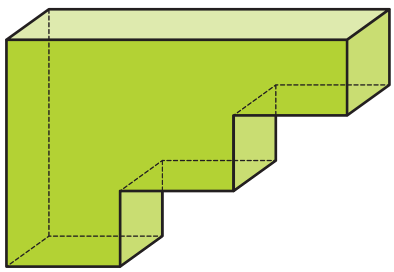
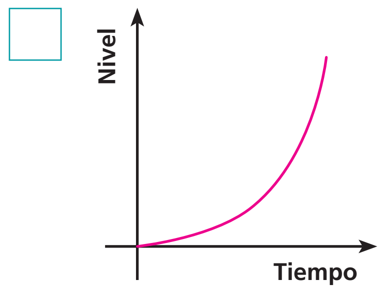
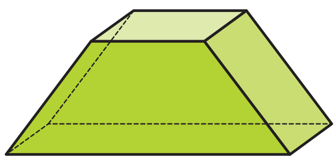
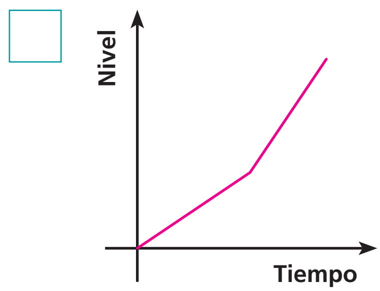
Respuestas:

Recipiente a) ⟶ Gráfica 4

Recipiente b) ⟶ Gráfica 1

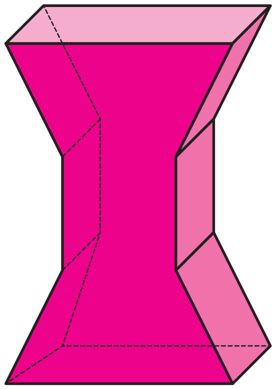
Recipiente c) ⟶ Gráfica 3

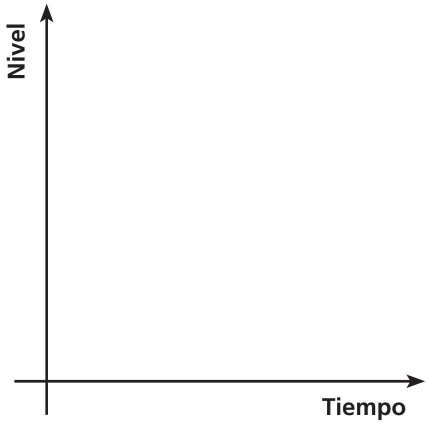
1´. Relaciona el llenado de cada recipiente con una de las gráficas.

Recipiente	Gráfica
	
a) 	
b) 	
c) 	

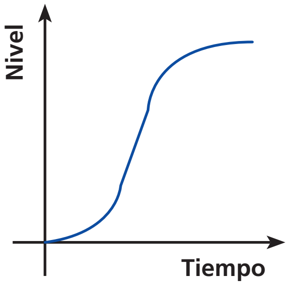
Reactivo 2

2. Realiza un bosquejo de la gráfica que corresponde al llenado del siguiente recipiente, suponiendo que el agua cae de manera constante.

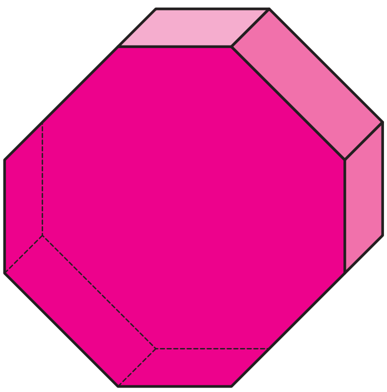


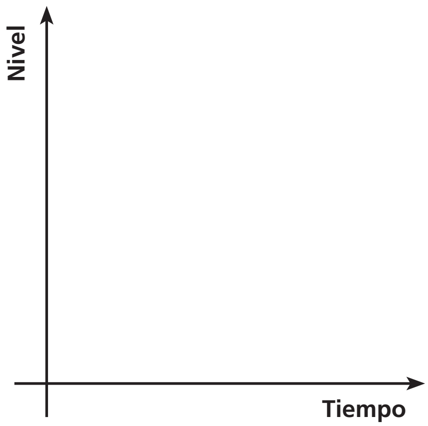


Respuesta: los alumnos deben dibujar una gráfica similar a esta:

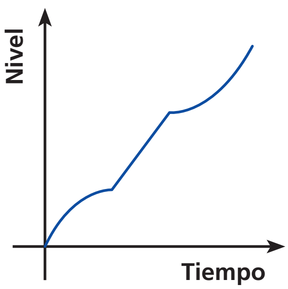


2´. Realiza un bosquejo de la gráfica que corresponde al llenado del siguiente recipiente, suponiendo que el agua cae de manera constante.





Respuesta: los alumnos deben dibujar una gráfica similar a esta:



PROPUESTA DE EXAMEN BIMESTRAL BLOQUE 4

SECUENCIA 21. DIFERENCIAS EN SUCESIONES

Reactivo 1

Respuesta: b)

1. Subraya la expresión cuadrática que permite encontrar el número de puntos de la figura que ocupa el lugar n de la siguiente sucesión de figuras.

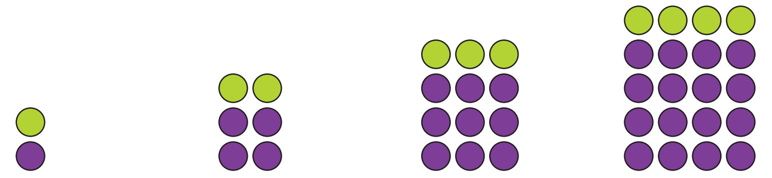


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

a) $n^2 + 1$

b) $n^2 + n$

c) $2n^2$

d) $n(n^2 + 1)$

Respuesta: d)

1'. Subraya la expresión cuadrática que permite encontrar el número de puntos de la figura que ocupa el lugar n de la siguiente sucesión de figuras.

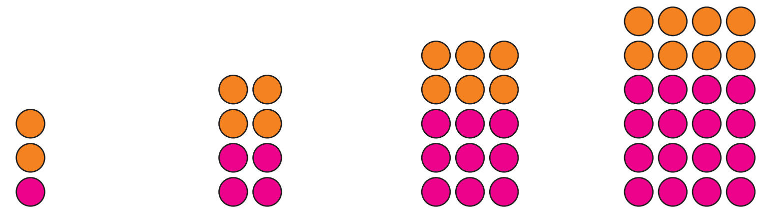


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

a) $n^2 + 2$

b) $n^2 + n + 1$

c) $2n^2$

d) $n(n + 2)$

Reactivo 2

2. Subraya las sucesiones a las que les corresponde una expresión general cuadrática para su enésimo término.

A. 1, 3, 5, 7, 9, ...

B. 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

C. 1, 2, 4, 7, 11, ...

D. 5, 7, 11, 17, 25, ...

Respuestas: C y D.

2'. Subraya las sucesiones a las que les corresponde una expresión general cuadrática para su enésimo término.

A. 1, 4, 8, 13, 19, ...

B. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

C. 3, 4, 6, 9, 13, ...

D. 1, 8, 27, 64, 125, ...

Respuestas: A y C.

Reactivo 3

3. Relaciona las columnas de manera que a cada sucesión le corresponda la expresión general de su término enésimo.

Sucesión	Expresión general
( ) 2, 4, 6, 8, 10, 12,...	A. $1.5n^2 - 0.5n$
( ) 2, 16, 54, 128, 250,...	B. $n^2 - n + 2$
( ) 2, 4, 8, 14, 22, 32,...	C. $2n$
( ) 1, 5, 12, 22, 35, 51,...	D. $2n^3$

Respuestas:

(C) 2, 4, 6, 8, 10, 12,...

(D) 2, 16, 54, 128, 250,...

(B) 2, 4, 8, 14, 22, 32,...

(A) 1, 5, 12, 22, 35, 51,...

3'. Relaciona las columnas de manera que a cada sucesión le corresponda la expresión general de su término enésimo.

Sucesión	Expresión general
( ) 6, 13, 32, 69, 130,...	A. $2n^2 - 3n + 5$
( ) 4, 7, 14, 25, 39,...	B. $n^2 - 2n + 3$
( ) 3, 4, 5, 6, 7, 8,...	C. $n + 2$
( ) 2, 3, 6, 11, 18,...	D. $n^3 + 5$

Respuestas:

(D) 6, 13, 32, 69, 130,...

(A) 4, 7, 14, 25, 39,...

(C) 3, 4, 5, 6, 7, 8,...

(B) 2, 3, 6, 11, 18,...

Respuestas:

La expresión general del término enésimo es: $2n^2 - 3n + 1$

E_1: $2a = 4 \longrightarrow a = 2$

E_2: $3a + b = 3 \longrightarrow b = -3$

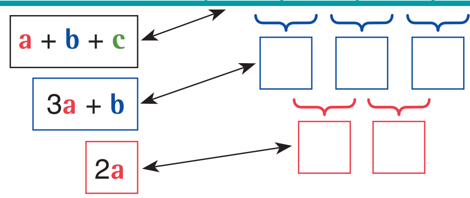
E_3: $a + b + c = 0 \longrightarrow c = 1$

El término que ocupa el lugar 100 es 19 701.

Reactivo 4

4. Usa el método de diferencias para encontrar la expresión general del término enésimo de la sucesión 0, 3, 10, 21,...

Lugar del término	1	2	3	4	N
Término	0	3	10	21	



E_1: $2a =$ ________ $\longrightarrow a =$ ________

E_2: $3a + b =$ ________ $\longrightarrow b =$ ________

E_3: $a + b + c =$ ________ $\longrightarrow c =$ ________

¿Qué término ocupa el lugar 100 en la sucesión 0, 3, 10, 21,...? ________

Respuestas:

La expresión general del término enésimo es: $2n^2 - n + 3$

E_1: $2a = 4 \longrightarrow a = 2$

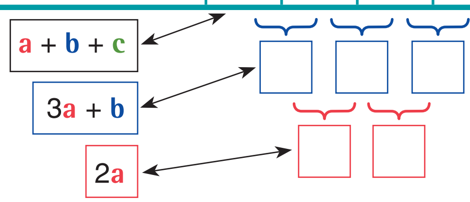
E_2: $3a + b = 5 \longrightarrow b = -1$

E_3: $a + b + c = 4 \longrightarrow c = 3$

El término que ocupa el lugar 100 es 19 903.

4'. Usa el método de diferencias para encontrar la expresión general del término enésimo de la sucesión 4, 9, 18, 31,...

Lugar del término	1	2	3	4	N
Término	4	9	18	31	



E_1: $2a =$ ________ $\longrightarrow a =$ ________

E_2: $3a + b =$ ________ $\longrightarrow b =$ ________

E_3: $a + b + c =$ ________ $\longrightarrow c =$ ________

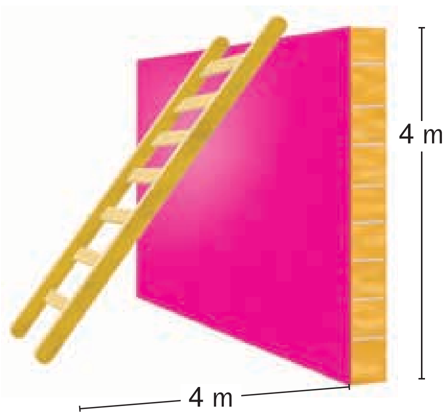
¿Qué término ocupa el lugar 100 en la sucesión 4, 9, 18, 31,...? ________

SECUENCIA 22. TEOREMA DE PITÁGORAS

Reactivo 1

1. Una escalera está recargada sobre una pared de 4 m de altura y el pie de la escalera está a 4 m de la barda.

a) ¿Cuánto mide la parte de la escalera que va del piso al borde de la barda?



b) Si la escalera mide 5 m de longitud, ¿cuál es la distancia máxima a la que puede quedar el pie de la escalera con respecto a la barda?

Respuestas:

a) $x^2 = 4^2 + 4^2$

$x = \sqrt{4^2 + 4^2}$

$x = \sqrt{16 + 16}$

$x = \sqrt{32}$

b) $x^2 + 4^2 = 5^2$

$x^2 = 5^2 - 4^2$

$x = \sqrt{5^2 - 4^2}$

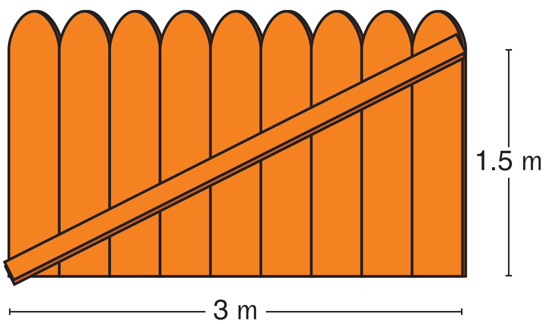
$x = \sqrt{25 - 16}$

$x = \sqrt{9}$

$x = 3$

1´. A una cerca de madera se le necesita colocar un travesaño para reforzarla (como se observa en las imágenes).

a) ¿Cuál es la longitud que debe tener el travesaño, si la cerca tiene 3 m de largo y 1.5 m de alto?



b) Otra cerca mide 1.5 m de altura y la longitud del travesaño es de 2.5 m, ¿cuánto mide de largo la cerca?

Respuestas:

a) $x^2 = 3^2 + 1.5^2$

$x = \sqrt{3^2 + 1.5^2}$

$x = \sqrt{9 + 2.25}$

$x = \sqrt{11.25}$

b) $1.52 + x^2 = 2.5$

$2.25 + x^2 = 6.25$

$x^2 = 6.25 - 2.25$

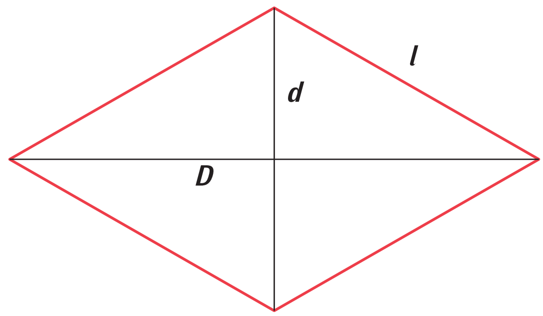
$x = \sqrt{6.25 - 2.25}$

$x = \sqrt{4}$

$x = 2$

Reactivo 2

2. ¿Cuál es el perímetro del rombo si su diagonal mayor (***D***) mide 8 cm y su diagonal menor (***d***) mide 5 cm?



Respuesta:

$l^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$

$l^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

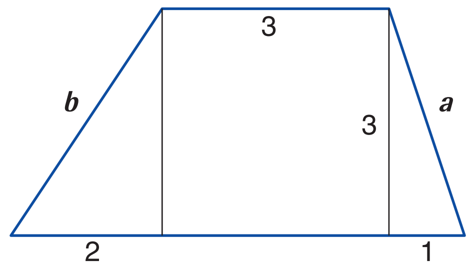
$l^2 = 4^2 + 2.5^2$

$l^2 = 16 + 6.25$

$l = \sqrt{22.25}$

El perímetro del rombo es $4l$.

2'. ¿Cuál es el perímetro del trapecio?



Respuesta:

$a^2 = 3^2 + 1^2$

$a^2 = \sqrt{9 + 1}$

$a = \sqrt{10} \approx 3.16$

$b^2 = \sqrt{3^2 + 2^2}$

$b^2 = \sqrt{9 + 4}$

$b = \sqrt{13} \approx 3.605$

$P = a + b + 6 + 4$

$P \approx 3.16 + 3.605 + 6 + 3$

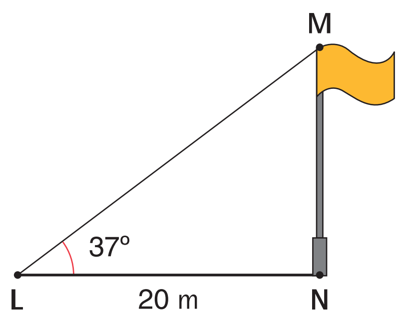
$P \approx 15.765$

SECUENCIA 23. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Resuelve los siguientes problemas usando la tabla de razones trigonométricas o tu calculadora.

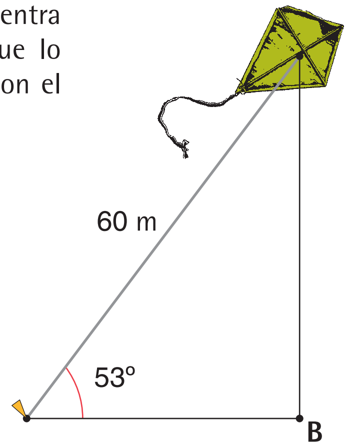
Reactivo 1

1. Calcula la altura del asta bandera si a cierta hora del día el ángulo que forma el extremo de su sombra con la punta del asta mide 37°, y la distancia que hay del asta bandera al extremo de su sombra es de 20 m, como se muestra en el dibujo.



Respuesta: la altura del asta bandera es de 15.07 m.

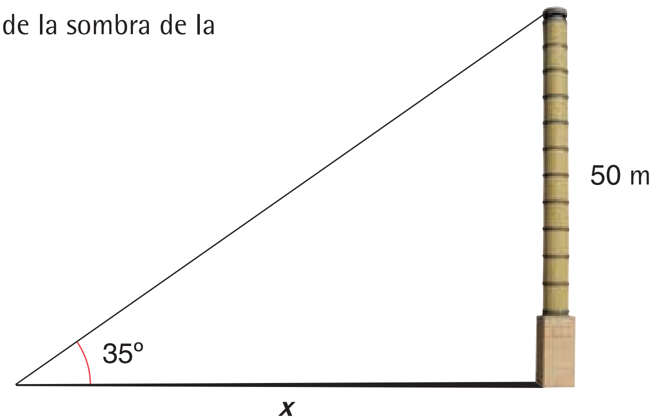
1'. ¿A qué altura del piso se encuentra el papalote, cuando el hilo que lo sostiene mide 60 m y forma con el piso un ángulo de 53°?



Respuesta: el papalote se encuentra a 47.91 m de altura.

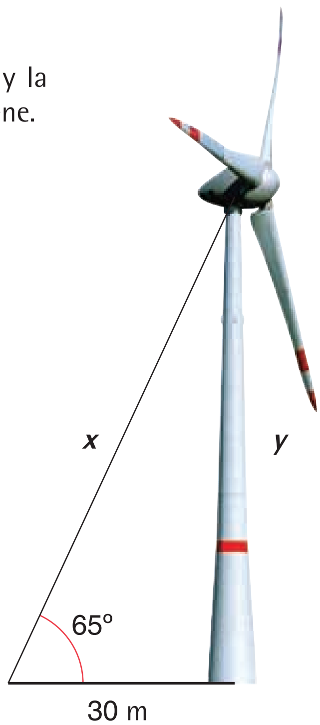
Reactivo 2

2. Calcula cuánto mide la sombra de la columna.



Respuesta: la sombra mide 71.4 m.

2'. Encuentra la altura de la torre y la longitud del tirante que la sostiene.



Respuestas:

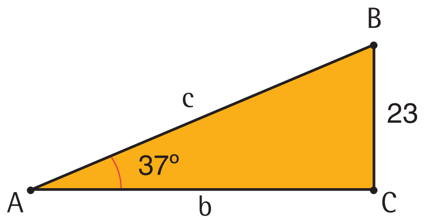
Altura de la torre: 64.33 m

Longitud del tirante: 70.98 m

Reactivo 3

Respuestas:
b = 38.21
c = 30.52
∠B = 53°

3. Encuentra los lados y los ángulos que faltan.



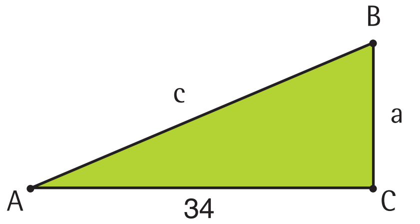
b = ______

c = ______

∠B = ______

Respuestas:
a = 38.5
c = 18.07
∠A = 28°

3´. Encuentra los lados y los ángulos que faltan.



a = ______

c = ______

∠A = ______

SECUENCIA 24. LA EXPONENCIAL Y LA LINEAL

Reactivo 1

Respuesta: a)

1. ¿Cuál de las siguientes sucesiones crece exponencialmente?

a) 5, 15, 45, 135...

b) 2, 6, 9, 12...

c) 3, 12, 27, 48...

d) 5, 10, 15, 20...

Respuesta: b)

1'. ¿Cuál de las siguientes sucesiones crece exponencialmente?

a) 5, 8, 11, 14...

b) 2, 6, 18, 54...

c) 3, 12, 27, 48...

d) 2, 6, 10, 14...

Reactivo 2

2. Se sabe que una población de conejos aumenta el 10% cada año. Si actualmente hay 1 000 conejos en esa población, ¿cuántos conejos habrá dentro de 3 años? ______________

Respuesta: 1 331

2'. Se sabe que una población de conejos aumenta el 5% cada año. Si actualmente hay 2 000 conejos en esa población, ¿cuántos conejos habrá dentro de 3 años? ______________

Respuesta: 2 662

Reactivo 3

3. Juan planea invertir $10 000 pesos por 3 años. El banco ha ofrecido pagarle el 10% de intereses cada año y una empresa le ha ofrecido pagar 1 100 pesos cada año. ¿Con cuál de las dos ofertas ganará más dinero?

____

____

Respuesta: Con la del banco, pues ganaría $3 310, mientras que con la de la empresa serían $3 300.

3'. María planea invertir $10 000 pesos por 3 años. El banco ha ofrecido pagarle el 20% de intereses cada año y una empresa le ha ofrecido pagar 2 500 pesos cada año. ¿Con cuál de las dos ofertas ganará más dinero?

____

____

Respuesta: Con la de la empresa, pues ganaría $7 500, mientras que con el banco serían $7 280.

SECUENCIA 25. REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Para la evaluación de la secuencia 25 no se proponen reactivos en el examen, debido a que los temas matemáticos que se abordan en ella no son susceptibles de valorarse con el tipo de preguntas de opción múltiple que sugerimos normalmente. Para evaluar esta secuencia utilice las actividades que se integran al portafolio.

PROPUESTA DE EXAMEN BIMESTRAL BLOQUE 5

SECUENCIA 26. ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Reactivo 1

1. El rendimiento de un automóvil es de 8 km por litro de gasolina en la ciudad y de 12 km por litro en autopista. Si recorrió en total 472 km y consumió 42 litros de gasolina, ¿cuántos kilómetros se recorrieron en la ciudad y cuántos en autopista?

1'. El rendimiento de un automóvil es de 8 km por litro de gasolina en la ciudad y de 12 km por litro en autopista. Si recorrió en total 399 km y consumió 36 litros de gasolina, ¿cuántos kilómetros se recorrieron en la ciudad y cuántos en autopista?

1. Respuesta: Si x es el número de litros de gasolina empleados en el recorrido en la ciudad, y y el número de litros de gasolina empleados en el recorrido en la autopista, el sistema de ecuaciones que modela la situación es el siguiente:

$8x + 12y = 472$

$x + y = 42$

Al resolverlo, se tiene que en la ciudad se recorrieron 64 kilómetros y en la autopista 408.

1'. Respuesta: Si x es el número de litros de gasolina empleados en el recorrido en la ciudad, y y el número de litros de gasolina empleados en el recorrido en la autopista, el sistema de ecuaciones que modela la situación es el siguiente:

$8x + 12y = 399$

$x + y = 36$

Al resolverlo, se tiene que en la ciudad se recorrieron 66 kilómetros y en la autopista 333.

Reactivo 2

2. El otro día mi abuelo de 70 años de edad nos quería repartir cierta cantidad de dinero a nosotros sus nietos. Si nos daba 300 pesos a cada uno le sobraban 600 pesos, pero si nos daba 500 pesos a cada uno le faltaban 1 000 pesos.

a) ¿Cuántos nietos tiene? ____________________

b) ¿Qué cantidad de dinero quería repartir? ____________________

2'. Un hotel tiene habitaciones dobles (dos camas) y simples (una cama). El dueño le pidió al gerente que ponga un descuento en 65 habitaciones y que en ese número de habitaciones haya un total de 105 camas.

¿Cuántas habitaciones sencillas deben tener descuento? ____________

¿Cuántas habitaciones dobles deben tener descuento ? ____________

2. Respuesta:

Si x es el número de nietos y y la cantidad de dinero a repartir, el sistema de ecuaciones que modela la situación es el siguiente:

$y - 300x = 600$

$y - 500x = -1\ 000$

Al resolverlo, se tiene que hay 8 nietos y que el abuelo quería repartir \$3 000.

2'. Respuesta:

Si x es el número de habitaciones sencillas y y el de habitaciones dobles, el sistema de ecuaciones que modela la situación es el siguiente:

$x + y = 65$

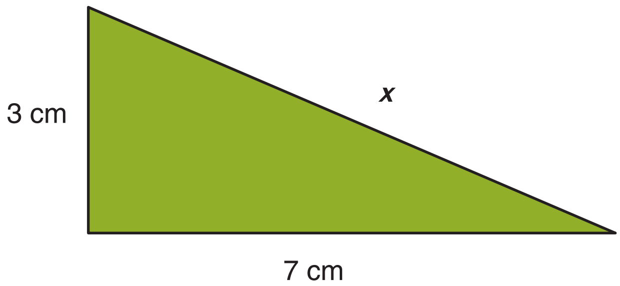
$x + 2y = 105$

Al resolverlo se tiene que deben tener descuento 25 habitaciones sencillas y 40 dobles.

Reactivo 3

3. Plantea la ecuación de segundo grado y resuélvela para encontrar la medida que falta en el siguiente triángulo rectángulo.

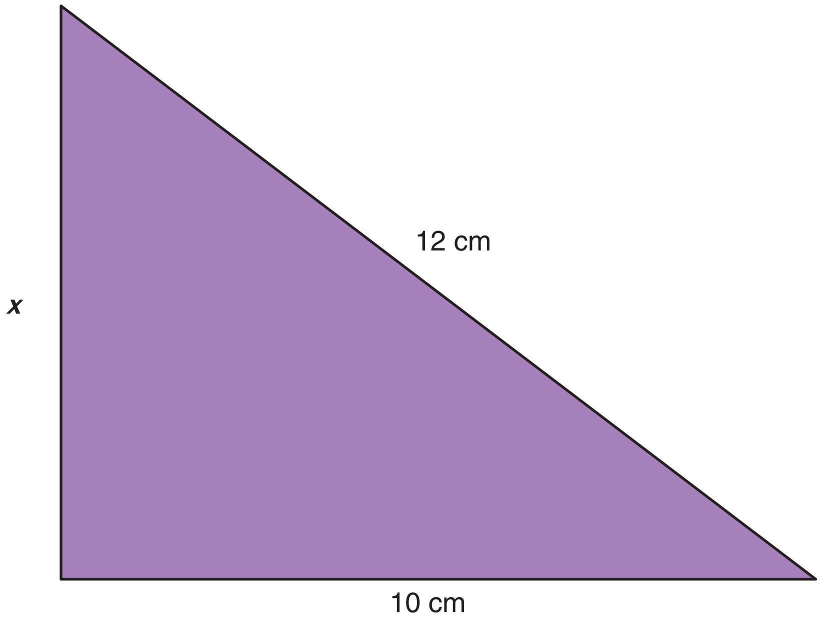
Respuesta: 7.61 cm



Hipotenusa: ____________________

3'. Plantea la ecuación de segundo grado y resuélvela para encontrar la medida que falta en el siguiente triángulo rectángulo.

Respuesta: 6.63 cm



Cateto: ____________________

SECUENCIA 27. CONOS Y CILINDROS

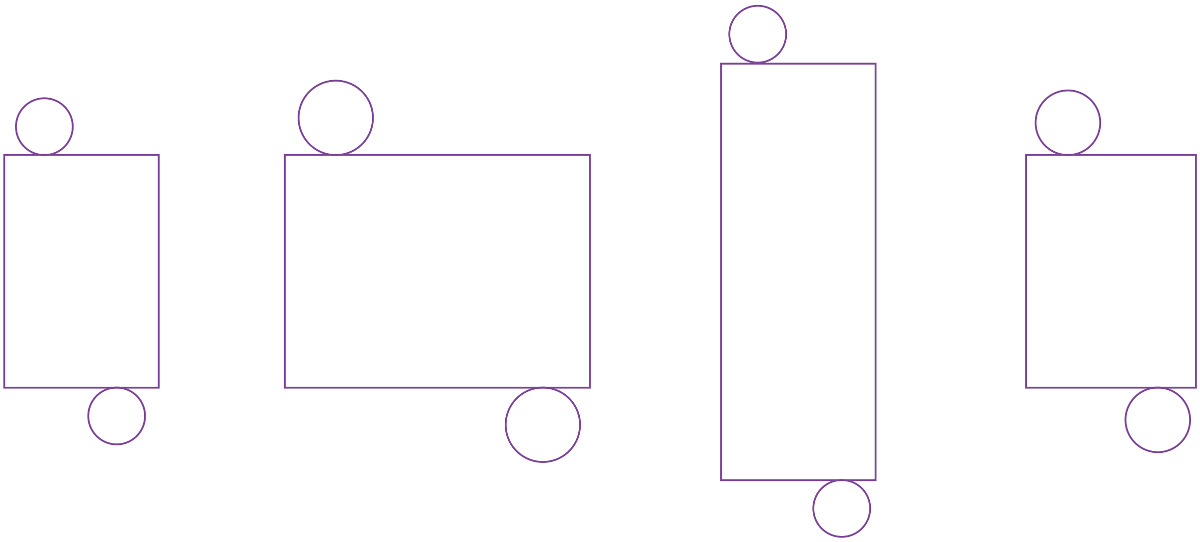
SECUENCIA 28. VOLUMEN DEL CONO Y DEL CILINDRO

SECUENCIA 29. ESTIMAR VOLÚMENES

Los siguientes reactivos se proponen para evaluar los contenidos de estas tres secuencias.

Reactivo 1

1. Un rectángulo que mide 2 cm de base y 3 cm de altura, se gira tomando como eje uno de sus lados mayores. ¿Cuál de los siguientes desarrollo planos corresponde al cuerpo que se genera?



a) b) c) d)

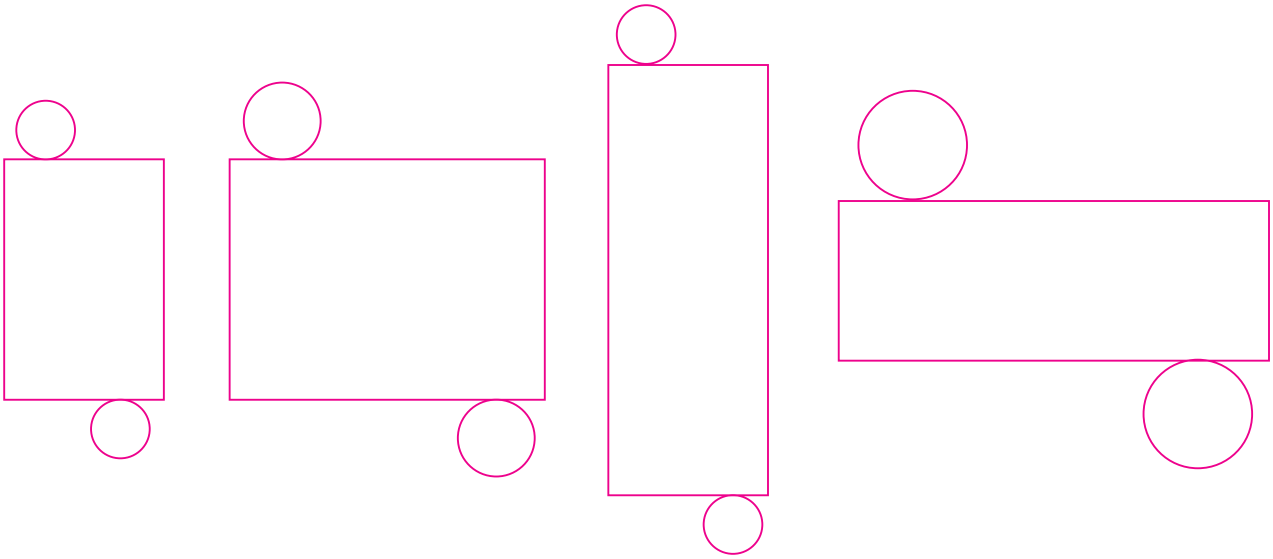
¿Cuál es el volumen de este cuerpo geométrico? ____________

1. Respuestas:

Al girar el rectángulo se genera un cono con altura de 3 cm y el radio de su base es de 2 cm. Por lo que en el desarrollo plano la cara lateral es un rectángulo de altura de 3 cm y base de 12.56 cm. La respuesta es el inciso b) ya que es el único en el que la base es mayor que la altura.

El volumen es de 37.699 cm^3.

1'. Un rectángulo que mide 2 cm de base y 3 cm de altura, se gira tomando como eje uno de sus lados menores. ¿Cuál de los siguientes desarrollos planos corresponde al cuerpo que se genera?



a) b) c) d)

¿Cuál es el volumen de este cuerpo geométrico? ____________

1'. Respuestas:

Al girar el rectángulo se genera un cono con altura de 2 cm y el radio de su base es de 3 cm. Por lo que en el desarrollo plano la cara lateral es un rectángulo de altura de 2 cm y base de 18.84 cm. La respuesta es el inciso d) ya que la base es más de 9 veces la altura.

El volumen es de 56.548 cm^3.

Reactivo 2

2. Un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm y 3 cm, se gira tomando como eje el cateto mayor.

a) ¿Qué cuerpo geométrico se genera? ____________

b) ¿Cuál es el volumen de ese cuerpo geométrico? ____________

2'. Un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm y 3 cm, se gira tomando como eje el cateto menor.

a) ¿Qué cuerpo geométrico se genera? ____________

b) ¿Cuál es el volumen de ese cuerpo geométrico? ____________

2. Respuestas:

a) Se genera un cono.

b) El volumen es de 12.56 cm^3.

2'. Respuestas:

a) Se genera un cono.

b) El volumen es de 18.849 cm^3.

3. Respuesta:

El desarrollo plano de la cara lateral del cono corresponde a un sector circular de una circunferencia con radio de 8 cm y un ángulo de 90°. Sobre el arco del sector circular va una circunferencia de 2 cm de radio que corresponde a la base.

3'. Respuesta:

El desarrollo plano de la cara lateral del cono corresponde a un sector circular de una circunferencia con radio de 10 cm y un ángulo de 72°. Sobre el arco del sector circular va una circunferencia de 2 cm de radio que corresponde a la base.

4. Respuesta:

La copa tiene un volumen de 120π cm^3. Lo que le sirvieron corresponde a un cono que mide 3 cm de radio en la base y 5 cm de altura, con un volumen de 15π cm^3, que no es la mitad de lo que le cabe a la copa.

Reactivo 3

3. Traza el desarrollo plano para armar un cono de 2 cm en el radio de la base y 8 cm de altura.

3'. Traza el desarrollo plano para armar un cono de 2 cm en el radio de la base y 10 cm de altura.

Reactivo 4

4. Una copa en forma de cono mide 6 cm de radio en la base del cono y 10 cm de altura.

Carlos pide que le sirvan sólo la mitad de lo que le cabe a la copa. La persona que sirve pone líquido hasta la mitad de la altura. Carlos se molesta porque le sirvieron menos líquido del que había pedido.

a) ¿Cómo supo Carlos que le sirvieron menos? ______________________

____

b) ¿Cuánto líquido le dieron de menos? ______________________

____

____

4'. Una copa en forma de cono mide 6 cm de radio en la base del cono y 12 cm de altura.

Daniel pide que le sirvan sólo la mitad de lo que le cabe a la copa. La persona que sirve pone líquido hasta la mitad de la altura. Daniel se molesta porque le sirvieron menos líquido del que había pedido.

a) ¿Cómo supo Daniel que le sirvieron menos? ______________________

____

b) ¿Cuánto líquido le dieron de menos? ______________________

____

____

Respuesta:

La copa tiene un volumen de 144π cm^3. Lo que le sirvieron corresponde a un cono que mide 3 cm de radio en la base y 6 cm de altura, con un volumen de 18π cm^3, que no es la mitad de lo que le cabe a la copa.

Reactivo 5

5. Un vaso en forma de cilindro mide 6 cm de diámetro y 12 cm de altura. Al vaso le cabe...

a) menos de un cuarto de litro de leche.

b) más de un cuarto de litro de leche.

c) exactamente un cuarto de litro de leche.

d) más de medio litro de leche.

Respuesta: El vaso tiene un volumen de 108π cm^3. Si se multiplica por 3.1 se aproxima al valor de 335 cm^3, lo que corresponde a 335 ml. La respuesta es el inciso b).

5'. Una jarra en forma de cilindro mide 12 cm de diámetro y 20 cm de altura. A la jarra le caben ...

a) más de 2 litros de agua.

b) menos de 2 litros de agua.

c) exactamente 2 litros de agua.

d) más de 3 litros de agua.

Respuesta: La jarra tiene un volumen de 720π cm^3. Si se multiplica por 3.1 se aproxima al valor de 2 200 cm^3, lo que corresponde a 2.2 litros. La respuesta es el inciso a).

Reactivo 6

Respuesta: c)

6. Se tiene un cilindro y un cono cuyas bases son idénticas y tienen el mismo volumen. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Ambos tienen la misma altura.

b) El cilindro tiene el triple de altura que el cono.

c) El cono tiene el triple de altura que el cilindro.

d) El cono tiene el doble de altura que el cilindro.

Respuesta: c)

6'. Se tiene un cilindro y un cono cuyas bases son idénticas y el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ?

a) La altura del cono es la tercera parte de la altura del cilindro.

b) La altura del cilindro es la tercera parte de la altura del cono.

c) La altura del cono mide lo mismo que la altura del cilindro.

d) La altura del cilindro es el triple de la altura del cono.

Reactivo 7

Respuesta: d)

7. Se quiere construir un cono para agua al que le quepan 200 mililitros. Si se quiere que la base del cono sea de 8 cm de diámetro, ¿cuál de las siguientes expresiones permite calcular la altura?

a) $\boldsymbol{h} = \dfrac{200}{3(8^2\,\pi)}$ b) $\boldsymbol{h} = \dfrac{200}{3(4^2\,\pi)}$ c) $\boldsymbol{h} = \dfrac{3(200)}{8^2\,\pi}$ d) $\boldsymbol{h} = \dfrac{3(200)}{4^2\,\pi}$

Respuesta: c)

7'. Se quiere construir un cono para agua al que le quepan 250 mililitros. Si se quiere que la base del cono sea de 10 cm de diámetro, ¿cuál de las siguientes expresiones permite calcular la altura?

a) $\boldsymbol{h} = \dfrac{250}{3(5^2\,\pi)}$ b) $\boldsymbol{h} = \dfrac{250}{3(10^2\,\pi)}$ c) $\boldsymbol{h} = \dfrac{3(250)}{5^2\pi}$ d) $\boldsymbol{h} = \dfrac{3(250)}{10^2\,\pi}$

SECUENCIA 30. GRÁFICA CAJABRAZOS

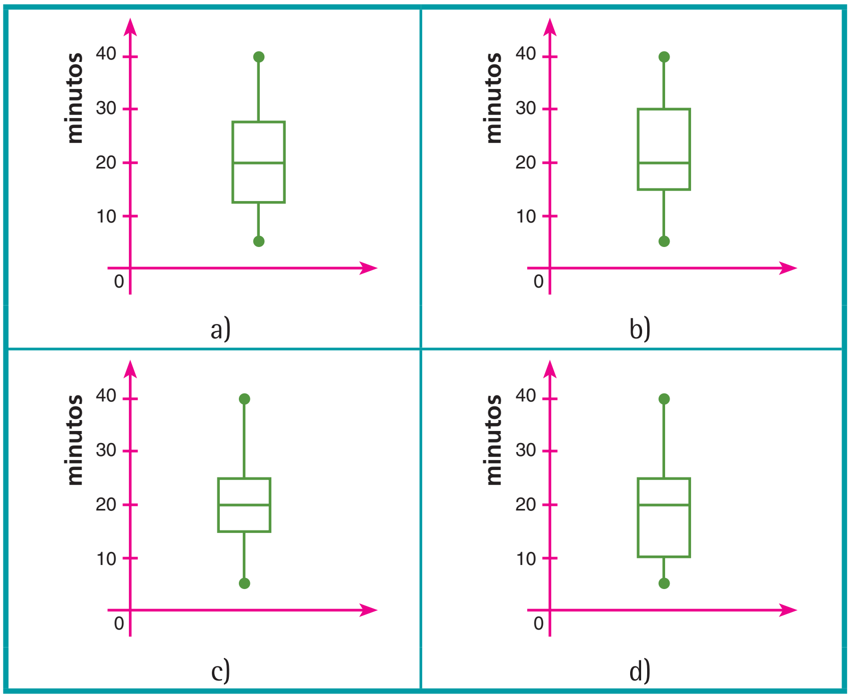
Reactivo 1

1. A los 20 alumnos de un grupo se les preguntó acerca del tiempo que requieren para desplazarse de su casa a la escuela. Los tiempos en minutos fueron:

Respuesta: a)

20, 20, 15, 5, 30, 15, 25, 10, 20, 5, 40, 35, 30, 30, 20, 10, 10, 25, 15, 25

¿Cuál de las siguientes gráficas cajabrazos representa este conjunto de datos?

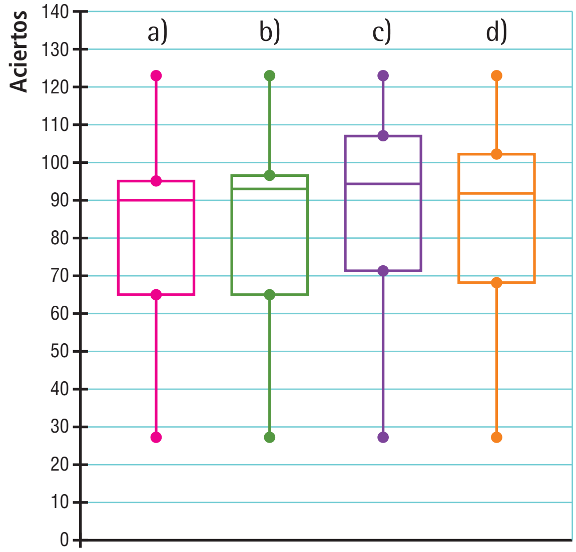


Respuesta: d)

1'. El número de aciertos que un grupo de alumnos obtuvo en la prueba de ingreso a preparatoria fue el siguiente:

75, 97, 71, 65, 84, 27, 108, 91, 122, 82, 96, 58, 94, 43, 116, 123, 91, 120, 94, 43

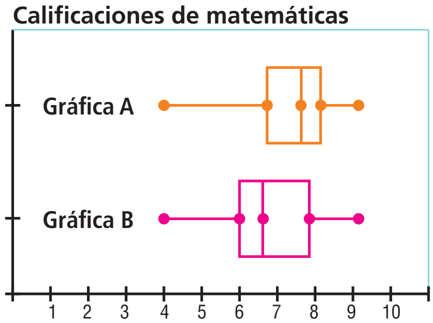
¿Cuál de las siguientes gráficas cajabrazos representa este conjunto de datos?



Reactivo 2

Respuesta: b)

2. Sabemos que el 25% de los alumnos de un grupo obtuvo una calificación menor a 7 en el examen de matemáticas. ¿Cuál de las siguientes opciones representa los resultados del grupo?



a) Gráfica A

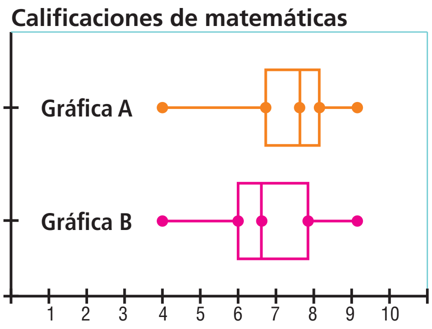
b) Gráfica B

c) Cualquiera de las dos gráficas

d) Ninguna de las dos gráficas

2'. Sabemos que el 75% de los alumnos de un grupo obtuvo una calificación menor a 8 en el examen de matemáticas. ¿Cuál de las siguientes opciones representa los resultados del grupo?

Respuesta: a)



a) Gráfica B

b) Gráfica A

c) Cualquiera de las dos gráficas

d) Ninguna de las dos gráficas

Bibliografía

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, 23 agosto 2003 [recuperado el 3 de abril de 2008 de http://www.inegi.gob.mx].

SEP. *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria.* México, 2000.

- *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria.* México, 2000.

- 24 septiembre 2007 [recuperado el 3 de abril de 2008 de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/index.htm].

SEP/ILCE. *Biología. Enseñanza de las Ciencias a través de Modelos Matemáticos (Ecamm). Educación Secundaria.* México, 2000.

- *Geometría dinámica. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (Emat). Educación Secundaria.* México, 2000.

- *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (Emat). Educación Secundaria.* México, 2000.

MATEMÁTICAS III

Libro para el maestro

se imprimió por encargo de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos,
en los talleres de ,
el mes de de 2008.
El tiraje fue de ejemplares.