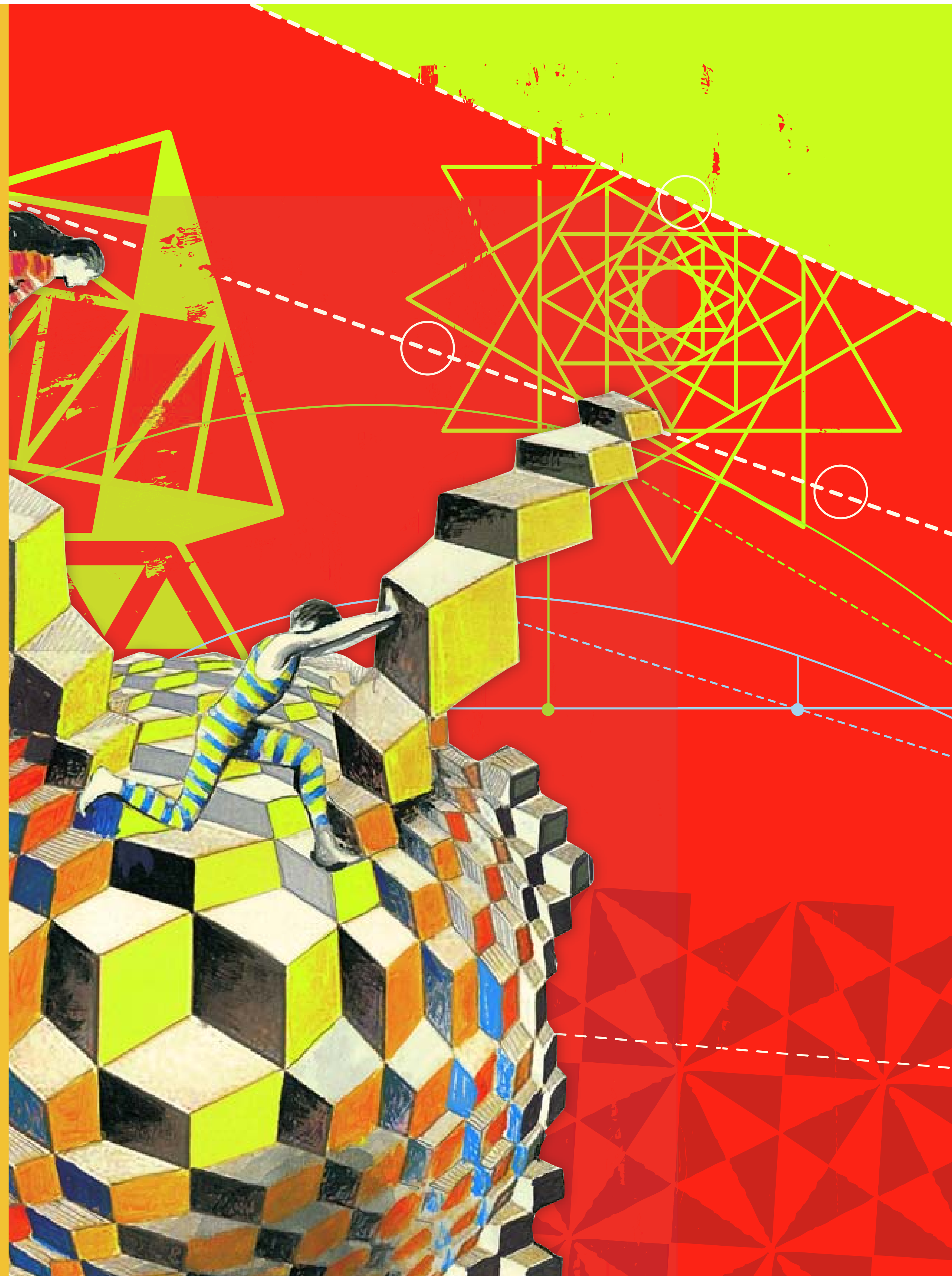
ISBN 970-93963-4-X
SUSTITUIR
9 789709 396348

SEP

ILCE

COMISIÓN NACIONAL DE LIBROS DE TEXTO GRATUITOS

Libro para el maestro



MATEMÁTICAS III

3er Grado Volumen I

TELEsecundaria

Libro para el maestro

SEP

3er Grado Volumen I

MATEMÁTICAS III

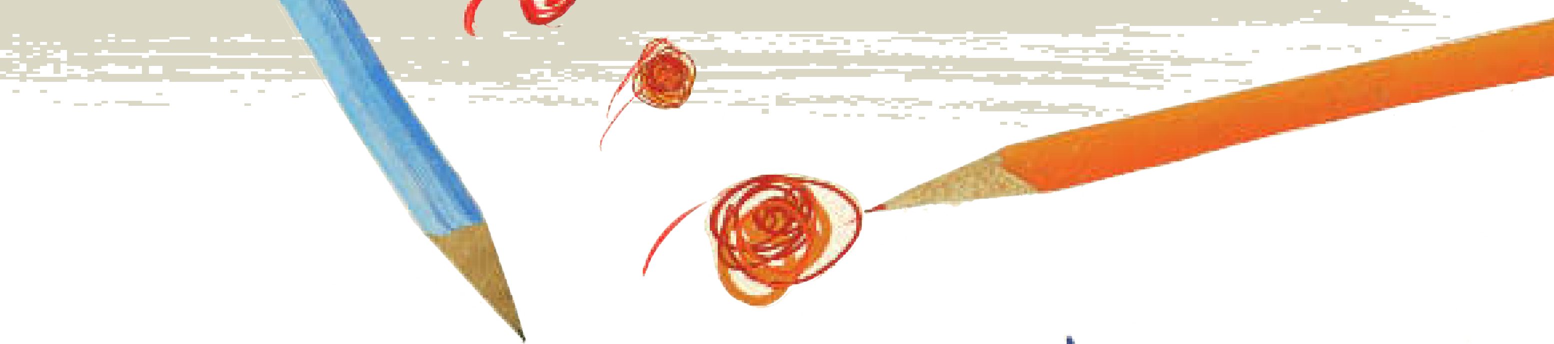
TELEsecundaria

Libro para el maestro

3 Fomentar la interacción en el aula

El diálogo e interacción entre los pares es una parte central en el proceso de aprendizaje: la participación con otros nos ayuda a desplegar nuestros conocimientos, demostrar lo que sabemos hacer, anticipar procesos, reconocer nuestras dudas, oír las ideas de los demás y compararlas con las propias. Por ello, es deseable:

- Fomentar la interacción en el aula con múltiples oportunidades para opinar, explicar, argumentar, fundamentar, referirse a los textos, hacer preguntas y contestar: las preguntas que se responden con "sí" o "no", o las que buscan respuestas muy delimitadas tienden a restringir las oportunidades de los alumnos para elaborar sus ideas. Las preguntas abiertas, en cambio, pueden provocar una variedad de respuestas que permiten el análisis, la comparación y la profundización en las problemáticas a tratar; también permiten explorar razonamientos diferentes y plantear nuevas interrogantes. Además, dan pie a un uso más extenso de la expresión oral.
- Crear espacios para que los alumnos expresen lo que saben sobre el tema nuevo o lo que están aprendiendo: en diferentes momentos de las secuencias (al inicio, desarrollo, al final) pueden abrirse diálogos, con el fin de que contrasten sus conocimientos con los de otros alumnos, y con ello enriquecer y promover la construcción compartida de conocimientos.



- Incorporar en las actividades cotidianas los diálogos en pequeños grupos: algunos estudiantes que no participan en un grupo grande, es más probable que lo hagan en un grupo más pequeño o en parejas.
- Utilizar ciertos formatos de interacción de manera reiterada, con materiales de apoyo escritos y/o gráficos para organizar actividades: algunos ejemplos de estos formatos son la presentación oral de reseñas de libros, la revisión de textos escritos por los alumnos, realización de debates, el trabajo en equipo en el que cada alumno tiene una tarea asignada (coordinador, relator, buscador de información, analista, etcétera).
- Realizar cierres de las actividades: obtener conclusiones que pueden ser listas de preguntas, dudas o diversas opiniones; los acuerdos del grupo; un registro de diferentes formas de expresión o propuestas de cómo “decir” algo; un resumen de lo aprendido, un diagrama, una tabla, un procedimiento eficaz para resolver un problema, entre otros.

Cómo llevar a cabo un debate

Cómo conducir una revisión grupal de textos

Cómo conducir un diálogo grupal

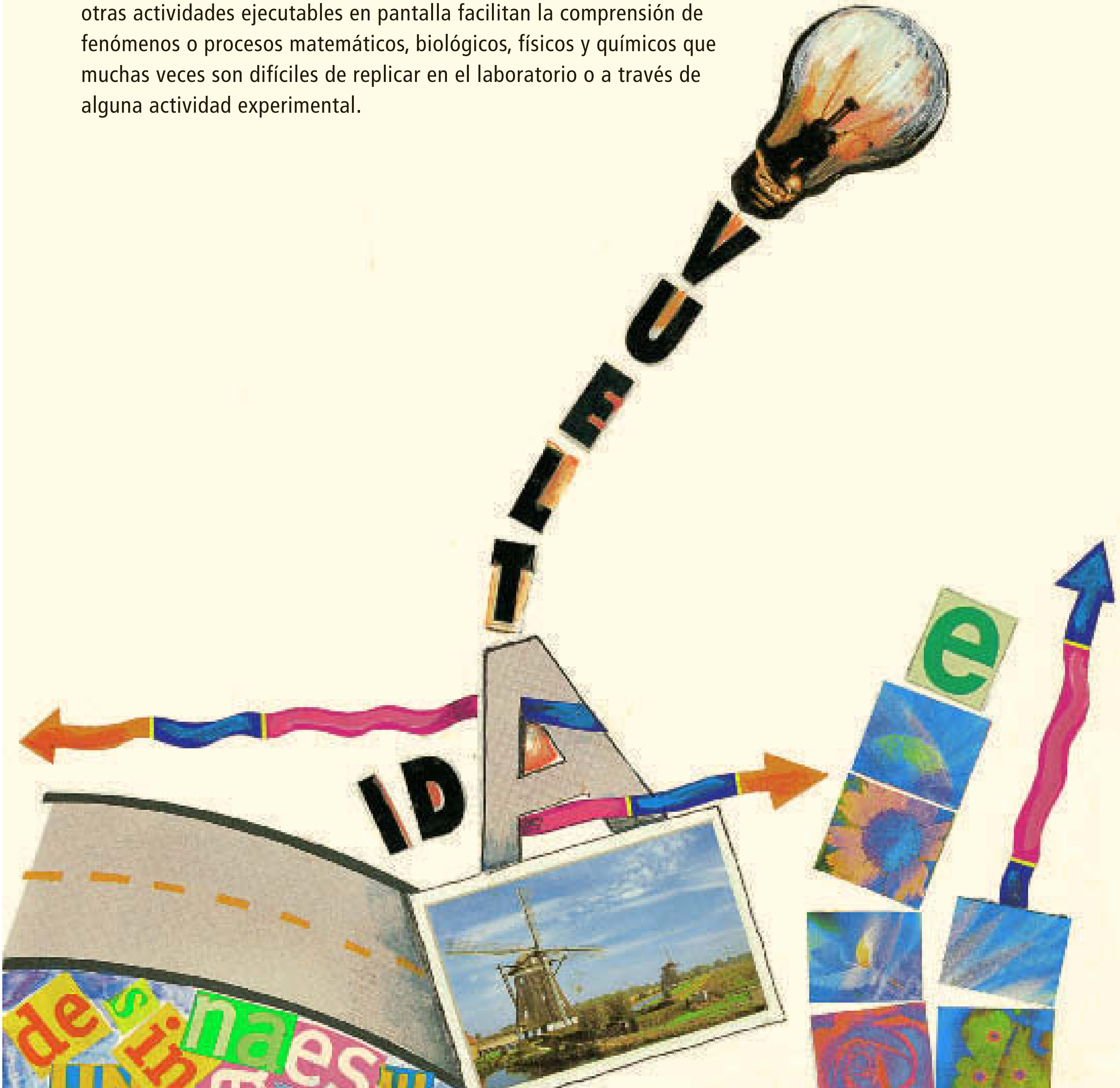
Cómo coordinar la discusión de un dilema moral

4 Utilizar recursos múltiples

Una parte fundamental de la educación secundaria es aprender a utilizar recursos impresos y tecnológicos para conocer diversas expresiones culturales, buscar información y resolver problemas. Por ello es indispensable explorar y conocer diferentes materiales como parte de la preparación de las clases y

- Llevar al aula materiales complementarios: para compartir con los alumnos y animarlos a buscar y compartir con el grupo diferentes recursos.
- Promover el uso constante de otros recursos tecnológicos y bibliográficos disponibles en la escuela: si tienen acceso a computadoras, puede

fomentarse su uso para la realización de los trabajos escolares y, de contar con conectividad, para buscar información en Internet. Asimismo las colecciones de Bibliotecas Escolares y de Aula, la biblioteca de la escuela y la biblioteca pública son fuentes de información potenciales importantes. Por otro lado, el uso de recursos tecnológicos, como los videos, los simuladores para computadora y otras actividades ejecutables en pantalla facilitan la comprensión de fenómenos o procesos matemáticos, biológicos, físicos y químicos que muchas veces son difíciles de replicar en el laboratorio o a través de alguna actividad experimental.



5 Desplegar ideas en el aula para consultas rápidas

Las paredes del aula constituyen un espacio importante para exponer diferentes recursos de consulta rápida y constante. Por ejemplo, se puede:

- Crear un banco de palabras en orden alfabético de los términos importantes que se están aprendiendo en las distintas materias. Sirven de recordatorio para los estudiantes cuando tienen que resolver sus guías, escribir pequeños textos, participar en los diálogos, etc.
- Dejar apuntadas diferentes ideas aportadas por todos para resolver algún tipo de problema. Por ejemplo, puede hacerse un cartel para orientar qué hacer cuando uno encuentra una palabra desconocida en un texto:

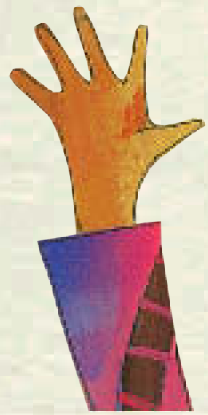
¿QUÉ HACER CUANDO NO SABES QUÉ SIGNIFICA UNA PALABRA?

Tratar de inferir el significado del texto.

Buscarla en el diccionario.

Preguntar al maestro o a un compañero.

Saltarla y seguir leyendo.



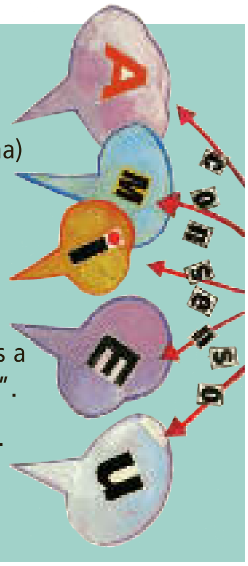
- Colgar mapas, tablas, gráficas, fórmulas, diagramas y listas para la consulta continua.

Cómo organizar la bitácora del grupo

- Puede involucrar a los alumnos en el registro de la historia del grupo y la evolución de las clases. Una forma de hacer esto es llevar una bitácora donde se escribe cada día lo que ocurrió en las diferentes clases. Los alumnos, por turnos, toman la responsabilidad de llevar el registro del trabajo y experiencias del día. La bitácora se pone a disposición de todos para consultar. Esta no es una actividad para calificar o corregir. Se trata de darle importancia y presencia a la memoria del grupo durante el año escolar. Cada alumno podrá seleccionar qué fue lo relevante durante el día y escribirá de acuerdo a su estilo y sus intereses.

Pistas didácticas

Cómo conducir un diálogo grupal



- Acepte dos o tres intervenciones de los alumnos. Anote algunas respuestas en el pizarrón, para recuperarlas en la discusión o conclusiones.
- Acepte respuestas distintas; sugiera que se basen en lo que dice el texto (video, mapa o problema) o en situaciones parecidas.
- Para avanzar en el diálogo, resalte las diferencias y semejanzas entre las participaciones de los alumnos. Por ejemplo: "Juan dijo tal cosa, pero María piensa esta otra, ¿qué otras observaciones se podrían hacer?"
- Cierre cada punto y dé pie al siguiente inciso. Por ejemplo: "Ya vimos las características comunes a todos los seres vivos, ahora pasaremos a las diferencias entre un ser vivo y un objeto inanimado".
- En cada ocasión otorgue la palabra a distintos alumnos, incluyendo los que no levanten la mano.
- Señale claramente el momento de las conclusiones y el cierre de los comentarios.

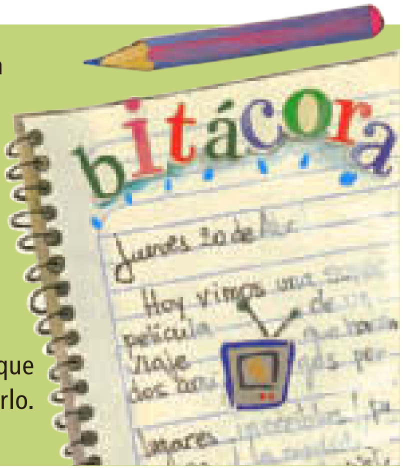
Cómo conducir una revisión grupal de textos individuales

- Solicite un voluntario para leer su texto frente al grupo. Copie fragmentos breves de los textos en el pizarrón o usando el procesador de textos, para ejemplificar frases o expresiones que puedan ser mejoradas.
- Acepte dos o tres intervenciones, para hacer comentarios sobre el contenido cotejando lo que plantea el libro para los alumnos. En el pizarrón haga las modificaciones sugeridas por los comentaristas y pregunte al autor si está de acuerdo, si su texto mejora con las aportaciones o se le ha ocurrido otra idea para mejorarlo. Permita que sea el propio autor el que concluya cuál es la manera que mejor se acerca a lo que quiere relatar, la corrija en el pizarrón y después en su cuaderno.
- Solicite que todos relean y revisen sus textos, hagan las correcciones necesarias y lo reescriban con claridad para, posteriormente, poder leerlo con facilidad ante el grupo.
- En cada ocasión invite a alumnos distintos a revisar sus textos con todo el grupo, incluyendo a los que no se autopropongan.
- Siempre propicie actitudes positivas hacia la revisión para el mejoramiento de la expresión escrita.

Cómo anotar referencias de las fuentes utilizadas

- Cuando se utilizan textos o imágenes que aparecen en distintos medios, se cita su procedencia, usando alguno de los siguientes códigos:
- Libro: apellido del autor, nombre del autor, título, lugar de edición, editorial y año de publicación. Si se trata de un diccionario o enciclopedia, anotar también las palabras o páginas consultadas.
- Revista o periódico: título, número, lugar y fecha de publicación, páginas consultadas.
- Programa de TV: nombre del programa, horario de transmisión y canal.

Cómo organizar la bitácora del grupo

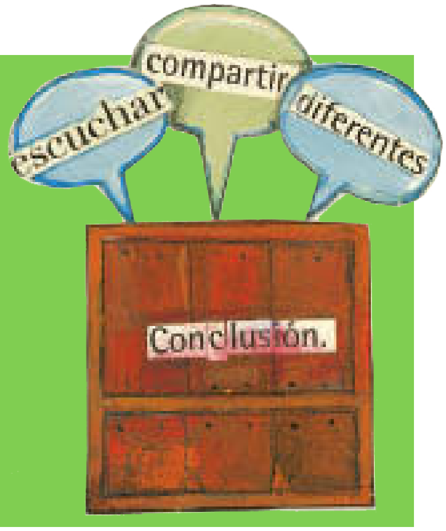


- La bitácora es una actividad compartida por todos los miembros del grupo. Se busca escribir día a día la vida del grupo escolar. Es una actividad libre de escritura en el sentido de que cada alumno puede elegir qué aspecto del día comentar y cómo comentarlo. **No se trata de corregirlo** sino de compartir las diferentes perspectivas acerca de los eventos centrales de la convivencia en el aula.
- Cada día un alumno diferente se hace responsable de escribir, dibujar, insertar fotografías, etcétera.
- Es una actividad que los alumnos pueden realizar en un procesador de palabras.
- Si cuenta con conectividad, se puede crear un blog (bitácora electrónica) del grupo que se despliegue en Internet. En la página **www.blogspot.com** se explica cómo hacerlo.

Cómo hacer una lluvia de ideas

- Plantee una pregunta abierta relacionada con una actividad, texto, imagen o situación (¿Qué pasaría si…? ¿Cómo podríamos…? ¿Por qué creen que esto ocurre así…? ¿Qué les sugiere esto?).
- Permita y promueva que los alumnos den su opinión, anote ideas y sugerencias y planteen dudas.
- Conforme los alumnos van participando, apunte en el pizarrón, de manera abreviada, sus comentarios y aportaciones. También puede anotar sus ideas en un procesador de palabras y proyectarlas en la pantalla.
- Cuando los alumnos han terminado de participar, revise con ellos la lista y busquen diferentes formas de organizar sus ideas (juntar todas las similares, ordenarlas cronológicamente, agruparlas por contenido, etcétera).
- Resuma con el grupo las principales aportaciones.
- Retome las participaciones cuando sea pertinente relacionarlas con otras intervenciones.

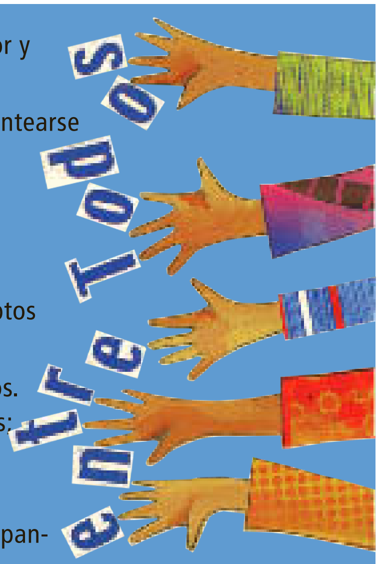
Cómo concluir un diálogo o una actividad



- Hacia el final del diálogo o de una actividad, resuma los comentarios de todos los participantes.
- Señale las principales semejanzas y diferencias en las aportaciones. Recuérdele al grupo cómo se plantearon y cómo se resolvieron.
- Ayude a los alumnos a definir las conclusiones, inferencias y acuerdos principales de la actividad y de sus reflexiones.

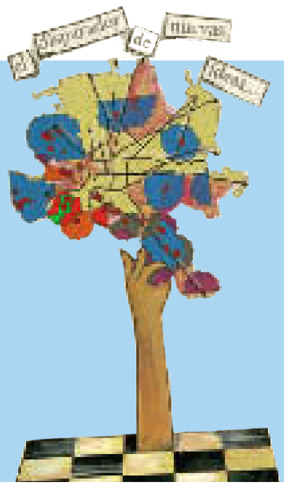
- Permita a los alumnos expresar sus dudas y contestarlas entre ellos.
- Anote en el pizarrón las ideas y conclusiones más importantes.

Cómo llevar a cabo un debate



- Antes de empezar, solicite a dos alumnos que desempeñen las funciones de moderador y de secretario, explicándoles en qué consiste su labor.
- Defina con claridad los aspectos del tema seleccionado que se van a debatir; debe plantearse con claridad cuál o cuáles son los puntos o aspectos que se están confrontando.
- El moderador anota en una lista los nombres de quienes desean participar e inicia la primera ronda de participaciones para que cada uno exprese su punto de vista y sus argumentos acerca del tema.
- El secretario toma notas de las participaciones poniendo énfasis en las ideas o conceptos que aportan.
- Al agotar la lista de participaciones, el moderador hace un resumen de los comentarios. De ser necesario y contar con tiempo, puede abrirse una nueva lista de participaciones; o bien, al final resume las principales conclusiones o puntos de vista para que el secretario tome nota de ellas.
- Cada vez que sea necesario, es importante que el moderador les recuerde a los participantes cuáles son los puntos centrales del debate, para evitar distracciones.
- Al final, el secretario lee sus anotaciones y reporta al grupo las conclusiones o puntos de vista.

Cómo introducir otros recursos

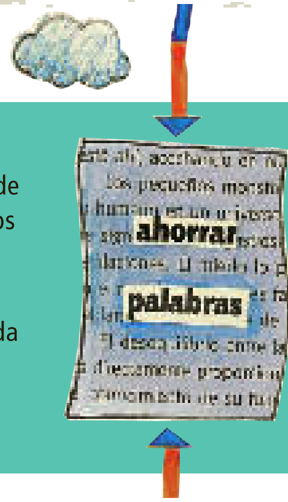


- Explore y lea con anticipación los materiales, seleccionando aquellos que desea compartir con el grupo.
- Presente el material (libro, revista, artículo de periódico, mapa, imagen, etcétera) al grupo, comentando qué tipo de material es, el autor o artista, el año.
- Lea o muéstrelo al grupo.
- Converse con los alumnos acerca de la relación de este material con el trabajo que se está desarrollando. Propicie la reflexión sobre la relación del material presentado con la actividad que se realiza o el contenido que se trabaja.
- Invítelos a revisar el material y conocerlo más a detalle, o que ellos sugieran, aporten, lleven o busquen material relevante para los temas que están abordando en el curso.

Cómo coordinar la discusión de un dilema moral

- Pida a los alumnos que lean el dilema individualmente y respondan las preguntas. Indique que los comentarios se harán más adelante.
- Aclare con el grupo el sentido del dilema, preguntándoles, ¿por qué es un dilema?, ¿cuál es el tema central?, ¿qué habrá pensado el personaje en cuestión?
- Invite a los alumnos a intercambiar ideas en plenaria.
- Explique previamente dos reglas básicas: a) Debatir argumentos y no agredir ni elogiar a personas, y b) turnarse el uso de la palabra, de modo que se ofrezcan equilibradamente argumentos a favor y en contra de cada postura.
- A medida que el grupo identifique las posturas y argumentos posibles, anótelos en el pizarrón e invite al grupo a organizarlos, mediante preguntas como: ¿Cuál es el mejor argumento a favor de X postura y por qué? ¿Habría otros argumentos?, ¿cuáles?
- Para cerrar, invite al grupo a redefinir o confirmar sus posturas iniciales, con base en los argumentos dados, y a buscar salidas diversas y más satisfactorias al dilema.

Cómo apoyar la elaboración de resúmenes



- Elija el texto que se va a resumir y léalo con el grupo.
- Solicite participaciones a partir de las preguntas: ¿cuál consideran que es la idea principal de cada párrafo?, ¿cuáles serán las ideas secundarias o ejemplos? Acepte participaciones de los alumnos, escriba algunas en el pizarrón o con el procesador de textos y después proponga usted sus respuestas a las mismas preguntas.
- A partir de las respuestas, ejemplifique en el pizarrón cómo retomar la idea principal de cada párrafo. Puede incluir definiciones textuales, vocabulario técnico y ejemplos del texto.
- De ser posible, muestre a los alumnos ejemplos de resúmenes elaborados por usted o por otros estudiantes.

Cómo conducir una revisión grupal de textos colectivos

- Solicite a un equipo voluntario para leer su texto frente al grupo y otro para comentarlo. Copie fragmentos breves del texto en el pizarrón para ejemplificar frases o expresiones que puedan ser mejoradas.
- Acepte dos o tres observaciones de los comentaristas, basadas en las pautas de revisión. En el pizarrón haga las modificaciones sugeridas y pregunte a los autores si están de acuerdo, si su texto mejora con las aportaciones o se les ocurre otra idea para mejorarlo. Permita que los autores sean quienes decidan sobre la manera que mejor se acerca a lo que quieren decir, reelaboren su idea en el pizarrón y luego en su cuaderno.
- Solicite que en cada equipo relean y revisen sus textos, hagan las correcciones necesarias y lo reescriban con claridad para, posteriormente, leerlo con facilidad ante el grupo.
- En cada ocasión, invite a equipos distintos a que revisen y comenten sus textos con todo el grupo. Siempre propicie actitudes positivas hacia la revisión para el mejoramiento de la expresión escrita.

Para hacer uso del diccionario

- Haga una lista, con sus alumnos, de las palabras que no conocen o no comprenden.
- Búsquenlas en el diccionario en orden alfabético.
- Lea el significado e intenten utilizarlo dentro de un contexto. También pueden hacer uso de sinónimos.
- Relea las oraciones que contienen las palabras consultadas para comprenderlas ampliamente.
- Si aún quedan dudas, busque la palabra en un libro especializado.

Cómo leer un mapa

- Pida a los alumnos que identifiquen el título del mapa para saber qué tipo de información representa. Si se trata de un mapa histórico, solicite a los estudiantes que identifiquen de cuándo data y si representa hechos o procesos del pasado.
- Revise con los alumnos las referencias o simbología.
- Señale claramente cuál es la escala empleada en el mapa.
- Revise con el grupo la simbología utilizada y su explicación.
- Comente con el grupo la información que se puede obtener a partir del mapa o relacionándolo con otras informaciones previas.
- Interprete la orientación a partir de leer la rosa de los vientos.

Bloque 1

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
1. Productos notables y factorización. **[46-65]** Efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas tales como: $(x+a)^2$; $(x+a)(x+b)$; $(x+a)(x-a)$. Factorizar expresiones algebraicas tales como: $x^2+2ax+a^2$; ax^2+bx; x^2+bx+c; x^2+a^2.	1.1 A formar cuadrados	Programa 1		
	1.2 El cuadrado de una diferencia		Interactivo	
	1.3 La diferencia de dos cuadrados			
	1.4 A formar rectángulos	Programa 2		
	1.5 Un caso especial de factorización			
2. Triángulos congruentes y cuadriláteros. **[66-73]** Aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros.	2.1 Lados opuestos iguales			La diagonal de un paralelogramo (Geometría dinámica)
	2.2 Puntos medios	Programa 3	Interactivo	Cómo verificar la congruencia de las figuras (Geometría dinámica)
3. Entre rectas y circunferencias. **[74-81]** Determinar mediante construcciones las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias. Caracterizar la recta secante y la tangente a una circunferencia.	3.1 Puntos en común			
	3.2 Trazos de tangentes	Programa 4	Interactivo	Tangentes (Geometría dinámica)
	3.3 Entre circunferencias		Interactivo	
	3.4 Algunos problemas	Programa 5		
4. Ángulos en una circunferencia. **[82-91]** Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.	4.1 Dos ángulos de una circunferencia			Ángulos inscritos en una circunferencia (Geometría dinámica)
	4.2 Relaciones a medias			
	4.3 Probemos que uno de los ángulos es la mitad del otro	Programa 6	Interactivo	
	4.4 Problemas de medida	Programa 7		
5. Problemas con curvas. **[92-95]** Calcular la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.	5.1 Sólo una parte	Programa 8	Interactivo	
	5.2 Lo que resta			
	5.3 De todo un poco			
6. La razón de cambio. **[96-107]** Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.	6.1 El incremento			¿Sabes que es una razón? (Hoja de cálculo)
	6.2 Pendiente y razón de cambio	Programa 9	Interactivo	
	6.3 Algunas razones de cambio importantes	Programa 10		
7. Diseño de experimentos y estudios estadísticos. **[108-121]** Diseñar un estudio o experimento a partir de datos obtenidos de diversas fuentes y elegir la forma de organización y representación tabular o gráfica más adecuada para presentar la información.	7.1 Diseño de un estudio estadístico. ¿Qué materia te gusta más?	Programa 11	Interactivo	
	7.2 Un juego de letras. Otro estudio estadístico			
	7.3 ¿Qué cantidad de agua consumen diariamente los alumnos de tercer grado?	Programa 12		
EVALUACIÓN				

Bloque 2

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
8. Ecuaciones no lineales. **[124-133]** Utilizar ecuaciones no lineales para modelar situaciones y resolverlas utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	8.1 El número secreto	Programa 13		Ecuaciones con más de una solución I (Calculadora)
	8.2 Cubos, cuadrados y aristas			
	8.3 Menú de problemas	Programa 14	Interactivo	
9. Resolución de ecuaciones por factorización. **[134-145]** Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	9.1 ¿Cuánto miden los lados?	Programa 15		
	9.2 Los factores de cero		Interactivo	
	9.3 El adorno	Programa 16		
	9.4 Apliquemos lo aprendido			
10. Figuras semejantes. **[146-151]** Construir figuras semejantes y comparar las medidas de los ángulos y de los lados.	10.1 Un corazón muy especial	Programa 17	Interactivo	
	10.2 Aplicaciones de la semejanza	Programa 18	Interactivo	
11. Semejanza de triángulos. **[152-161]** Determinar los criterios de semejanza de triángulos. Aplicar los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos. Aplicar la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles.	11.1 Explorando la semejanza de triángulos	Programa 19		
	11.2 Criterios de semejanza de triángulos I			Idea de triángulos semejantes (Geometría dinámica)
	11.3 Criterios de semejanza de triángulos II			
	11.4 Cálculo de distancias	Programa 20	Interactivo	
12. Índices. **[162-177]** Interpretar y utilizar índices para explicar el comportamiento de diversas situaciones.	12.1 El Índice Nacional de Precios al Consumidor	Programa 21		
	12.2 Índices en la escuela			
	12.3 ¿Quién es el pelotero más valioso?	Programa 22		
	12.4 Más sobre índices		Interactivo	
13. Simulación. **[178-189]** Utilizar la simulación para resolver situaciones probabilísticas.	13.1 Simulación	Programa 23		
	13.2 Aplicando la simulación			
	13.3 Simulación y tiros libres	Programa 24	Interactivo	Simulación con el modelo de urna (1) (Hoja de cálculo)
EVALUACIÓN				

Bloque 3

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
14. Relaciones funcionales en otras disciplinas. Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica.	14.1 El área de la imagen	Programa 25	Interactivo	
	14.2 El corral de los conejos			
	14.3 El medio litro de leche	Programa 26		
15. Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general. Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la fórmula general.	15.1 La fórmula general	Programa 27		
	15.2 El beisbolista		Interactivo	
	15.3 Cuántas soluciones tiene una ecuación	Programa 28		
	15.4 La razón dorada			
16. Teorema de Tales. Determinar el teorema de Tales mediante construcciones con segmentos. Aplicar el teorema de Tales en diversos problemas geométricos.	16.1 La culpa es de las paralelas	Programa 29	Interactivo	Teorema de Tales (Geometría dinámica)
	16.2 Proporcionalidad vs paralelismo	Programa 30		Recíproco del teorema de Tales (Geometría dinámica)
	16.3 Ahí está el teorema de Tales			
17. Figuras homotéticas. Determinar los resultados de una homotecia cuando la razón es igual, menor o mayor que 1 o que −1. Determinar las propiedades que permanecen invariantes al aplicar una homotecia a una figura. Comprobar que una composición de homotecias con el mismo centro es igual al producto de las razones.	17.1 Especialmente semejantes	Programa 31	Interactivo	La homotecia como aplicación del teorema de Tales (Geometría dinámica)
	17.2 Depende de la razón	Programa 32		
18. Gráficas de relaciones. Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos.	18.1 Plano inclinado	Programa 33	Interactivo	
	18.2 La ley de Boyle	Programa 34		
	18.3 La caja			
19. Algunas características de gráficas no lineales. Establecer la relación que existe entre la forma y la posición de la curva de funciones no lineales y los valores de las literales de las expresiones algebraicas que definen a estas funciones.	19.1 ¡Abiertas y más abiertas!	Programa 35	Interactivo	Funciones cuadráticas (Hoja de cálculo)
	19.2 ¡Para arriba y para abajo!		Interactivo	
	19.3 Las desplazadas		Interactivo	
	19.4 ¡Ahí les van unas cúbicas!	Programa 36	Interactivo	
	19.5 ¡Ahí les van unas hipérbolas!		Interactivo	
	19.6 Efectos especiales		Interactivo	
20. Gráficas por pedazos. Interpretar y elaborar gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	20.1 Las albercas	Programa 37	Interactivo	
	20.2 Diversos problemas			
EVALUACIÓN				

Bloque 4

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
21. Diferencias en sucesiones. Determinar una expresión general cuadrática para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de diferencias.	21.1 Números figurados	Programa 38	Interactivo	
	21.2 Las diferencias en expresiones algebraicas			
	21.3 El método de diferencias	Programa 39		
	21.4 Apliquemos lo aprendido			
22. Teorema de Pitágoras. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.	22.1 ¿Qué es el teorema de Pitágoras?	Programa 40	Interactivo	Teorema de Pitágoras (Geometría dinámica)
	22.2 Aplicaciones del teorema de Pitágoras I	Programa 41		
	22.3 Aplicaciones del teorema de Pitágoras II			
23. Razones trigonométricas. Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.	23.1 La competencia	Programa 42	Interactivo	Ángulo de elevación y depresión (Hoja de cálculo)
	23.2 Cosenos y senos			
	23.3 30°, 45° y 60°	Programa 43		
	23.4 A resolver problemas		Interactivo	
24. La exponencial y la lineal. Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial de diversas situaciones.	24.1 Crecimiento de poblaciones	Programa 44	Interactivo	
	24.2 Interés compuesto			
	24.3 Gráfica de la exponencial	Programa 45		
	24.4 La depreciación de las cosas			
25. Representación de la información. Analizar la relación entre datos de distinta naturaleza, pero referidos a un mismo fenómeno o estudio que se presenta en representaciones diferentes, para producir nueva información.	25.1 Muchos datos	Programa 46	Interactivo	
	25.2 De importancia social			
EVALUACIÓN				

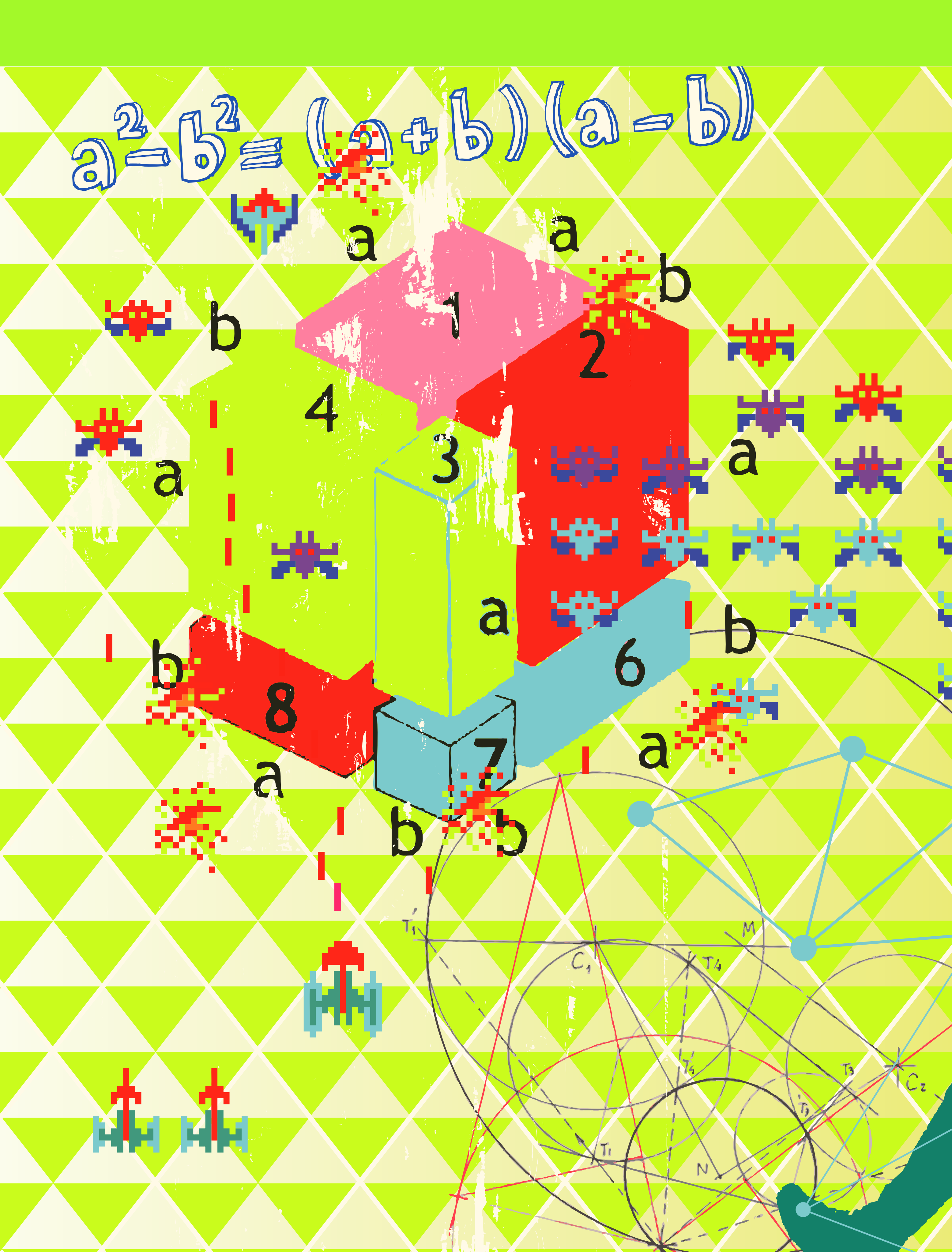
Bloque 5

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
26. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Dado un problema, determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se puede resolver, y viceversa, proponer una situación que se modele con una de esas representaciones.	26.1 Los discípulos de Pitágoras	Programa 47		
	26.2 Ecuaciones y geometría		Interactivo	
27. Conos y cilindros. Anticipar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras. Construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Determinar la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera cono recto.	27.1 Sólidos de revolución	Programa 48		
	27.2 Cilindros	Programa 49		
	27.3 Conos		Interactivo	
	27.4 Secciones de corte			
28. Volumen del cono y del cilindro. Construir las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.	28.1 Tinacos de agua	Programa 50	Interactivo	
	28.2 Conos de papel	Programa 51		
29. Estimar volúmenes. Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos. Calcular datos desconocidos dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.	29.1 Problemas prácticos	Programa 52	Interactivo	
30. Gráfica caja-brazo. Interpretar, elaborar y utilizar gráficas de cajabrazos de un conjunto de datos para analizar su distribución a partir de la mediana o de la media de dos o más poblaciones.	30.1 Interpretación de datos	Programa 53	Interactivo	
	30.2 Construcción de la gráfica caja-brazos			
	30.3 Comparación de datos mediante la gráfica de caja-brazos	Programa 54		
EVALUACIÓN				

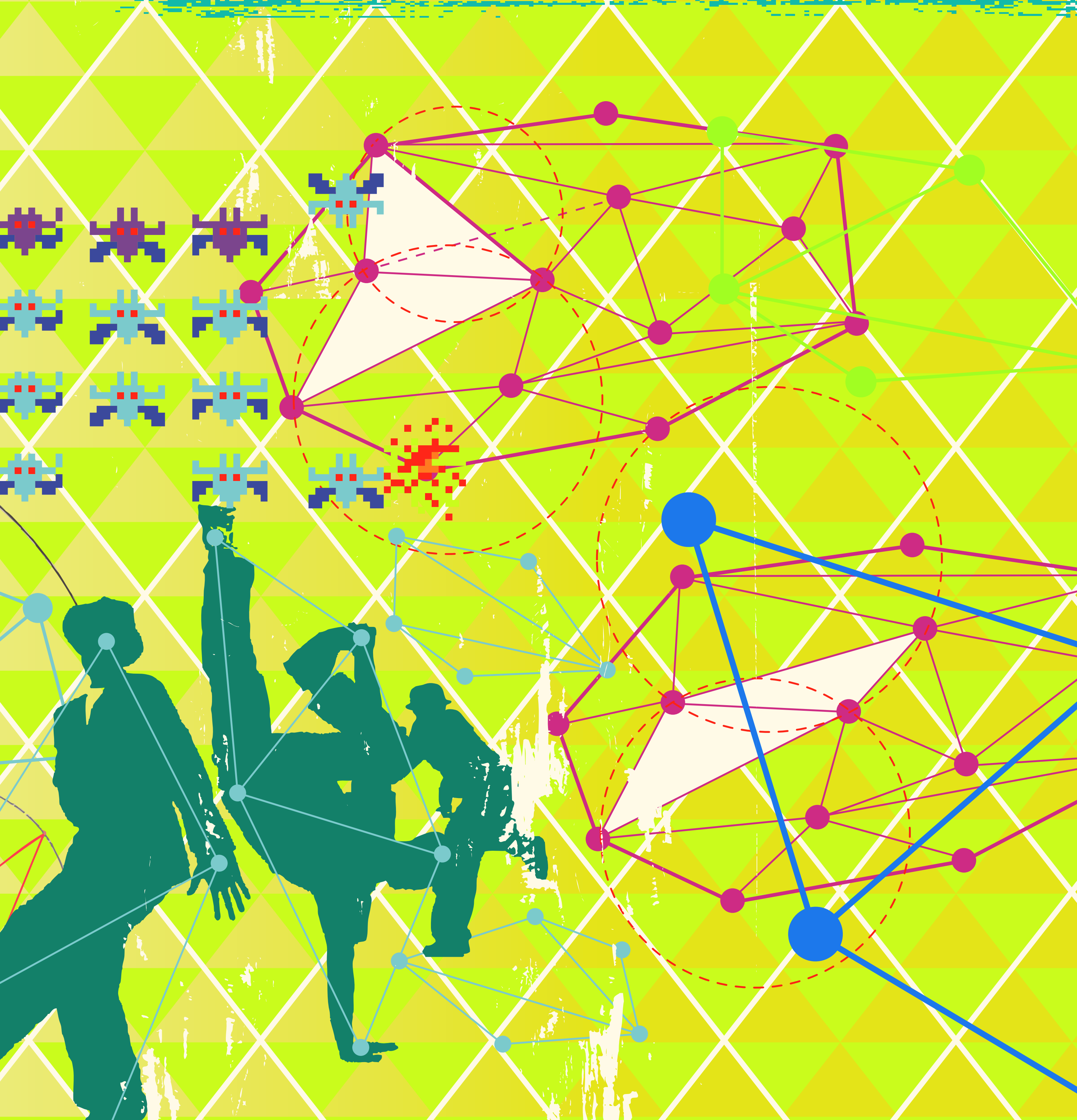
EJE 1:	Sentido numérico y pensamiento algebraico
EJE 2:	Forma, espacio y medida
EJE 3:	Manejo de la información

Clave de logos

Trabajo individual	Sitios de Internet
En parejas	Bibliotecas Escolares y de Aula
En equipos	Programa de Televisión
Todo el grupo	Interactivo
Conexión con otras asignaturas	Audiotexto
Glosario	Aula de Medios
Consulta otros materiales	Otros Textos
CD de recursos	


$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
a
a
b
b
1
2
4
3
a
a
a
b
6
b
8
a
7
a
b
b
M
T1
C1
T4
T3
C2

BLOQUE 1



Propósito del programa. Ejemplificar cómo se deduce la regla para obtener el trinomio cuadrado perfecto que resulta de elevar un binomio al cuadrado.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Descubrir la regla para obtener el trinomio cuadrado perfecto que resulta de elevar un binomio al cuadrado.

Propósito de la actividad. Los alumnos han utilizado anteriormente los bloques algebraicos para representar operaciones. En esta sesión también se utilizan para que representen multiplicaciones de binomios que se conocen como *suma de cuadrados*. Es importante que efectivamente usen los bloques, ya que pueden ser una valiosa ayuda para darle sentido a los productos de dichas multiplicaciones.

Sugerencia didáctica. Plantee a los alumnos lo siguiente: averiguar cuál es la medida de los lados de cada bloque, cuál es el área y por qué se expresa así su área. Esto servirá para que repasen algunas cosas básicas como que el resultado de multiplicar x por x es x^2, x por 1 es x. Después puede proponer a los alumnos varias actividades con los bloques algebraicos.

- Primero pídales que formen cuadrados usando el número de bloques que quieran.
- Luego ponga una condición para formarlos: utilizar cierta cantidad de bloques, por ejemplo, nueve bloques en total (pueden ser de cualquier tamaño).
- Agregue otra condición: utilizar una cantidad exacta de cada uno de los bloques, por ejemplo, uno azul, cuatro rojos y 16 grises. También plantee cantidades de bloques con las que es imposible construir un cuadrado, por ejemplo, uno azul, tres rojos y nueve grises. Déles unos minutos para intentar formarlo y luego pídales que agreguen la menor cantidad de bloques que sean necesarios para poder formar un cuadrado.

Es importante que para cada cuadrado que formen con los bloques escriban expresiones que representen la medida del lado y la del área.

SECUENCIA 1

Productos notables y factorización

En esta secuencia descubrirás procedimientos simplificados para efectuar multiplicaciones con expresiones algebraicas y para encontrar los factores que dan lugar a un producto algebraico determinado.

SESIÓN 1

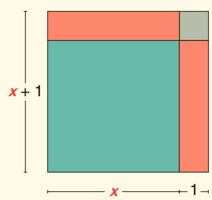
A FORMAR CUADRADOS

>>> Para empezar

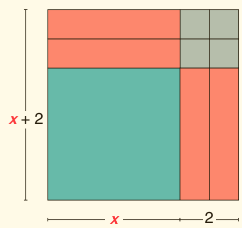
Los bloques algebraicos son una herramienta que permite representar operaciones con expresiones algebraicas. En la secuencia 12 de **Matemáticas II**, volumen I los usaste para multiplicar polinomios; ahora, te ayudarán a encontrar, de manera simplificada, el resultado de elevar al cuadrado un binomio .

Recorta los **Bloques algebraicos** del anexo 1 **Recortables** y pégalos en cartón.

Con bloques de áreas x^2, x y 1 forma cuadrados de diferente tamaño e identifica la expresión algebraica que corresponde a la medida de sus lados como se muestra en las dos figuras siguientes.



$A = x^2 + x + x + 1$
$= x^2 + 2x + 1$



$A = x^2 + 2x + 2x + 4$
$= x^2 + 4x + 4$

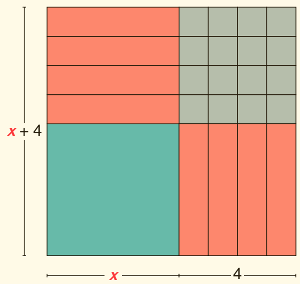
Encuentra el trinomio que representa el área de los dos cuadrados siguientes.

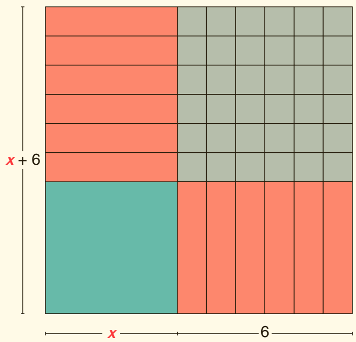
12

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de las operaciones.
Subtema
Operaciones combinadas.
Antecedentes
En **Matemáticas II**, los alumnos estudiaron expresiones algebraicas equivalentes y las resolvieron utilizando la propiedad distributiva, también hicieron algunas factorizaciones en problemas de cálculo de áreas. En esta secuencia se pretende que calculen, simplifiquen o factoricen productos notables, tanto para que sean capaces de expresar situaciones algebraicamente, como para que puedan resolverlas.

Propósitos de la secuencia
Efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas tales como:
$(x + a)^2$; $(x + a)(x + b)$; $(x + a)(x - a)$.
Factorizar expresiones algebraicas tales como: $x^2 + 2ax + a^2$; $ax^2 + bx$; $x^2 + bx + c$; $x^2 - a^2$.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**A formar cuadrados** Descubrir la regla para obtener el trinomio cuadrado perfecto que resulta de elevar un binomio al cuadrado.	Programa 1
2	**El cuadrado de una diferencia** Descubrir la regla para obtener el trinomio cuadrado perfecto que resulta de elevar al cuadrado una diferencia de dos términos.	Interactivo
3	**La diferencia de dos cuadrados** Descubrir la regla para factorizar una diferencia de cuadrados.	
4	**A formar rectángulos** Descubrir la regla para multiplicar dos binomios con término común e invertirla para factorizar un trinomio de segundo grado.	Programa 2
5	**Un caso especial de la factorización** Descubrir la regla para factorizar binomios con factor común.	





A = ____________

= ____________

A = ____________

= ____________

>>> Consideremos lo siguiente

En la siguiente tabla aparecen binomios que representan las medida del lado de diferentes cuadrados, así como los trinomios que corresponden a sus respectivas áreas.

a) Examina los dos primeros ejemplos y completa la siguiente tabla.

Binomio	Trinomio
$x + 1$	$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$x + 2$	$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
$x + 3$	$(x + 3)^2 = (x + 3)\ (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$
$x + 4$	$(x + 4)^2 = (x + 4)\ (x + 4) = x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 8x + 16$
$x + 6$	$(x + 6)^2 = (x + 6)\ (x + 6) = x^2 + 12x + 36$
$x + 10$	$(x + 10)^2 = (x + 10)\ (x + 10) = x^2 + 10x + 10x + 100 = x^2 + 20x + 100$

b) Subraya el trinomio que representa el área de un cuadrado cuyo lado mide $x + 100$.

$x^2 + 100x + 10\,000$ $\qquad$ $x^2 + 10\,000$ $\qquad$ $x^2 + 200x + 10\,000$

Comparen sus soluciones. Comenten cómo obtuvieron los trinomios que son resultado de elevar los binomios al cuadrado.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban en la tabla los trinomios que corresponden a los cuadrados cuyos lados miden $x + 4$ y $x + 6$.

Luego, invítelos a que analicen los cuatro casos que tienen ilustrados (los cuadrados que miden $x + 1$, $x + 2$, $x + 4$ y $x + 5$) para que traten de encontrar una regla que les permita escribir el área de los cuadrados cuyos lados miden $x + 3$ y $x + 10$.

Posibles procedimientos. Los alumnos tienen al menos dos vías para llenar la tabla: apoyarse en el recurso gráfico para justificar todo el desarrollo algebraico que se presenta hasta obtener el área de cada cuadrado; o bien, multiplicar los dos binomios (que son los lados del cuadrado). Permita que lo resuelvan como ellos decidan y, si fuera necesario, repasen la información del "Recuerden que" que aparece en el apartado *Manos a la obra* para que recuerden cómo se multiplican dos binomios.

Si llenan la tabla multiplicando los lados del cuadrado, quizá sea útil que desarrolle al menos una de las multiplicaciones en el pizarrón. Por ejemplo, para el cuadrado cuyo lado mide $x + 1$ sería:

$$(x + 1)\ (x + 1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

Posibles dificultades. Con esta pregunta se quiere saber si los alumnos pudieron encontrar la regla para elevar un binomio al cuadrado.

Quizá algunos alumnos piensen que para elevar un binomio al cuadrado basta con elevar al cuadrado cada uno de los términos y luego representar el área con una suma. En este caso, pondrían como resultado $x^2 + 10\,000$.

Los alumnos que subrayen el trinomio $x^2 + 100x + 10\,000$, quizá piensen que para obtener el término del trinomio que tiene x basta multiplicar los dos términos del binomio.

Si los alumnos cometen éstos u otros errores, pídales que realicen la multiplicación término por término y analicen los resultados.

Respuestas. En la figura 1 hay un bloque de área x^2, 10 de área x y 25 de área 1, por lo tanto, las expresiones correctas son $x^2 + 5x + 5x + 25$ y $x^2 + 10x + 25$.

Posibles procedimientos. Los alumnos podrían multiplicar lado por lado del cuadrado para obtener el área, es decir, $(x + 5)(x + 5)$; pero también se pueden fijar en el dibujo del cuadrado y contar directamente cuántos bloques de cada área hay. A los alumnos que hayan utilizado la multiplicación de binomios para resolver, pídales que verifiquen su resultado contando los bloques en el dibujo.

Sugerencia didáctica. Aunque se espera que los alumnos ya lo sepan, conviene recordarles que "elevar un número o un término al cuadrado" significa que ese número o término se multiplica por sí mismo una vez.

Posibles dificultades. Cuando se trate de un solo número, los alumnos quizá no tengan dificultades para elevarlo al cuadrado, pero puede haber dudas cuando sea un término como $x + 5$. Algunos podrían pensar que $x + 5$ al cuadrado es igual a:

$x^2 + 5$

$x + 25$

$2x + 10$

$x^2 + 25$

Si cometen alguno de esos errores, lean juntos el recuadro "Recuerden que" y proponga algunos ejemplos para que los resuelvan:

$(4 + 5)^2 = 81$

$(7 + b)^2 = b^2 + 14b + 49$

$(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$

SECUENCIA 1

>>> Manos a la obra

I. La figura 1 muestra un cuadrado que mide de lado $x + 5$.

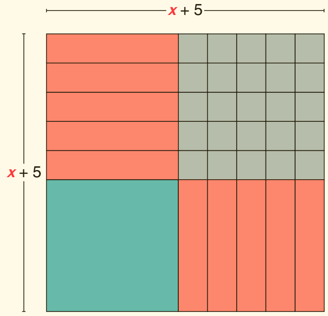


Figura 1

a) ¿Cuántos bloques de área x^2 se utilizaron para formar el cuadrado? ____________

b) ¿Cuántos de área x? ____________

c) ¿Cuántos de área 1? ____________

d) De las siguientes expresiones, subrayen las que representan el área del cuadrado.

$x + 5$

$x^2 + 5x + 5x + 25$

$x^2 + 25$

$x^2 + 10x + 25$

e) Verifiquen si las expresiones que subrayaron se obtienen al elevar al cuadrado el binomio $x + 5$. Para eso, completen la multiplicación $(x + 5)(x + 5)$ y luego sumen los términos semejantes para obtener un trinomio.

$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$

$= $ ____________________

$= $ ____________________

Recuerden que:

Para multiplicar dos binomios se multiplica cada término de un binomio por todos los términos del otro y luego se suman los términos que son semejantes.

$(x + 7)(x + 7) = x^2 + 7x + 7x + 49$

$= x^2 + 14x + 49$

Comparen sus soluciones y comenten cuál de los siguientes procedimientos usarían para hacer de manera simplificada la multiplicación $(x + 8)(x + 8)$, sin necesidad de hacer una multiplicación término por término.

- El resultado se obtiene sumando el cuadrado del primer término (x^2) y el cuadrado del segundo término (64).
- El resultado se obtiene sumando el cuadrado del primer término (x^2) más el producto de los dos términos ($8x$) más el cuadrado del segundo término (64).
- El resultado se obtiene sumando el cuadrado del primer término (x^2) más el doble del producto de los dos términos ($16x$) más el cuadrado del segundo término (64).

Verifiquen sus reglas haciendo la multiplicación $(x + 8)(x + 8)$.

14

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos comenten cada una de las reglas siguientes e invítelos a justificar la validez de cada una verificando si la regla funciona para cualquier binomio. Para ello, pueden usar los datos de tabla o los dibujos de los cuatro cuadrados que formaron con los bloques algebraicos.

Propósito de la actividad. Los alumnos ya saben multiplicar dos binomios, así que el énfasis en esta parte está puesto en que aprendan que, al elevar al cuadrado un binomio, se obtiene un trinomio.
Por ello, no es tan importante que hagan las multiplicaciones en un orden específico, sino que logren analizar el producto que obtienen porque a partir de esa información podrán comprender una nueva regla:
El cuadrado del primer término más el doble del primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo término, nos da como resultado un trinomio.

II. Eleven al cuadrado el binomio $(2x + 3)$ y multipliquen término por término para obtener cuatro productos parciales como lo indican las líneas. Luego sumen los términos semejantes hasta obtener un trinomio.

$4x^2$ 9

$(2x + 3)(2x + 3) = 4x^2 + 6x +$ $6x$ + 9 = $4x^2 + 12x + 9$

$6x$ + Trinomio cuadrado perfecto

$6x$ $12x$

a) ¿Qué relación hay entre el término $4x^2$ del trinomio y el término $2x$ del binomio? ____________

b) ¿Qué relación hay entre el 9 del trinomio y el 3 del binomio? ____________

c) ¿Cuántas veces aparece el producto parcial $6x$ en la multiplicación? ____________

d) ¿Qué términos del binomio se multiplicaron para obtenerlo? ____________

e) ¿Qué relación hay entre el término $12x$ del trinomio y el producto de los dos términos del binomio? ____________

Comparen sus soluciones y encuentren una procedimiento simplificado para obtener el trinomio que resulta al efectuar la operación $(3x + 2)^2$, sin necesidad de hacer una multiplicación término por término.

>>> A lo que llegamos

La expresión que resulta al elevar al cuadrado un binomio se llama **trinomio cuadrado perfecto**.

El siguiente procedimiento permite obtener el resultado de manera simplificada.

El primer término del binomio se eleva al cuadrado

El segundo término del binomio se eleva al cuadrado

$$(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

Se multiplican ambos términos $(3x)(5) = 15x$

Se duplica el producto $(2)(15x) = 30x$

15

Respuestas.

a) $4x^2$ es el cuadrado de $2x$.

b) 9 es el cuadrado de 3.

c) Dos veces.

d) 3 y $2x$.

e) $12x$ es la suma de $6x + 6x$.

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos, a partir de las respuestas que dieron en la actividad anterior, se den cuenta de que pueden obtener el trinomio cuadrado perfecto sin necesidad de efectuar la multiplicación término por término. Si no saben cómo hacerlo, lean juntos la información del apartado *A lo que llegamos*.

Sugerencia didáctica. Si aún hay alumnos que requieren hacer término a término toda la multiplicación, permítales hacerlo. Luego pídales que intenten obtener el producto como se explica en el apartado *A lo que llegamos*.

Posibles dificultades. Para completar los renglones 3 y 5 de esta tabla, los alumnos deben invertir el proceso de la multiplicación, en vez de obtener el producto a partir de los factores, deben hacer el proceso inverso: hallar los factores teniendo el producto, es decir, factorizar. Dicho proceso puede ser difícil para los estudiantes, por lo que necesitarán algo más de tiempo y posiblemente ayuda. Sería muy útil repasar la información del apartado *A lo que llegamos* planteando enseguida algunas preguntas, por ejemplo, "se sabe que el primer término del trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado del primer término del binomio, entonces ¿cuál es el primer término del binomio si el primer término del trinomio es x^2?".

Propósito de la sesión. Descubrir la regla para obtener el trinomio cuadrado perfecto que resulta de elevar al cuadrado una diferencia de dos términos.

Propósito de la actividad. Se pretende que el alumno se enfrente al reto que le supone expresar algebraicamente la medida de un lado al que se le quita una parte, así como el área resultante.

Algunos alumnos podrán resolverlo haciendo uso de sus conocimientos sobre la multiplicación de binomios, pero para otros quizá no sea difícil plantear cuál es la medida del lado del nuevo cuadrado. Si ese fuera el caso, permítales seguir avanzando y más adelante vuelvan a estas preguntas y corrijan si hubo errores.

Respuestas.

a) $x - 1$

b) $(x - 1)^2$

SECUENCIA 1

>>> Lo que aprendimos

Escribe el binomio al cuadrado o el trinomio cuadrado perfecto que falta en cada renglón de la siguiente tabla.

Binomio al cuadrado	Trinomio cuadrado perfecto
$(x + 9)^2$	$x^2 + 18x + 81$
$(3x + 1)^2$	$9x^2 + 6x + 1$
$(x + 12)^2$	$x^2 + 24x + 144$
$(2m + 5)^2$	$4m^2 + 20m + 25$
$(2x + 9)^2$	$4x^2 + 36x + 81$

SESIÓN 2

EL CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

>>> Consideremos lo siguiente

Del cuadrado de la figura 2 se recortaron algunas partes hasta que quedó otro cuadrado más pequeño, como se muestra en la figura 3.

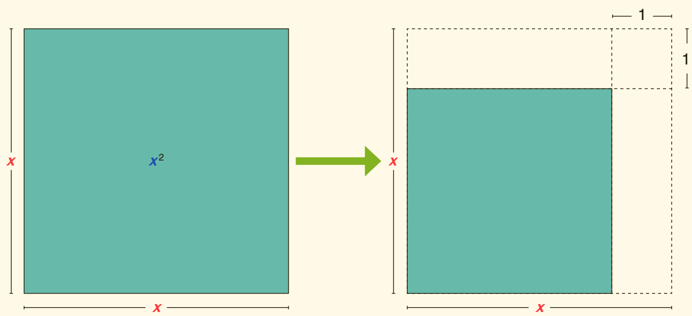


Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado azul de la figura 3? ________

b) La expresión algebraica que representa el área del cuadrado azul es: ________

Comparen sus soluciones.

16

>>> Manos a la obra

I. Ana y Ricardo decidieron usar algunos bloques algebraicos para completar el área del cuadrado azul de la figura 3.

Ricardo se dio cuenta de que con un bloque de área x y otro de área $x - 1$ podía completar el cuadrado de lado x.

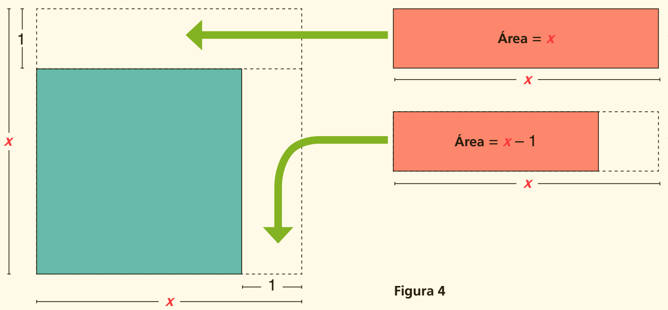


Figura 4

Después de completar el cuadrado de lado x, expresó que el área del cuadrado azul de la figura 3 era: $x^2 - x - (x - 1)$.

Ana, por su parte, usó tres bloques para cubrir el cuadrado de lado x; después expresó el área del cuadrado azul como $x^2 - 2(x - 1) - 1$.

a) Usen los bloques algebraicos de la derecha (de áreas $x - 1$ y 1) para completar el cuadrado de lado x como crean que lo hizo Ana; luego tracen cada bloque sobre la figura 5 e ilumínenlos de acuerdo a su color.

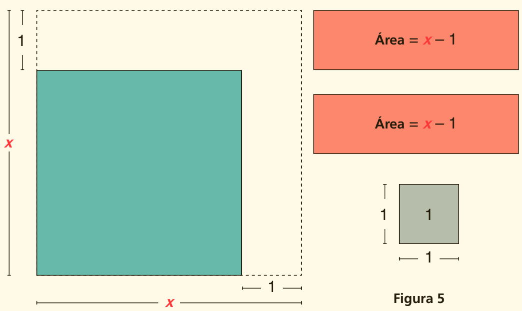


Figura 5

17

Propósito del interactivo. Que el alumno explore las representaciones gráfica y algebraica simultáneamente para descubrir y comprender la regla de los binomios al cuadrado y obtener un trinomio cuadrado perfecto.

Propósito de la actividad. Al "completar" el cuadrado de la figura 3 con bloques para volver a tener el cuadrado completo de la figura 2, se pretende que los alumnos comprendan que el área del cuadrado de la figura 3 es igual al área del cuadrado completo de la figura 2 menos los dos bloques que Ricardo usó, uno de área x y otro de área $x - 1$.

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos apoyen sus respuestas y las verifiquen usando los bloques algebraicos. Esto les permitirá darle sentido a las actividades de este apartado, por lo que es necesario que los tengan a la mano y los utilicen.

Posibles respuestas. Los tres bloques pueden acomodarse en distintas posiciones para completar el cuadrado azul de la figura 5 y tener así el área del cuadrado completo de la figura 2.

Es importante que los alumnos comparen entre ellos sus distintos acomodos y que estén seguros de que el área no varía dependiendo de las posiciones en las que se pongan los bloques.

Posibles dificultades. Para algunos alumnos puede ser difícil obtener el trinomio a partir de las expresiones iniciales. Si lo considera útil, vaya resolviendo en el pizarrón una a una como se muestra:

Procedimiento de Ana

Ana sabe que el lado del cuadrado azul de la figura 3 mide ($x-1$) y para conocer su área debe elevar al cuadrado esa medida, con lo que quedaría $(x-1)^2$. También sabe que al área del cuadrado completo de la figura 2 se le puede restar la de los tres bloques que ella utilizó, y el resultado será el área de la figura 3. Recuerde a los alumnos que Ana utilizó tres bloques: dos de área $x-1$ y uno de área 1, que son los que se restan:

$(x-1)^2 = x^2 - 2\,(x-1) - 1$

Esta expresión puede leerse como "el área del cuadrado de la figura 3 es igual al área del cuadrado de la figura 2 menos dos bloques de área $x-1$, menos un bloque de área 1". Al resolver quedaría:

$(x-1)^2 = x^2 - 2\,(x-1) - 1 = x^2 - 2x + 2 - 1 = x^2 - 2x + 1$

Procedimento de Ricardo

Ricardo sabe que el área del cuadrado de la figura 3 puede obtenerse restándole al área del cuadrado de la figura 2 los dos bloques que utilizó. Recuerde a los alumnos que Ricardo utilizó: un bloque de área x y un bloque de área $x-1$, que son los que se restan.

$(x-1)^2 = x^2 - x - (x-1)$

Para obtener el trinomio puede ser más fácil escribirlo así:

$(x-1)^2 = x^2 - 1\,(x) - 1\,(x-1)$

Esta expresión puede leerse como "el área del cuadrado de la figura 3 es igual al área del cuadrado de la figura 2 menos un bloque de área x, menos un bloque de área $x-1$". Al resolver quedaría:

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

b) Completen la igualdad y simplifiquen ambas expresiones hasta obtener un trinomio.

Procedimiento de Ana:

$A = (x-1)^2 = x^2 - 2(x-1) - 1 =$ $x^2 - 2x + 2 - 1$ = $x^2 - 2x + 1$

Procedimiento de Ricardo:

$A = (x-1)^2 = x^2 - x - (x-1) =$ $x^2 - x - x + 1$ = $x^2 - 2x + 1$

Los trinomios que obtuvieron en ambos procedimientos deben ser iguales. Si no resultaron así, revisen sus operaciones y corríjanlas hasta obtener el mismo trinomio cuadrado perfecto.

c) Otra manera de obtener el área del cuadrado azul de la figura 3 consiste en elevar al cuadrado el binomio $x-1$. Háganlo y no olviden reducir los términos semejantes.

$\boxed{x^2}$ $\boxed{+1}$

$(x-1)^2 = (x-1)\,(x-1) = x^2 - x -$ x + 1 = $x^2 - 2x + 1$

$\boxed{-x}$ + Trinomio cuadrado perfecto

$\boxed{-x}$ $\boxed{-2x}$

II. Otengan el resultado de $(y-a)^2$, para verificar si al elevar al cuadrado cualquier binomio que representa una diferencia se obtiene un trinomio cuadrado perfecto. No olviden sumar los términos semejantes.

$\boxed{y^2}$ $\boxed{a^2}$

$(y-a)^2 = (y-a)\,(y-a) = y^2 - ay -$ ay + a^2 = $y^2 - 2ay + a^2$

$\boxed{-ay}$

$\boxed{ay}$ $\boxed{-2ay}$

¿Obtuvieron un trinomio cuadrado perfecto? ______

Comparen sus soluciones y comenten cómo se puede obtener el trinomio cuadrado perfecto que corresponde al cuadrado de una diferencia, sin seguir el procedimiento de la actividad II.

18

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos tengan claro que, aunque en el procedimiento de Ricardo y en el de Ana se usaron diferentes bloques, con ambos se obtiene el área del cuadrado azul.

Si tienen dudas, escriba en el pizarrón lo siguiente:

Bloques que restó Ricardo al cuadrado de área x^2:

$x-1$

x

Bloques que restó Ana al cuadrado de área x^2:

$x-1$

$x-1$

1

Luego pregúnteles:

¿Quién de los dos restó una mayor área?

¿Pueden comprobar usando los bloques algebraicos que uno de los dos restó una mayor área?

Una vez que ensayen con los bloques, pregúnteles si es equivalente lo que restó Ana a lo que restó Ricardo y por qué.

Propósito de la actividad. Al igual que en la sesión 1, aquí se pretende que los alumnos se den cuenta de que pueden obtener el trinomio cuadrado perfecto sin necesidad de efectuar toda la multiplicación. Si no saben cómo hacerlo, lean juntos la información del apartado *A lo que llegamos*.

>>> A lo que llegamos

Al elevar al cuadrado una diferencia también se obtiene un trinomio cuadrado perfecto, pero ahora el doble del producto de los términos del binomio tiene signo menos.

El siguiente procedimiento permite obtener el resultado de manera simplificada.

x se eleva al cuadrado

b se eleva al cuadrado

$$(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$$

El producto de (x) y ($-b$) se duplica

Te recomendamos tomar en cuenta los dos aspectos siguientes:

a) El cuadrado de una diferencia puede expresarse como el cuadrado de una suma. Por ejemplo:

$$(x - 12)^2 = [x + (-12)]^2 = x^2 + 2(x)(-12) + (-12)^2$$
$$= x^2 - 24x + 144$$

b) Hay expresiones que parecen trinomios cuadrados perfectos pero no lo son, por ejemplo: $x^2 - 2x + 9$.

Como tiene dos términos que son cuadrados: x^2 y 9, podría suponerse que el trinomio es resultado de desarrollar $(x - 3)^2$, sin embargo $(x - 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 - 6x + 9$.

Recuerda que:

El producto de un número negativo elevado al cuadrado es positivo.

$(-12)^2 = (-12)(-12) = +144$

>>> Lo que aprendimos

1. Encuentra el cuadrado de los siguientes números aplicando la regla para elevar al cuadrado un binomio, tal como se muestra en los dos ejemplos.

$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2(100)(3) + 2^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$

$499^2 = (500 - 1)^2 = 500^2 + 2(500)(-1) + 1^2 = 250\,000 - 1\,000 + 1 = 249\,001$

a) $19^2 = (20 - 1)^2 = (\underline{20})^2 - 2(\underline{20})(\underline{1}) + (\underline{-1})^2 = \underline{400 - 40 + 1} = \underline{361}$

b) $51^2 = (50 + 1)^2 = (\underline{50})^2 + 2(\underline{50})(\underline{1}) + (\underline{1})^2 = \underline{2\,500 + 100 + 1} = \underline{2\,601}$

19

Sugerencia didáctica. Puede proponer a los alumnos los siguientes ejercicios para verificar si un trinomio es un trinomio cuadrado perfecto (TCP):

- $x^2 - 4xy + y^2$ no es un TCP porque el término $4xy$ no es el doble del producto de las raíces de los otros dos términos. El trinomio cuadrado perfecto sería $x^2 - 2xy + y^2$.
- $4m^2 + 20m + 25$ sí es un TCP.
- $x^2 + 5x + 6$ no es un TCP.

También puede pedir a los alumnos que escriban un trinomio que sí sea TCP y otro que no lo sea.

Respuestas. En este inciso los alumnos deben elegir cómo quieren hacer el cálculo. Dos posibilidades serían:

$999^2 = (990 + 9)$
$= (990)^2 + 2\,(990)\,(9) + (9)^2$
$= 980\,100 + 17\,820 + 81$
$= 998\,001$

$999^2 = (1\,000 - 1)$
$= (1\,000)^2 - 2\,(1\,000)\,(1) + (1)^2$
$= 1\,000\,000 - 2\,000 + 1$
$= 998\,001$

Posibles dificultades. Los alumnos podrían poner respuestas erróneas como $(x - 3)^2$. Usted puede pedirles que eleven al cuadrado ese binomio para que se den cuenta de que no van a obtener el término $-14x$ sino $-6x$.

Posibles dificultades. Es un ejercicio que puede resultar complicado por el empleo de números decimales. Puede sugerir a los estudiantes que usen la calculadora. También puede recordarles que el término $3x$ es el doble del producto de las raíces de los otros dos términos.

Sugerencia didáctica. Para este ejercicio puede ser útil recordar cómo se multiplican las fracciones y así poder elevarlas al cuadrado.

c) $105^2 = (100 + 5)^2 = (\underline{100})^2 + 2\,(\underline{100})\,(\underline{5}) + (\underline{5})^2 = \underline{10\,000+1\,000+25} = \underline{11\,025}$

d) $198^2 = (200 - 2)^2 = (\underline{200})^2 - 2\,(\underline{200})\,(\underline{2}) + (\underline{2})^2 = \underline{40\,000-800+4} = \underline{39\,204}$

e) $999^2 = (\_\_\_\_)^2 = (\_\_\_\_)^2 - 2\,(\_\_\_\_)\,(\_\_\_\_) + (\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

2. Escribe el binomio al cuadrado o el trinomio que falta en cada renglón. ¡Ten cuidado, hay un trinomio que no es cuadrado perfecto! Eleva al cuadrado los binomios que obtengas para verificar si corresponden al trinomio presentado en la columna izquierda de la tabla.

Binomio al cuadrado	Trinomio
$(x - 7)^2$	$x^2 - 14x + 49$
$(2x + 1)^2$	$4x^2 + 4x + 1$
$(x - 12)^2$	$x^2 - 24x + 144$
$(x + 12)^2$	$x^2 + 24x + 144$
No se puede	$x^2 - 14x + 9$
$(x + 1.5)^2$	$x^2 + 3x + 2.25$
$(x + \frac{1}{2})^2$	$x^2 + x + \frac{1}{4}$
$(2x - \frac{1}{2})^2$	$4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

a) Escribe el trinomio de la tabla que no es cuadrado perfecto: ________

b) ¿Por qué no es un trinomio cuadrado perfecto? ________

SESIÓN 3

LA DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS

>>> Para empezar

Dos binomios que sólo difieren en el signo de uno de sus términos se llaman *binomios conjugados*, por ejemplo $x + 3$ es el binomio conjugado de $x - 3$; $2x + 6$ es el binomio conjugado $-2x + 6$.

>>> Consideremos lo siguiente

A un cuadrado de área x^2 se le ha cortado en una de sus esquinas un cuadrado de área a^2 en una de sus esquinas, tal como se muestra en la figura 6.

La figura 6 se cortó por la línea punteada roja y con las dos piezas se formó el rectángulo de la figura 7.

20

Propósito de la sesión. Descubrir la regla para factorizar una diferencia de cuadrados.

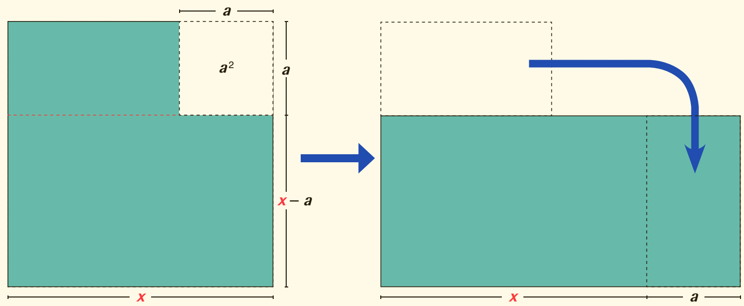


Figura 6 Figura 7

a) ¿Cuál es el área de la superficie azul de la figura 6? $x^2 - a^2$

b) ¿Qué binomios tienes que multiplicar para obtener el área del rectángulo formado por las dos piezas en la figura 7?

Área = ($x + a$) ($x - a$)

c) Realiza la multiplicación término por término y suma los términos semejantes para obtener el área de la figura 7.

($x + a$) ($x - a$) = $x^2 - xa + xa - a^2$

= $x^2 - a^2$

Comparen sus soluciones.

>>> Manos a la obra

I. Calquen en una hoja la figura 6, corten por la línea punteada y formen el rectángulo de la figura 7.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la medida de la base del rectángulo azul de la figura 7? $x + a$

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la medida de su altura? $x - a$

c) Expresen la diferencia de los cuadrados x^2 y a^2 como el producto de dos binomios conjugados.

$x^2 - a^2$ = ($x + a$) ($x - a$)

d) Factoricen $16 - 9x^2$ como una diferencia de cuadrados.

$16 - 9x^2$ = ($4 + 3x$) ($4 - 3x$)

21

Posibles dificultades. Hay alumnos a quienes les cuesta trabajo distinguir entre expresiones como xa y $x + a$. Si sus alumnos cometen este tipo de errores, ésta puede ser una actividad útil para corregirlos. Aclare que la medida de la base del rectángulo de la figura 7 mide $x + a$ porque son dos longitudes que se suman. La expresión xa tendría sentido al hablar, por ejemplo, del área de un rectángulo cuya base midiera x y su altura a, porque en ese caso ambas medidas se multiplicarían para hallar el área.

Propósito de la actividad. En esta sesión se presenta a los alumnos la multiplicación de dos binomios conjugados.

Si logran resolver correctamente el inciso b) se darán cuenta de que el resultado de la multiplicación término por término ($x^2 - a^2$) es igual al área de la figura 6 (un cuadrado de área x^2 al que se le resta un cuadrado de área a^2). Si por alguna razón no logran ver que las áreas son iguales, permítales seguir avanzando, más adelante podrán hacer correcciones.

Posibles dificultades. Aunque para algunos alumnos no exista dificultad, quizá convenga explicar qué significa "diferencia de cuadrados". Coménteles que, en el caso de la figura 6, se parte de un cuadrado de área x^2 al que se le quita un cuadrado de área a^2; entonces, para obtener la nueva área hay que restar $x^2 - a^2$, y a la resta también se le llama "diferencia". La diferencia de cuadrados es una resta de cantidades elevadas al cuadrado.

Sugerencia didáctica. Deténganse a analizar la igualdad obtenida en el inciso d). Haga hincapié en que, lo que está del lado izquierdo del signo igual ($x^2 - a^2$) es la resta que hay que efectuar para obtener el área de la figura 1 una vez hecho el corte; mientras que, lo que está del lado derecho del signo igual ($x + a$) ($x - a$) es la medida de la base por la medida de la altura de la figura 7.

Respuestas.

e) En todos se obtuvo una diferencia de cuadrados.

f) En ninguno.

Posibles dificultades. Es probable que algunos estudiantes no crean que $-4x^2 + 9$ es una diferencia de cuadrados. Sugiérales cambiar de lugar los términos para que opinen si tras el cambio la expresión sí es una diferencia de cuadrados. Quedaría $9 - 4x^2$.

Para que verifiquen que $-4x^2 + 9 = 9 - 4x^2$, dígales que prueben con varios valores de x, por ejemplo, para $x = 3$ sería:

$-4(3)^2 + 9 = 9 - 4(3)^2$

$-36 + 9 = 9 - 36$

$-27 = -27$

II. Realicen las siguientes multiplicaciones término por término y verifiquen si después de sumar los términos semejantes obtienen una diferencia de cuadrados.

$\boxed{4x^2}$ $\boxed{-9}$

a) $(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 6x + \underline{6x} - \underline{9} = \underline{4x^2 - 9}$

$\boxed{6x}$ $\boxed{-6x}$

b) $(-2x + 3)(2x + 3) = \underline{-4x^2 - 6x + 6x + 9} = \underline{-4x^2 + 9}$

c) $(-2x - 3)(2x - 3) = \underline{-4x^2 + 6x - 6x + 9} = \underline{-4x^2 + 9}$

d) $(-2x + 3)(-2x - 3) = \underline{4x^2 + 6x - 6x - 9} = \underline{4x^2 - 9}$

e) ¿En qué casos se obtuvo una diferencia de cuadrados? ____________

f) ¿En qué casos no? ____________

Comenten como, a partir de una diferencia de cuadrados, podrían identificar los binomios conjugados que la producen al ser multiplicados.

>>> A lo que llegamos

El producto de **dos binomios conjugados es una diferencia de cuadrados.**

Binomios conjugados $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ **Diferencia de cuadrados**

La factorización de una diferencia de cuadrados son dos binomios conjugados.

La relación anterior puede aplicarse para multiplicar parejas de números,. Para ello, tienen que presentarlos como si fueran binomios conjugados. Ejemplos:

$(102)(98) = (100 + 2)(100 - 2) = 10\,000 - 4 = 9\,996$

$(47)(53) = (50 - 3)(50 + 3) = 2\,500 - 9 = 2\,491$

Posibles respuestas. Se espera que los alumnos puedan dar respuestas como: “al multiplicar dos binomios conjugados se obtiene una diferencia de cuadrados”, o “una diferencia de cuadrados es el primer término al cuadrado menos el segundo término al cuadrado”. Si resulta difícil para los alumnos, lean juntos el apartado *A lo que llegamos*.

>>> Lo que aprendimos

1. Realiza las siguientes multiplicaciones. Expresa cada pareja de factores como binomios conjugados s y obtén el producto mediante una diferencia de cuadrados.

a) (21) (19) = (20 + 1) (20 – 1) = 400 – 1 = 399

b) (32) (28) = (30 + 2) (30 – 2) = 900 – 4 = 896

c) (97) (103) = (100 – 3) (100 + 3) = 10 000 – 9 = 9 991

d) (1 002) (998) = (1 000 + 2) (1 000 – 2) = 1 000 000 – 4 = 999 996

2. Completa la siguiente tabla escribiendo para cada pareja de binomios conjugados su respectiva diferencia de cuadrados y viceversa.

Binomios conjugados	Diferencia de cuadrados
$(x + 8)(x - 8)$	$x^2 - 64$
$(2x + 3)(2x - 3)$	$4x^2 - 9$
$(x + 10)(x - 10)$	$x^2 - 100$
$(2x + 5)(2x - 5)$	$4x^2 - 25$
$(-3x + 2y)(3x + 2y)$	$-9x^2 + 4y^2$

A FORMAR RECTÁNGULOS

SESIÓN 4

Propósito de la sesión. Descubrir la regla para multiplicar dos binomios con término común e invertirla para factorizar un trinomio de segundo grado.

>>> Para empezar

I. En la figura 8 se muestra un rectángulo formado con los bloques algebraicos.

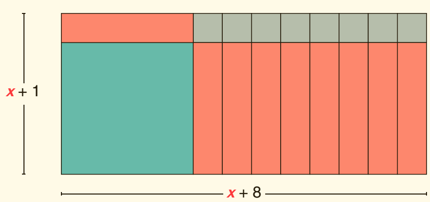


Figura 8

Respuestas.

a) 1

b) 9

c) 8

d) $x^2 + 9x + 8$

Posibles procedimientos. Para conocer el área del rectángulo, los alumnos podrían contar cada bloque, o bien, multiplicar la medida de la base por la de la altura. A los que contaron los bloques de la figura, pídales que efectúen la multiplicación para verificar sus resultados y, viceversa, a quienes multiplicaron, pídales que cuenten los bloques.

a) ¿Cuántos bloques de área x^2 se utilizaron? ________

b) ¿Cuántos de área x? ________

c) ¿Cuántos de área 1? ________

d) ¿Cuál es su área? ________

II. Con los bloques algebraicos apropiados x^2, x y 1 reproduce las figuras 9, 10 y 11 de tal manera que tengan el área indicada. Traza en cada caso los bloques que utilizaste para formarla y escribe la medida de su base y de su altura.

Área = $x^2 + 9x + 14$

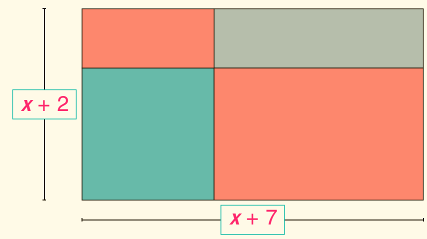


Figura 9

Área = $x^2 + 9x + 18$

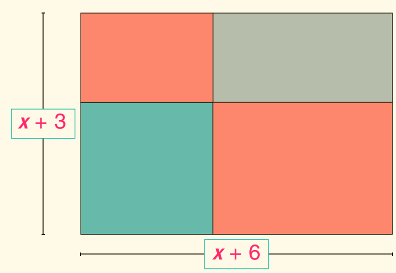


Figura 10

Área = $x^2 + 9x + 20$

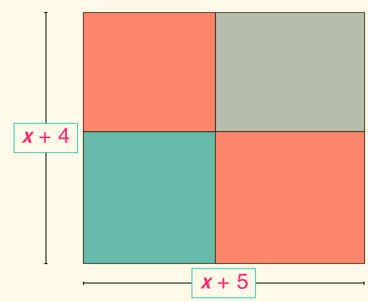


Figura 11

24

>>> Consideremos lo siguiente

Completa la tabla siguiente.

Primer factor (Medida de la base)	Segundo factor (Medida de la altura)	Producto (Área del rectángulo)
$x + 8$	$x + 1$	$x^2 + 9x + 8$
$x + 7$	$x + 2$	$x^2 + 9x + 14$
$x + 6$	$x + 3$	$x^2 + 9x + 18$
$x + 5$	$x + 4$	$x^2 + 9x + 20$
$x + 3$	$x + 2$	$x^2 + 5x + 6$
$x + 4$	$x + 1$	$x^2 + 5x + 4$

a) ¿Qué regla sigues para encontrar el producto si conoces los dos factores?

b) Si conoces el producto, ¿cómo obtienes los factores?

Comparen sus soluciones.

Sugerencia didáctica. Dé un tiempo para que los alumnos analicen la tabla que acaban de llenar, después escuche dos o tres opiniones y traten de escribir las respuestas de forma conjunta.

Respuestas. Podría ser algo como:

a) Sumo los números para encontrar el coeficiente del término que tiene x y los multiplico para encontrar el término numérico.

b) Busco dos números que sumados den como resultado el coeficiente del término que tiene x y que multiplicados den como resultado el término numérico.

>>> Manos a la obra

I. En la figura 12, con bloques algebraicos se formó un rectángulo de base $x + 5$ y altura $x + 2$.

a) Observen la figura 12 y, sin hacer la multiplicación término por término, encuentren el producto de $(x + 5)(x + 2) =$

b) ¿Cómo lo obtuvieron?

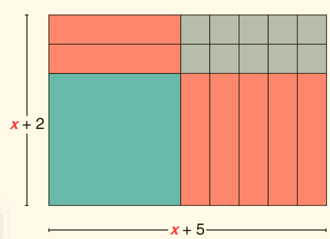


Figura 12

Los binomios $(x + 5)$ y $(x + 2)$ tienen un término común que es x. Estos binomios se llaman binomios de término común.

5 y 2 son los términos NO comunes.

25

Respuestas.

a) $x^2 + 7x + 10$

b) Los estudiantes pueden responder esta pregunta de distintas maneras, por ejemplo, decir que contaron bloque por bloque de la figura o que se fijaron en los binomios y obtuvieron la respuesta sin tener que hacer la multiplicación término por término.

Respuestas.

d) Se multiplica (x) por (x).

e) Se suman.

f) Se multiplican.

Respuestas.

a) 3

b) –10

c) $x^2 + 3x - 10$

c) Ahora realicen la multiplicación término por término.

$\boxed{x^2}$ $\boxed{10}$

$(x + 5)\,(x + 2) = x^2 + 2x + \underline{\;5x\;} + 10 = \underline{\;x^2 + 7x + 10\;}$

$\boxed{5x}$ $+$

$\boxed{2x}$ $\boxed{7x}$

d) ¿Qué operación hacen para obtener el término x^2? ______

e) ¿Qué operación hacen con los términos 5 y 2 de los binomios para obtener el coeficiente del término $7x$ del producto? ______

f) ¿Qué operación hacen con 5 y 2 para obtener el término 10?

______

g) Apliquen lo anterior para completar la igualdad.

$(x + 6)\,(x + 3) = x^2 + \underline{\;9\;}\,x + \underline{\;18\;}$

Comparen sus soluciones y discutan cómo obtuvieron la regla para multiplicar dos binomios con término común.

>>> A lo que llegamos

Para obtener el producto de dos binomios con término común se puede hacer lo siguiente:

$$(x + 4)\,(x + 3) = x^2 + 7x + 12$$

1°. El término común x se eleva al cuadrado.

2°. Se suman los términos no comunes: 4 + 3 = 7; el resultado 7 se multiplica por x.

3°. Se multiplican los términos no comunes: (4) (3) = 12

II. Apliquen la regla anterior para obtener el producto de $(x + 5)\,(x - 2)$:

a) ¿Cuánto obtienen al sumar (+5) + (–2)? ______

b) ¿Cuánto obtienen al multiplicar (+5) + (–2)? ______

c) Escriban el producto sin realizar la multiplicación término por término

$(x + 5)\,(x - 2) =$ ______

26

d) Ahora multipliquen término por término para verificar el resultado anterior.

$\boxed{x^2}$ $\boxed{-10}$

$(x + 5)(x - 2) = x^2 - 2x + \underline{\ 5x\ } - \underline{\ 10\ } = \underline{\ x^2 + 3x - 10\ }$

$\boxed{5x}$

$\boxed{-2x}$

e) ¿Son iguales los productos obtenidos en los incisos c) y d)? ________

Comparen sus soluciones, discutan y verifiquen si la regla funciona par cualquier multiplicación de binomios con término común.

III. Al multiplicar dos binomios con término común se obtuvo:

$(\ y + 8\ )(\ y + 2\ ) = y^2 + 10y + 16$

a) ¿Cuál es el término común? ________

b) ¿Qué números se multiplicaron para obtener 16? ________

c) ¿Cuánto deben sumar esos números? ________

d) Escriban en los paréntesis los factores que correspondan al trinomio $y^2 + 10y + 16$.

e) Multipliquen en su cuaderno los binomios término por término para verificar el resultado anterior.

Comparen sus soluciones y comenten qué operaciones tienen que realizar para encontrar el término común y los términos no comunes de los binomios.

>>> A lo que llegamos

Para factorizar el trinomio $x^2 + 5x + 4$, se puede hacer lo siguiente:

1º. Se obtiene el término común; en este caso es x, porque $(x)(x) = x^2$

$x^2 + 5x + 4 = (x + \_\_\_\_\_\_)(x + \_\_\_\_\_\_)$

2º. Se buscan parejas de números enteros que multiplicados den 4.

$(2)(2) = 4 \quad (-2)(-2) = 4 \quad (4)(1) = 4 \quad (-4)(-1) = 4$

3. Se selecciona la pareja de números que sumada dé el coeficiente del término $5x$; en este caso, se seleccionan 4 y 1 porque $4 + 1 = 5$.

Por lo tanto:

$x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$

27

Respuesta.

e) Sí, son iguales.

Sugerencia didáctica. Si hay tiempo, pida a la mitad de los alumnos que escriban una multiplicación de binomios con término común, y a la otra mitad un trinomio que sea resultado de la multiplicación de dos binomios con término común. Luego, intercambie entre los alumnos sus producciones. Los que hayan recibido el binomio deben resolverlo, los otros deben obtener una multiplicación de binomios que dé lugar al trinomio que recibieron.

También pídales que verifiquen que el compañero no haya cometido errores y si es cierto que la regla funciona para cualquier multiplicación de binomios con término común.

Posibles respuestas. También es correcto invertir el orden de los binomios, con lo que se tendría $(y + 2)(y + 8)$; sin embargo, para algunos estudiantes puede no ser tan claro que se obtiene el mismo resultado. Si lo considera útil, proponga varios binomios y pídales que inviertan su orden para que verifiquen que se obtiene lo mismo.

Respuestas.

a) y porque es necesario obtener en el producto una y^2.

b) 8 y 2.

c) 10

Sugerencia didáctica. Explique a los alumnos qué quiere decir "factorizar". Puede comentarles que una expresión como $x^2 + 5x + 4$ está escrita como una suma, en este caso, de tres términos; factorizar esa expresión significa que se va a representar como una multiplicación, en este caso, de dos binomios con un término común.

También se pueden factorizar expresiones como $14 + 6 = 20 \times 2$.

Sugerencia didáctica. Antes de que los alumnos resuelvan los ejercicios, identifiquen en grupo cuáles son los términos comunes y cuáles los no comunes en cada uno de los casos, con la finalidad de que puedan aplicar la regla que han estado manejando en casos en los que no hay literales.

Propósito del programa. Mostrar cómo se obtiene la regla para multiplicar dos binomios con término común y para factorizar un trinomio de segundo grado.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Descubrir la regla para factorizar binomios con factor común.

>>> Lo que aprendimos

1. Aplica el producto de los binomios con término común en cada multiplicación.

a) (23) (25) = (20 + 3) (20 + 5) = 400 + (8) (20) + 15 = 400 + 160 + 15 = 575

b) (105) (98) = (100 + 5) (100 - 2) = 10 000 + 3 (100) – 10 = 10 000 + 300 – 10 = 10 290

c) (48) (49) = (50 – 2) (50 – 1) = 2 500 – 3 (50) + 2 = 2 500 – 150 + 2 = 2 352

2. Completa la tabla.

Binomios con término común	Trinomio de segundo grado
$(x + 8)(x + 2)$	$x^2 + 10x + 16$
$(x + 6)(x + 3)$	$x^2 + 9x + 18$
$(x - 5)(x + 2)$	$x^2 - 3x - 10$
$(x + 2)(x + 1)$	$x^2 + 3x + 2$
$(x - 2)(x - 1)$	$x^2 - 3x + 2$
$(x + a)(x + b)$	$x^2 + (a + b)x + ab$

SESIÓN 5

UN CASO ESPECIAL DE FACTORIZACIÓN

>>> Consideremos lo siguiente

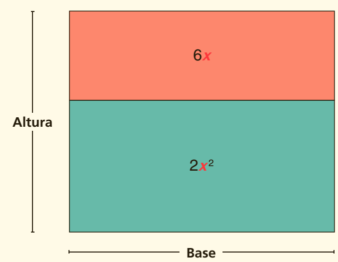


Figura 13

No siempre ocurre que el área de un rectángulo corresponda a un trinomio. Por ejemplo, en la figura 13 se representa un rectángulo de área $2x^2 + 6x$.

a) ¿Cuál es la medida de la base?

____

b) ¿Cuál es la medida de la altura?

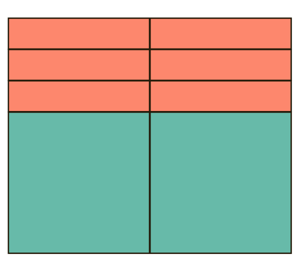
____

Comparen sus respuestas.

28

Respuestas.

a) $2x$ porque en el rectángulo azul debe haber dos cuadrados, cada uno de lado x.



b) $x + 3$. Sabemos que ambos rectángulos tienen la misma base ($2x$), y que en el rectángulo rojo deben caber seis rectángulos de área x. Esos rectángulos están "acostados", acomodados de tres en tres.

Posibles dificultades. Para algunos estudiantes puede ser complicado hallar las medidas de los lados del rectángulo. Si es el caso, sugiérales que pasen al apartado siguiente en donde podrán utilizar los bloques algebraicos para cubrir la figura 13.

>>> Manos a la obra

I. Sobre la figura 13, tracen dos bloques de área x^2 y seis de área x. Después, completen la tabla siguiente:

Rectángulo	Área	(Base) (Altura)
Azul	$2x^2$	$(2x)(\ x\ )$
Rojo	$6x$	$(2x)(\ 3\ )$
Completo	$2x^2 + 6x$	$(2x)(\ x + 3\ )$

Como el factor $2x$ aparece en las tres multiplicaciones de la última columna, es un factor común de los términos $2x^2$ y $6x$.

¿Son iguales las expresiones que representan las medidas de las alturas de los rectángulos azul y rojo? No

Estas expresiones se llaman *factores no comunes* de los términos $2x^2$ y $6x$.

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Qué otros factores comunes pueden tener los términos $2x^2$ y $6x$?

b) ¿Pueden formarse rectángulos diferentes al de figura 13, con dos bloques de área x^2 y seis de área x? Dibújenlos en el pizarrón y expresen su área $2x^2 + 6x$ por medio de dos factores.

Propósito de las preguntas. Se pretende que los alumnos consideren otras posibles factorizaciones para el binomio $2x^2 + 6x$. Para ello, pueden apoyarse en los bloques utilizándolos para construir rectángulos distintos al de la figura 15 y cuya área sea también $2x^2 + 6x$. Por ejemplo, podrían construir un rectángulo con lados x y $2x + 6x$.

>>> A lo que llegamos

Para factorizar un binomio tal como $4x^2 + 20x$ se puede hacer lo siguiente:

1°. Se factoriza cada término del binomio de manera que el factor común contenga la literal y el máximo valor posible del coeficiente:

$$4x^2 = (4x)(x)$$

$$20x = (4x)(5)$$

2°. Se expresa la factorización: $4x^2 + 20x = (4x)(x + 5)$

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos factoricen distintas expresiones aprendidas a lo largo de la secuencia. Si lo considera conveniente, pídales que realicen las multiplicaciones término por término para verificar sus resultados.

Integrar al portafolios. Utilice las actividades de este apartado para ver si los alumnos han comprendido lo estudiado en la secuencia. Si fuera necesario, hagan un repaso de los apartados *A lo que llegamos*.

Respuestas.

a) Suman 110.

b) Multiplicando la cifra en la posición de las unidades del primer factor por la correspondiente cifra en el segundo factor.

II. Apliquen la regla anterior para factorizar $14x^2y - 21xy^2$

$$14x^2y = (7xy)(\ 2x\ )$$

$$-21xy^2 = (7xy)(\ -3y\ )$$

$$14xy^2 - 21xy^2 = (7xy)(\ 2x - 3y\ )$$

Comparen sus soluciones, discutan y verifiquen si la regla funciona para factorizar cualquier tipo de polinomios.

>>> Lo que aprendimos

1. Expresa los siguientes polinomios como el producto de dos factores.

a) $x^2 - 18x + 81 = (\ x - 9\ )(\ x - 9\ )$

b) $x^2 + 20x + 100 = (\ x + 10\ )(\ x + 10\ )$

c) $x^2 - 400 = (\ x - 20\ )(\ x + 20\ )$

d) $x^2 + 8x - 20 = (\ x + 10\ )(\ x - 2\ )$

e) $4x^2 + 8x = (\ 4x\ )(\ x + 2\ )$

f) $x^2 + 11x + 24 = (\ x + 8\ )(\ x + 3\ )$

g) $x^2 + 10x + 24 = (\ x + 6\ )(\ x + 4\ )$

h) $x^2 + 14x + 24 = (\ x + 12\ )(\ x + 2\ )$

i) $x^2 + 2x - 24 = (\ x + 6\ )(\ x - 4\ )$

j) $9x^2 - 36x = (\ 9x\ )(\ x - 4\ )$

2. Factorizando podría establecerse una regla útil para calcular el producto de ciertos números; examina las siguientes multiplicaciones y trata de encontrar la relación entre los factores involucrados y el resultado. ¿Se puede establecer una regla general?

(12) (18) = 216 (23) (27) = 621 (31) (39) = 1 209 (54) (56) = 3 024

a) ¿Qué relación matemática encuentras entre las cifras de las unidades de los factores? ____________________

b) ¿Cómo obtienes el número formado por las dos cifras de la derecha del producto?

____

____

30

c) ¿Cómo obtienes el número formado por las demás cifras de la izquierda del producto?

d) Si ya descubriste la regla, calcula mentalmente el resultado de cada operación.

(13) (17) = 221 (43) (47) = 2 021 (61) (69) = 4 209

(74) (76) = 5 624 (88) (82) = 7 216 (191) (199) = 38 009

>>> Para saber más

Sobre productos notables y factorización, consulta:
http://interactiva.matem.unam.mx
Ruta1: Álgebra → Una embarrada de álgebra → Binomio al cuadrado
Ruta1: Álgebra → Una embarrada de álgebra → Diferencia de cuadrados
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora (PUEMAC), UNAM.

Respuesta.

c) Se multiplica la cifra de las decenas por el siguiente número: si el número de las decenas es 2 se multiplica por 3; o bien, se eleva al cuadrado la cifra de las decenas y luego se suma de nuevo la cifra.

Sugerencia didáctica. Una vez que contesten la pregunta del inciso d), pida a tres o cuatro alumnos que lean su respuesta.

Luego pídales que expliquen por qué es cierto que da lo mismo multiplicar la cifra de las decenas por el siguiente número, que elevar al cuadrado la cifra de las decenas y luego sumar de nuevo la cifra.

Propósito de la sesión. Formular argumentos para justificar que cualesquiera de los lados opuestos de un paralelogramo son iguales. Ésta es una propiedad que ya se ha utilizado para medir el perímetro o el área de estas figuras; ahora se va a justificar que los paralelogramos tienen, efectivamente, esta propiedad con base en el hecho de que sus lados opuestos son paralelos.

Materiales. Regla y tijeras.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos cuáles son los paralelogramos. Si es necesario recuérdeles que son los cuadriláteros que tienen dos pares de lados opuestos paralelos.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Verificar, mediante la rotación, que la diagonal de un paralelogramo divide a éste en dos triángulos congruentes.

Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 1.

Propósito de la actividad. Que los alumnos determinen, al observar, al medir o por las características que ya conocen de los cuadriláteros, cuáles de ellos tienen cualesquiera de sus lados opuestos iguales.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban, junto a las figuras, el nombre de cada una. De manera breve, solicíteles que mencionen sus características principales (las figuras son: cuadrado, rectángulo, trapecio isósceles, rombo, romboide o paralelogramo, trapezoide, cuadrilátero no convexo, trapecio rectángulo y trapezoide simétrico o deltoide). Es posible que los alumnos no sepan el nombre de todas las figuras, pero sí es importante que identifiquen correctamente las primeras cinco. Pregúnteles también cuáles de las figuras son paralelogramos (lo son el rectángulo, el cuadrado, el rombo y el romboide).

SECUENCIA 2

Triángulos congruentes y cuadriláteros

En esta secuencia aplicarás criterios de congruencia para la justificación de propiedades sobre los cuadriláteros.

LADOS OPUESTOS IGUALES

SESIÓN 1

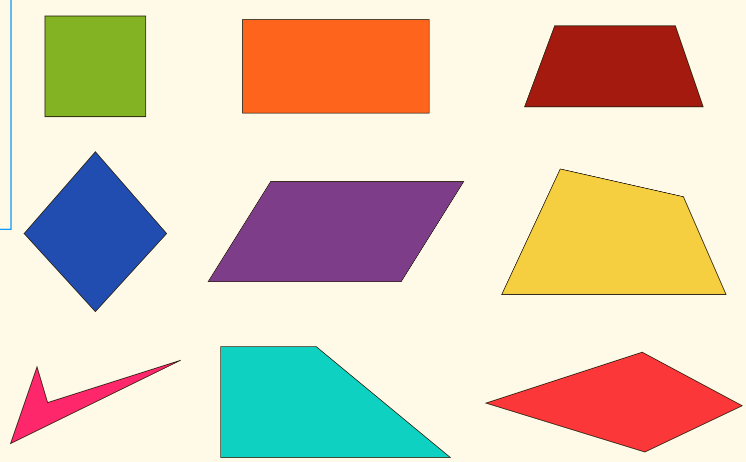
>>> Para empezar

A lo largo de la historia se han hecho afirmaciones matemáticas que por mucho tiempo se creyeron ciertas, luego fueron reconocidas como erróneas. Para evitarlo, los matemáticos exigieron que las afirmaciones matemáticas tuvieran una prueba rigurosa, es decir, una justificación que no deje lugar a dudas.

En esta sesión conocerás una de estas justificaciones rigurosas en la geometría.

>>> Consideremos lo siguiente

Observen los siguientes cuadriláteros, escojan cuáles tienen sus lados opuestos iguales.



32

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Formas geométricas.
Subtema
Figuras planas.
Antecedentes
En la primaria los alumnos clasificaron las figuras con base en sus características y propiedades. Estas características y propiedades se obtuvieron de manera informal, a través de la observación o de la medición. En **Matemáticas I** y **II** de secundaria los alumnos encontraron las justificaciones de fórmulas para calcular el área, el perímetro y la medida de los ángulos internos de algunas figuras, al presentar argumentos basados en hechos que ya conocían. Ahora los alumnos van a estudiar cómo justificar dos propiedades de los paralelogramos; para ello utilizarán los criterios de congruencia de triángulos que estudiaron en la secuencia 25 de **Matemáticas II**.

Propósitos de la secuencia
Aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Lados opuestos iguales** Formular argumentos para justificar que cualesquiera de los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.	Aula de medios La diagonal de un paralelogramo (Geometría dinámica)
2	**Puntos medios** Formular argumentos para mostrar que, si las diagonales de un cuadrilátero se cortan por el punto medio, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.	Programa 3 Aula de medios Cómo verificar la congruencia... (Geometría dinámica) Interactivo

De las siguientes propiedades, ¿cuál tienen en común los cuadriláteros que eligieron?

a) Sus cuatro lados son iguales.

b) Cualesquiera de sus lados opuestos son paralelos.

c) Sus cuatro ángulos son iguales.

d) Sus diagonales son perpendiculares.

Dibujen dos cuadriláteros que satisfagan la propiedad que eligieron anteriormente y verifiquen si cualesquiera de sus lados opuestos son iguales.

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Qué diferencia hay entre que un cuadrilátero sea paralelogramo y que tenga sus pares de lados opuestos paralelos?

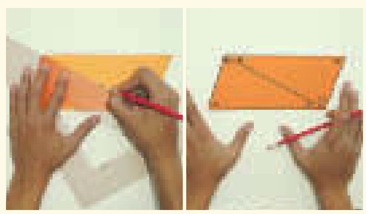
¿Será cierta la siguiente afirmación? Todos los paralelogramos tienen sus pares de lados opuestos iguales.

>>> Manos a la obra

I. Realicen la siguiente actividad.

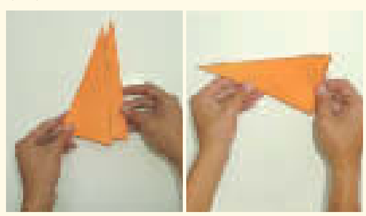
Paso 1. Dibujen en un papel un paralelogramo y recórtenlo.

Paso 2. Después tracen una diagonal y anoten los nombres a los vértices del paralelogramo tal como se muestra.



Paso 3. Recorten los dos triángulos por la diagonal.

Paso 4. Pongan un triángulo encima del otro hasta que parezcan uno solo.



Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen una propiedad en común de los cuadriláteros que señalaron y que identifiquen si esa propiedad es suficiente para que un cuadrilátero tenga sus lados opuestos paralelos.

Respuesta. b)

Sugerencia didáctica. Pida que cada miembro de las parejas dibuje un cuadrilátero y compare su respuesta con su compañero.

Posibles dificultades. Algunos alumnos podrían creer que el trapecio isósceles satisface la propiedad de que cualesquiera de sus lados opuestos son iguales, pues tiene un par de lados opuestos iguales; coménteles que deben ser los dos pares de lados. Otros alumnos podrían creer que el trapezoide simétrico también satisface la propiedad pues tiene dos pares de lados iguales; hágales saber que no es así pues deben ser los lados opuestos. Si lo considera necesario, recuérdeles que los lados opuestos no comparten ningún vértice.

3

Sugerencia didáctica. Pida al grupo que se pongan de acuerdo sobre cuáles son los cuadriláteros que tienen cualesquiera de sus lados opuestos iguales (son el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el paralelogramo) y cuál es la propiedad que tienen en común todos ellos.

Propósito de las preguntas. Que los alumnos identifiquen que no hay diferencia entre los dos conceptos y que identifiquen, con base en los ejemplos presentados, que la afirmación es cierta.

Propósito de la actividad. Que los alumnos experimenten y se familiaricen con el argumento que se va a utilizar para justificar la propiedad de los paralelogramos que consiste en que cualesquiera de sus lados opuestos son iguales. Es decir que al dividir el paralelogramo por una de las diagonales se obtienen triángulos congruentes. Para dibujar el paralelogramo pueden utilizar una hoja cuadriculada.

Durante la sesión se utiliza el romboide como el caso general de un paralelogramo, pues sabemos que sus lados opuestos son paralelos. No se sabe si sus ángulos son todos iguales (como en el caso del cuadrado y del rectángulo) o si sus lados son todos iguales (cuadrado y rombo).

Propósito de la pregunta. Que los alumnos recuerden cuándo dos triángulos son congruentes. Las figuras congruentes y los criterios de congruencia los estudiaron en la secuencia 25 de **Matemáticas II**.

Propósito de la actividad. Los alumnos deben justificar que los triángulos son congruentes utilizando un criterio de congruencia.

Posibles dificultades. Si observa que los alumnos no identifican correctamente los ángulos alternos internos, puede sugerirles que prolonguen los lados **BC** y **AD** del paralelogramo, para que puedan identificar las rectas paralelas (o también los lados **AB** y **DC**). Los ángulos entre paralelas los estudiaron en la secuencia 6 de **Matemáticas II**.

Sugerencia didáctica. Si lo considera conveniente, recuérdeles que, para saber que dos triángulos son congruentes, no es necesario conocer la medida de todos los lados y de todos los ángulos correspondientes, basta con saber que se cumple alguno de los tres criterios de congruencia: que tengan los tres lados correspondientes iguales (criterio LLL), que tengan dos lados correspondientes iguales y que el ángulo entre esos lados también sea igual (criterio LAL) o que tengan dos ángulos correspondientes iguales y el lado entre esos ángulos también sea igual (criterio ALA). Recupere algunas de las justificaciones para el inciso b), puede pedir a esas parejas que pasen a explicar su respuesta en la comparación grupal.

Respuesta. El criterio ALA.

Posibles dificultades. Si los alumnos no tienen todavía bien claro qué es lo que se está justificando, es posible que elijan alguno de los otros dos criterios; coménteles que todavía no se tiene la seguridad de que los lados opuestos del paralelogramo sean iguales, pues eso es precisamente lo que se va a justificar. Lo que puede determinarse, con base en que los lados opuestos son paralelos, es que los triángulos tienen dos ángulos iguales y el lado entre esos ángulos, el lado **DB**, es común. Es posible que algunos alumnos argumenten que los lados de los triángulos son iguales porque miden lo mismo (pueden haberlos medido con su regla); comente con el grupo que lo que se busca es una justificación general que no dependa de las medidas de una figura en particular. También es posible que, por la respuesta en el inciso a), sólo ubiquen que dos ángulos correspondientes son iguales.

Recuerden que:

Dos triángulos son congruentes si se pueden hacer corresponder sus lados y ángulos de tal manera que lados y ángulos correspondientes midan lo mismo.

a) ¿Qué lado quedó sobrepuesto con el lado **AB**? __________

b) ¿Qué lado quedó sobrepuesto con el lado **BD**? __________

c) ¿Qué lado quedó sobrepuesto con el lado **DA**? __________

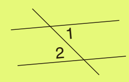
Comparen sus respuestas y comenten:

¿Son congruentes △**ABD** y △**CDB**?

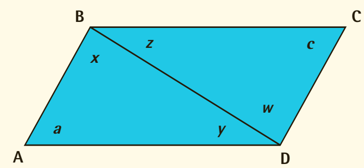
II. Resuelvan las siguientes actividades para justificar que los triángulos **ABD** y **CDB** son congruentes.

Recuerden que:

Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales.



∡1 = ∡2



a) De los ángulos marcados en la figura, ¿cuáles son alternos internos? (Por lo tanto iguales).

___z___ = ___y___ y ___x___ = ___w___

b) De los siguientes criterios de congruencia, ¿cuál usarían para justificar que los triángulos **ABD** y **CDB** son congruentes? Justifiquen su respuesta.

____

____

i) LLL (lado, lado, lado) ii) LAL (lado, ángulo, lado) iii) ALA (ángulo, lado, ángulo)

c) Algunas de las siguientes afirmaciones son consecuencia de que los triángulos **ABD** y **CDB** son congruentes, ¿cuáles son?

i) Los tres lados del △**ABD** son iguales y respectivamente los del △**CBD**.

ii) Los lados del △**ABD** son iguales a los correspondientes del △**CDB**.

iii) $\overline{BD}$ es igual al lado $\overline{CB}$.

iv) $\overline{AD}$ es igual al lado $\overline{BC}$.

v) $\overline{AB}$ es igual al lado $\overline{CB}$.

34

Respuesta. ii) y iv).

III. Expliquen cómo a partir de que los triángulos **ABD** y **CBD** son congruentes se puede afirmar que los lados opuestos del paralelogramo son iguales.

Comparen sus respuestas y comenten:

Además de los paralelogramos, ¿habrá otros cuadriláteros con lados opuestos son iguales?

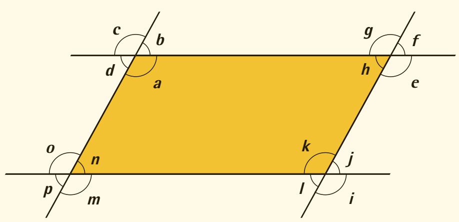
>>> A lo que llegamos

Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales, pues si se traza una de sus diagonales, se obtienen dos triángulos congruentes.

>>> Lo que aprendimos

La siguiente figura tiene marcados con diferentes letras algunos de los ángulos que en ella aparecen. Usa las etiquetas de esta figura para completar la justificación a la siguiente afirmación:

En un paralelogramo, ángulos opuestos son iguales.



Justificación:

*Los ángulos **a** y __k__ son opuestos en el paralelogramo. Para justificar que son iguales, observemos que ∡**a** es igual a ∡ __m__ pues son ángulos correspondientes (respecto a las dos paralelas horizontales y la transversal de la izquierda, ver figura). Luego ∡ __m__ es igual a ∡**k** pues son ángulos alternos internos (respecto a las dos paralelas no horizontales y la transversal definida por la base del paralelogramo, ver figura). Lo cual muestra que los ángulos opuestos ∡ __a__ y ∡**k** son iguales pues ambos son iguales a ∡ __m.__.*

De manera similar se puede justificar que los otros ángulos opuestos __n__ y __h__ son iguales.

Comparen sus respuestas.

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que, hasta este momento, sólo se ha justificado que los triángulos son congruentes, pero que lo que se quiere justificar es que los lados opuestos del paralelogramo son iguales. Es importante que identifiquen que la justificación concluye cuando se afirma que los lados son iguales porque son los lados correspondientes en dos triángulos congruentes.

3

Sugerencia didáctica. En particular, pida a los alumnos que comenten sus respuestas para el inciso b) de la actividad **II** y para la actividad **III**. Si lo considera pertinente, puede pedir al grupo que elaboren una justificación para esas actividades, con la que estén de acuerdo todos. Pida a los alumnos que regresen a las figuras iniciales para responder a la pregunta. No hay otros cuadriláteros con esta propiedad.

Sugerencia didáctica. Comente al grupo que, con la justificación que se hizo en la sesión, se puede afirmar que todos los paralelogramos tienen la propiedad de que sus lados opuestos son iguales, no sólo por lo que se ve en una figura o porque se puede medir en un ejemplo.

Propósito de la sesión. Que los alumnos formulen argumentos para mostrar que, si las diagonales de un cuadrilátero se cortan por el punto medio, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Propósito de la actividad. Identificar que un cuadrilátero puede ser de más de un tipo. Si lo considera conveniente, recuerde a los alumnos que el trapecio es un cuadrilátero con dos lados opuestos paralelos.

Propósito del programa. Obtener propiedades de los cuadriláteros y justificarlas mediante la aplicación de los criterios de congruencia de triángulos.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Utilizar la traslación y la rotación para verificar la congruencia entre dos figuras. Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 2.

Propósito de la actividad. Identificar el cuadrilátero que se forma con dos segmentos que se intersecan en su punto medio.

Esta actividad presenta las cuatro posibilidades en las que se pueden intersecar dos segmentos en su punto medio. Se considera si los segmentos son o no del mismo tamaño y si al cortarse se forman ángulos rectos o no.

Respuesta. Se forma un rombo, un cuadrado, un rectángulo y un paralelogramo, respectivamente.

SECUENCIA 2

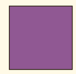
SESIÓN 2

PUNTOS MEDIOS

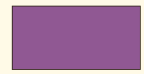
>>> Para empezar

En geometría existen muchos cuadriláteros y se clasifican en varios tipos, tales como cuadrados, rectángulos y paralelogramos. Estos tipos no son excluyentes, es decir, un mismo cuadrilátero puede ser de dos o más tipos. Por ejemplo, un cuadrado es a la vez un rectángulo, un trapecio y un paralelogramo.

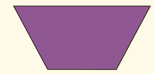
Describe a qué tipos pertenecen cada uno de los siguientes cuadriláteros:



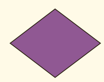
Cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo y trapecio.



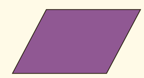
Rectángulo, paralelogramo y trapecio.



Trapecio.



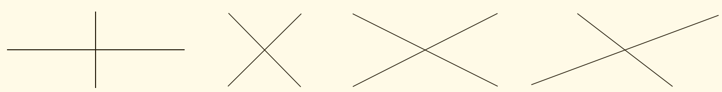
Rombo, paralelogramo y trapecio.



Paralelogramo.

>>> Consideremos lo siguiente

Los siguientes pares de segmentos se intersecan en su punto medio. Unan los extremos de los segmentos, para formar cuadriláteros, y después contesten lo que se les pide.



¿Cuáles de los siguientes tipos de cuadrilátero aparecieron? Márquenlos con una ✓.

☐ Cuadrado ☐ Rectángulo ☐ Trapecio ☐ Paralelogramo ☐ Rombo

36

Los cuatro cuadriláteros que se formaron son todos de un mismo tipo. ¿Cuál es? Márquenlo con una ✓.

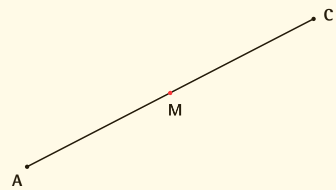
☐ Cuadrado ☐ Rectángulo ☐ Trapecio ☐ Paralelogramo ☐ Rombo

Cada uno dibuje otro par de rectas que se intersequen en su punto medio. Unan los extremos de los segmentos para formar un cuadrilátero y decidan si éste es del mismo tipo que el que marcaron en la pregunta anterior.

Comparen sus respuestas y comenten si siempre se formará un paralelogramo al unir los extremos de dos segmentos que se intersequen por su punto medio.

>>> Manos a la obra

I. En el segmento con extremos **A** y **C** se ha marcado el punto medio **M** con rojo. Dibuja otro segmento cuyo punto medio coincida con el punto **M** y etiqueta sus extremos con las letras **B** y **D**. Después traza los segmentos **AB**, **BC**, **CD** y **DA**.



a) Agrupa los segmentos **AM**, **BM**, **CM** y **DM** en parejas de segmentos iguales y justifica por qué son iguales.

AM = CM . Justificación: ____________

y

BM = DM . Justificación: ____________

b) Agrupa los ángulos **AMB**, **BMC**, **CMD** y **DMA** en parejas de ángulos iguales y justifica por qué son iguales.

∡AMB = ∡CMD . Justificación: ____________

y

∡BMC = ∡DMA . Justificación: ____________

II. De los siguientes criterios de congruencia, ¿cuál usarías para justificar que los triángulos **AMB** y **CMD** son congruentes?

i) LLL ii) LAL iii) ALA

Explica por qué los otros dos criterios no funcionan:

____

____

____

37

Respuesta. Todos los cuadriláteros que se forman son paralelogramos.

Sugerencia didáctica. Pida al grupo que comenten entre todos si un cuadrado,un rectángulo o un rombo son paralelogramos y si un trapecio es un paralelogramo.

Propósito de las actividades. Guiar a los alumnos en la elaboración de la justificación de que un cuadrilátero en el que sus diagonales se cortan por el punto medio es un paralelogramo.

Respuestas.

a) Los segmentos son iguales porque **M** es el punto medio de $\overline{AC}$ y de $\overline{BD}$. También pueden decir que porque así se trazó, lo cual es correcto.

b) Los ángulos son opuestos por el vértice.

Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, recuerde a los alumnos cuáles son los ángulos opuestos por el vértice.

Respuesta. ALA. Los otros dos criterios no se pueden utilizar porque no se tiene información sobre las medidas de los lados **AB**, **BC**, **CD** y **DA**. Recuerde al grupo que lo que se busca es una justificación general que no dependa de las medidas de una figura en particular.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos si es el mismo criterio que utilizarían para justificar que △**AMD** y △**CMB** son congruentes.

Respuestas.

$\overline{AM} = \overline{CM}$

$\overline{MB} = \overline{MD}$

$\overline{BA} = \overline{DC}$

∡AMB = ∡CMD

∡MBA = ∡MDC

∡BAM = ∡DCM

1 2

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que unan los extremos de los segmentos que trazaron al inicio del *Manos a la obra* y pregúnteles qué tipo de figura se forma. Coménteles que en la sesión pasada se sabía que los lados del paralelogramo son paralelos y entonces se pudo concluir que los ángulos alternos internos son iguales. En esta sesión, si se prolongan los lados **AB** y **CD** o los lados **AD** y **CB**, se obtienen dos rectas cortadas por una transversal y, como se sabe que los ángulos alternos internos son iguales, entonces puede concluirse que las rectas son paralelas. Si lo considera conveniente, trace el esquema en el pizarrón y pida a los alumnos que identifiquen cuáles son los ángulos iguales. Es importante que entre todos comenten por qué las rectas son paralelas, recuérdeles lo que se concluyó en la secuencia 6 de **Matemáticas II**: cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, se forman ángulos correspondientes iguales y si dos rectas que no son paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos correspondientes tienen diferente medida.

III. Como los triángulos **AMB** y **CMD** son congruentes, se pueden escribir algunas igualdades de lados y ángulos. Relaciona las siguientes dos columnas uniendo con una línea los elementos que tienen la misma magnitud.

$\overline{AM}$	$\overline{CM}$
$\overline{MB}$	$\overline{DC}$
$\overline{BA}$	∡MDC
∡AMB	∡DCM
∡MBA	$\overline{MD}$
∡BAM	∡CMD

IV. De las igualdades anteriores, ¿cuál crees que te sirva para argumentar que los segmentos **AB** y **CD** son paralelos?

∡BAM = ∡DCM

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cómo podrían argumentar que los lados **AD** y **BC** son paralelos?

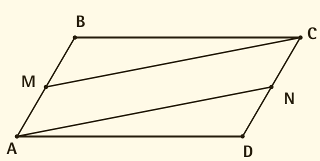
>>> A lo que llegamos

Si un cuadrilátero satisface que sus diagonales se intersecan en su punto medio, entonces este cuadrilátero debe ser un paralelogramo. Para justificar esta propiedad de manera formal se pueden emplear los criterios de congruencia.

>>> Lo que aprendimos

Elige algunos de los textos que están en el recuadro de razones para completar la justificación del siguiente hecho geométrico.

*Sean **M** y N los puntos medios de los lados **AB** y **CD** del paralelogramo **ABCD**, respectivamente. Entonces, se satisface que los triángulos **MBC** y **NDA** son congruentes.*



Sugerencia didáctica. Comente a los alumnos que, en la sesión, utilizaron dos tipos de justificación: al inicio cada uno dibujó un par de segmentos que se intersecaran en su punto medio y comprobaron que, en los casos que trazaron, al unir los extremos de los segmentos se forma un paralelogramo. Luego utilizaron los criterios de congruencia de triángulos y los ángulos correspondientes entre dos rectas para verificar que en todos los casos se obtiene un paralelogramo.

Pida a los alumnos que escriban en sus cuadernos cuál les parece que sea la diferencia entre estos dos tipos de justificación.

Propósito del interactivo. Que los alumnos exploren mediante la geometría dinámica cuadriláteros y sus diagonales para comprobar que las diagonales se intersectan en su punto medio si y sólo si el cuadrilátero es un paralelogramo.

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos una copia de su respuesta a este ejercicio. Si tienen dificultades revise con ellos la actividad **II** y el apartado *Lo que aprendimos* de la sesión anterior.

Razones
• En un paralelogramo los lados opuestos son iguales. • En un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales. • En un paralelogramo los ángulos adyacentes son complementarios. • Son la mitad de lados iguales. • Es un paralelogramo. • Ángulos alternos internos entre paralelas son iguales. • Son congruentes por el criterio de lado, ángulo, lado. • Son congruentes por el criterio de lado, lado, lado. • Son congruentes por el criterio de ángulo, lado, ángulo.

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que, para justificar que los triángulos son congruentes, se debe utilizar alguno de los criterios de congruencia de triángulos. Para ello se va a utilizar la propiedad que se justificó en la sesión 1 (los lados opuestos de un paralelogramo son iguales) y la propiedad de que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

Justificación

Afirmaciones	Razones
$\overline{AB} = \overline{CD}$	En un paralelogramo los lados opuestos son iguales.
$\overline{MB} = \overline{ND}$	Son la mitad de lados iguales
$\overline{BC} = \overline{AD}$	En un paralelogramo los lados opuestos son iguales.
$\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$	En un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales o Ángulos alternos internos entre paralelas son iguales.
$\triangle MBC$ es congruente con $\triangle NDA$	Son congruentes por el criterio de lado, ángulo, lado.

>>> Para saber más

Sobre la justificación de los hechos geométricos en la historia, consulta:
Ruiz, Concepción y Sergio de Régules. "Geometría práctica y geometría deductiva" en *Crónicas geométricas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Propósito de la sesión. Identificar las posiciones relativas entre una recta y una circunferencia. En esta sesión se pretende que los alumnos exploren estas posiciones relativas, por lo que, para hacer las actividades, sólo tiene el apartado *Para empezar*.

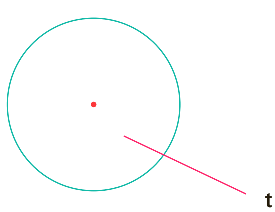
Materiales. Instrumentos geométricos: escuadras, regla, transportador y compás (para toda la secuencia).

Sugerencia didáctica. Antes de realizar las actividades es oportuno que pregunte al grupo qué elementos recuerdan de una circunferencia. Hágales preguntas cómo ¿cuál es el radio? ¿cuál es el diámetro? ¿cómo se calcula el área? ¿qué es *pi* (π)? (No todos se utilizan en esta secuencia, pero sí en las siguientes.)

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que utilicen la regla o una escuadra para trazar las rectas.

Posibles dificultades. Es probable que el trazo de la recta que interseca a la circunferencia en un solo punto (la tangente) no sea muy preciso. No los corrija en este momento, en la siguiente sesión tendrán oportunidad de aprender cómo realizar ese trazo.

Posibles errores. Algunos alumnos podrían trazar la recta que interseca en un sólo punto como una semirrecta que parte del interior de la circunferencia. Esto puede ocurrir porque piensen que la única forma de que una recta intersece a una circunferencia es que la atraviese. En este caso coménteles que la recta debe prolongarse y que entonces intersecaría a la circunferencia en dos puntos.



SECUENCIA 3

Entre rectas y circunferencias

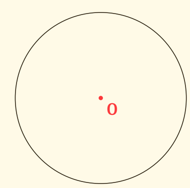
En esta secuencia identificarás las posiciones relativas entre una recta y una circunferencia y entre circunferencias. Conocerás algunas propiedades de las rectas secante y tangente de una circunferencia.

SESIÓN 1

PUNTOS EN COMÚN

>>> Para empezar

I. La circunferencia de centro **O** mide 2 cm de radio. Traza las rectas que se piden.



a) Una recta ***e*** que no interseque a la circunferencia.
b) Una recta ***s*** que interseque a la circunferencia en dos puntos.
c) Una recta ***t*** que interseque a la circunferencia en sólo un punto.
d) Una recta ***d*** que pase por el centro de la circunferencia.

Comparen sus trazos y verifiquen si cumplen con las condicione pedidas.

II. Mide las distancias de cada una de las rectas al centro de la circunferencia.

a) ¿Para cuál de las rectas la distancia es cero? _d_
b) ¿Para cuál de las rectas la distancia es 2 cm? _t_
c) ¿Para cuál de las rectas la distancia es mayor que 2 cm? _e_
d) ¿Para cuál de las rectas la distancia es menor que 2 cm? _s_

Comparen y justifiquen sus respuestas.

Recuerda que:
La distancia de un punto a una recta es la medida de la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta.

40

Propósito de la actividad. Identificar que las rectas también se pueden caracterizar por su distancia al centro de la circunferencia.

1

Sugerencia didáctica. Es posible que los alumnos midan la distancia de las rectas al centro con distintos procedimientos: algunos utilizarán las escuadras, otros utilizarán la regla sin verificar que quede perpendicular a la recta, incluso podrían trazar las perpendiculares, aunque esto no es necesario. No los corrija en este momento, permita que los alumnos estimen la medida y formulen sus hipótesis.

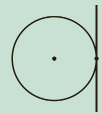
Posibles procedimientos. Aunque no se espera que los alumnos lo hagan, es posible responder a las preguntas sin medir. Si lo considera pertinente, dibuje en el pizarrón una circunferencia y pida a algunos alumnos que tracen las cuatro rectas, comenten entre todos cómo pueden saber, sin medir, si la distancia de cada recta al centro de la circunferencia es de 0 cm o es mayor, menor o igual que el radio de la circunferencia.

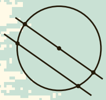
MATEMÁTICAS III

>>> A lo que llegamos

En el plano, una recta puede intersecar a una circunferencia en un punto, intersecarla en dos puntos o no intersecarla.

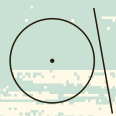
Las rectas que intersecan a la circunferencia en un solo punto se llaman **rectas tangentes** a la circunferencia. Al punto en el que la tangente interseca a la circunferencia se llama **punto de tangencia**. La distancia que hay del centro a la recta tangente es igual al radio.





Las rectas que intersecan en dos puntos a la circunferencia se llaman **rectas secantes**. La distancia del centro de la circunferencia a la recta secante es menor que el radio.

Las rectas que no intersecan a la circunferencia se llaman **rectas exteriores**. La distancia del centro de la circunferencia a la recta exterior es mayor que el radio.

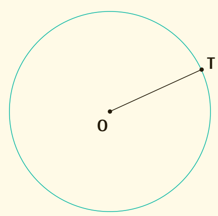


TRAZOS DE TANGENTES

SESIÓN 2

>>> Consideremos lo siguiente

Tracen una recta perpendicular al segmento **OT** por el punto **T**.



¿La recta que trazaron es exterior, tangente o secante a la circunferencia? ___________

Justifiquen su respuesta. ____

____

____

Comparen sus respuestas.

41

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que revisen y corrijan las rectas que trazaron al inicio de la sesión y que pongan el nombre a cada una de ellas. Coménteles que la recta ***d*** que trazaron pasa por un diámetro de la circunferencia (el diámetro es un segmento, no una recta) y que también es una recta secante.
Si lo considera conveniente, pídales de tarea que tracen una recta y un punto sobre ella y que escriban un procedimiento para trazar una perpendicular a la recta que pase por el punto. Esto servirá para la siguiente sesión. Los alumnos estudiaron un procedimiento para hacerlo en la secuencia 5 de **Matemáticas II**.

Propósito de la sesión. Identificar que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

Sugerencia didáctica. Junto con los alumnos, recuerden qué es una perpendicular a una recta y, dada una recta y un punto sobre ella, las formas de trazar una perpendicular a la recta que pase por ese punto (con escuadras o con regla y compás).

Posibles errores. Los alumnos que no hayan realizado el trazo de la perpendicular correctamente, podrían pensar que la recta es una secante. No los corrija en este momento, pero verifique que utilicen las características que aprendieron en la sesión pasada para justificar su respuesta.

Propósito del programa. Trazar rectas tangentes a una circunferencia y mostrar que la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Descubrir qué propiedades caracterizan a la recta tangente de la circunferencia. Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 2.

Sugerencia didáctica. Si es que no lo han identificado, pregunte a los alumnos qué elemento de la circunferencia es el segmento **OT** (es un radio).

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Formas geométricas.
Subtema
Rectas y ángulos.
Antecedentes
En **Matemáticas II** los alumnos resolvieron problemas al reconocer ángulos y calcular su medida, y determinaron las posiciones relativas de dos rectas en el plano. En esta secuencia van a determinar la posición relativa entre una recta y una circunferencia y entre dos circunferencias.

Propósitos de la secuencia
Identificar las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia, y entre circunferencias. Caracterizar la recta secante y la tangente a una circunferencia.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Puntos en común** Identificar las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia.	
2	**Trazos de tangentes** Identificar que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por ese punto.	Programa 4 Aula de medios Tangentes (Geometría dinámica) Interactivo
3	**Entre circunferencias** Identificar las posiciones relativas entre dos circunferencias.	Programa 5 Interactivo
4	**Algunos problemas** Utilizar lo aprendido en las tres sesiones anteriores para resolver problemas.	

Propósito de la actividad. Identificar que una secante no es perpendicular al radio **OT**.

Posibles procedimientos. Se espera que los alumnos identifiquen que el triángulo **OTS** es isósceles sin necesidad de medir, ya que dos de sus lados son radios de la circunferencia, aunque también pueden justificarlo al medir los lados del triángulo. La secante que tracen no debe pasar por **O**, porque entonces no se forma el triángulo **OTS**.

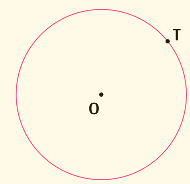
Sugerencia didáctica. Si observa que tienen dificultades, ayude a los alumnos a tomar la medida del ángulo. Es importante que los alumnos identifiquen que, si la secante fuera perpendicular al radio **OT**, se formaría un triángulo isósceles con dos ángulos de 90°. Esto no es posible porque al sumar la medida del tercer ángulo, la suma de los ángulos internos del triángulo excedería 180°.

Propósito de la actividad. Identificar que una recta que pase por el punto **T** tampoco puede ser una recta exterior.

Sugerencia didáctica. Cuando todos hayan escrito su justificación, puede preguntar a todo el grupo si la recta perpendicular a **OT** que pasa por el punto **T** es tangente, exterior o secante. La recta debe ser tangente ya que, por lo que han respondido en estas actividades, no puede ser secante ni exterior.

>>> Manos a la obra

I. Traza una recta secante a la circunferencia que pase por el punto **T** y que no pase por **O**.



a) Llama **S** al otro punto en el que la secante corte a la circunferencia y une los puntos para formar el triángulo **OTS**. Este triángulo es isósceles, ¿por qué? ______________________

b) Marca con rojo los ángulos iguales del triángulo **OTS**, ¿los ángulos que marcaste miden 90°? ______________

c) ¿La recta secante que trazaste es perpendicular a $\overline{OT}$? _____ . ¿Por qué? ______________________

d) Traza otras rectas secantes a la circunferencia por **T**. ¿Alguna de las rectas que trazaste es perpendicular a $\overline{OT}$? _____

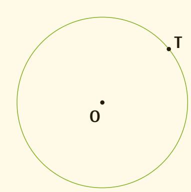
e) ¿Crees que se pueda trazar una recta secante por el punto **T** de manera que forme un ángulo de 90° con $\overline{OT}$? _____

Justifica tu respuesta ______________________

Recuerda que:

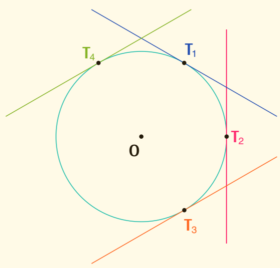
La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo suman 180°.

II. Traza una recta exterior a la circunferencia que pase por el punto **T**.



¿Pudiste trazar la recta? _____ . ¿Por qué? ______________________

III. En la circunferencia se trazaron cuatro rectas tangentes.



Traza los radios OT_1, OT_2, OT_3 y OT_4. Mide con tu transportador el ángulo que forma cada tangente con el radio por el punto de tangencia.

a) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_1 y el radio OT_1?

____

b) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_2 y el radio OT_2?

____

c) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_3 y el radio OT_3?

____

d) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_4 y el radio OT_4?

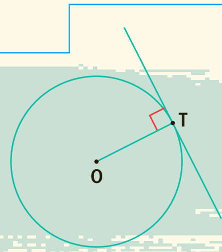
____

Esta propiedad que observaste con estas rectas tangentes se cumple para cualquier recta tangente.

Comparen sus respuestas. Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen su respuesta y su justificación.

>>> A lo que llegamos

Sea **T** un punto sobre una circunferencia de centro **O**. La **recta perpendicular** al radio **OT** por el punto **T** es la **recta tangente** a la circunferencia por el punto **T**.



Propósito de la actividad. Comprobar, mediante la medición de los ángulos, que las rectas tangentes a una circunferencia son perpendiculares al radio que pasa por el punto de tangencia.

Sugerencia didáctica. Puede preguntar a los alumnos cómo harían para trazar una tangente a una circunferencia. Podrá evaluar sus procedimientos en el apartado *Lo que aprendimos*.

Propósito del interactivo. Que los alumnos lleguen a comprender mediante la manipulación de rectas secantes:

- Que la tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio que pasa por ese punto.
- Que la tangente a una circunferencia es el caso límite de todas las secantes que tienen un punto fijo en ella.

Propósito de la actividad. Identificar que, por medio de secantes, es posible irse acercando a una tangente.

Posibles respuestas. Cuando **P** y **T** coinciden, la recta corta a la circunferencia en un solo punto. El ángulo que forma la recta con el radio que pasa por **P** va aumentando hasta llegar a 90°.

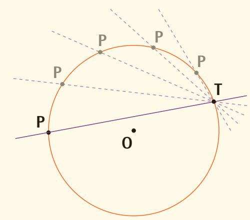
Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de su respuesta a esta actividad. Si tuvieron dificultades, revisen los apartados *A lo que llegamos* de las dos sesiones anteriores para que identifiquen las características de una recta tangente a una circunferencia.

Respuesta. Para trazar la tangente se debe trazar el radio que pasa por **M** y después hay que trazar una perpendicular a ese radio que pase por **M**.

>>> Lo que aprendimos

1. En la circunferencia se trazó la secante **TP**.

La recta secante se fija en el punto **T** y se gira de manera que el punto de corte **P** se vaya acercando a **T**.



a) ¿Qué pasa con la recta secante cuando el punto **P** coincide con el punto **T**?

Deja de ser recta secante y se convierte en recta tangente en el punto T

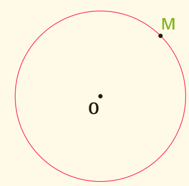
Justifica tu respuesta. ______________________________

____

b) ¿Qué pasa con la medida del ángulo entre el radio y la recta secante?

____

2. Traza una recta tangente a la circunferencia por el punto **M**.



Describe tu procedimiento. ______________________________

____

____

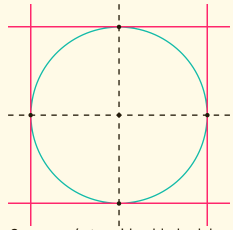
Justifica que la recta que obtuviste con ese procedimiento es una recta tangente.

____

____

____

3. Traza un cuadrado que inscriba al círculo dado. Es decir, que cada uno de sus lados sea una recta tangente de la circunferencia.



Si el radio del círculo mide 2 cm, ¿cuánto mide el lado del cuadrado? 4 cm

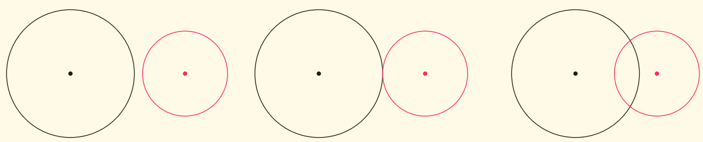
ENTRE CIRCUNFERENCIAS

SESIÓN 3

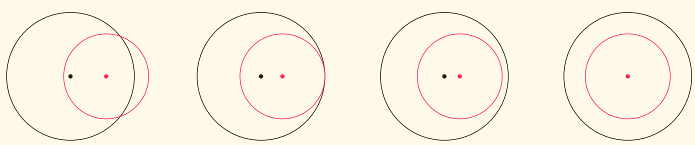
>>> Para empezar

I. En la siguiente sucesión de imágenes, la circunferencia pequeña se va acercando a la circunferencia grande.

a) Observa las posiciones sucesivas que adquieren las dos circunferencias.



Ajenas externas | Tangentes externas | Secantes



Secantes | Tangentes internas | Ajenas internas | Concéntricas

b) De los siguientes nombres, elije el que corresponda a cada una de las posiciones de las circunferencias y anótalo en el recuadro.

1 Circunferencias tangentes externas	**3 Circunferencias secantes**	**5 Circunferencias ajenas externas**
2 Circunferencias ajenas internas	**4 Circunferencias concéntricas**	**6 Circunferencias tangentes internas**

Comparen sus respuestas.

45

Respuesta. Para trazar el cuadrado se pueden trazar dos diámetros de la circunferencia que sean perpendiculares. Los cuatro puntos en los que los diámetros cortan a la circunferencia son los puntos de tangencia de los lados del cuadrado.

Propósito de la sesión. Identificar las posiciones relativas entre dos circunferencias.

Se espera que los alumnos puedan utilizar, para las circunferencias, los conceptos de tangente y secante que estudiaron para las rectas en las sesiones pasadas

3

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos qué tienen en común los conceptos de tangente y secante para dos circunferencias con los que vieron en las sesiones anteriores para una recta y una circunferencia.

Posibles errores. Si algún alumno responde que las circunferencias concéntricas se intersecan en un punto (el centro), hágale notar que el centro es un elemento de la circunferencia, pero no es un punto de ella.

Sugerencia didáctica. Pregunte al grupo qué pasa en el caso de que las circunferencias concéntricas tengan el mismo radio (en ese caso las circunferencias comparten todos sus puntos). Es posible que los alumnos piensen que entonces no se trata de dos circunferencias, sino que es sólo una; puede comentarles que si recortamos dos circunferencias del mismo radio y las ponemos una sobre la otra, son concéntricas y tienen en común todos sus puntos.
Si algún alumno consideró también este caso, su respuesta en el inciso a) debe ser "ninguno o todos".

Propósito de las preguntas. Que los alumnos analicen la diferencia entre los conceptos de externo e interno.

2

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que lean esta información y que verifiquen sus respuestas al ejercicio del inicio de la sesión.

Propósito del interactivo. Que los alumnos manipulen un par de circunferencias para reproducir dinámicamente cada uno de los casos mencionados en el apartado y descubrir que las circunferencias tangentes y secantes son casos límites.

SECUENCIA 3

II. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias concéntricas? Ninguno

b) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias ajenas? Ninguno

c) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias tangentes? Uno

d) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias secantes? Dos

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Qué diferencia hay entre circunferencias ajenas externas y circunferencias ajenas internas? ¿Qué diferencia hay entre circunferencias tangentes externas y circunferencias tangentes internas?

>>> A lo que llegamos

Dos circunferencias pueden ser:

Ajenas, cuando no tienen puntos en común. Estas circunferencias pueden ser **externas** o **internas**. Un caso particular de éstas son las **circunferencias concéntricas** cuya característica es que tienen el mismo centro.

Tangentes, cuando tienen un solo punto en común. Estas circunferencias pueden ser **externas** o **internas**.

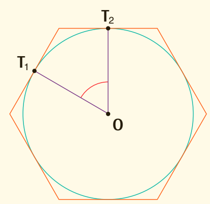
Secantes, cuando tienen dos puntos en común.

SESIÓN 4

ALGUNOS PROBLEMAS
>>> Lo que aprendimos

Resuelve los problemas de esta sesión sin utilizar transportador.

1. La circunferencia de centro **O** está inscrita en un hexágono regular. T_1 y T_2 son puntos de tangencia.



a) ¿Cuánto miden los ángulos internos de un hexágono regular? 120°

b) ¿Cuánto miden los ángulos formados por una tangente y el radio trazado al punto de tangencia? 90°

c) ¿Cuánto suman los ángulos internos de un cuadrilátero? 360°

d) ¿Cuánto mide $\measuredangle T_1OT_2$? 60°

46

Propósito de la sesión. Utilizar lo aprendido en las tres sesiones anteriores para resolver algunos problemas.

1

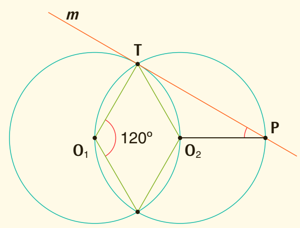
Sugerencia didáctica. Observe los procedimientos de los alumnos y, al final de la sesión, pida a algunos de ellos que pasen a explicar sus respuestas.

Posibles procedimientos. Para determinar la medida de los ángulos, los alumnos deben utilizar lo que ya saben sobre los polígonos regulares. El ángulo interno del hexágono mide 120°, los ángulos en los puntos de tangencia miden 90°. Hacen falta 60° para completar la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero (en este caso es el cuadrilátero que se forma entre los puntos **O**, T_1, T_2, y el vértice del hexágono).

Para obtener $\angle T_1OT_2$ directamente, pueden trazar los cuatro radios restantes a los puntos de tangencia, la circunferencia se divide en seis ángulos centrales iguales.

Si observa que tienen dificultades para responder las preguntas, recuerde a los alumnos que pueden obtener el ángulo interno de un hexágono regular al dividirlo en seis triángulos equiláteros a partir del punto **O** y pueden obtener la suma de los ángulos internos del cuadrilátero si trazan una diagonal para dividirlo en dos triángulos.

2. Las circunferencias con centros O_1 y O_2 tienen radios iguales y cada una pasa por el centro de la otra. La recta ***m*** es tangente en **T** a la circunferencia con centro O_1 y es secante a la circunferencia con centro en O_2. Además, los puntos O_1, O_2 y **P** son colineales.



¿Qué tipo de triángulo es el PO_1T? Rectángulo

¿Cuánto mide el ángulo TO_1P? 60°

¿Cuánto mide $\measuredangle TPO_2$? 30°

Justifica tu respuesta. ____________________

3. Sean C_1 y C_2 circunferencias con centros O_1 y O_2, respectivamente, tangentes en **T**. Traza la recta tangente a la circunferencia C_1 por **T** y la tangente a C_2 por **T**.

Toma en cuenta que en las circunferencias tangentes se cumple que la recta determinada por los centros pasa por el punto de tangencia de las circunferencias.

¿Qué tienen en común las rectas tangentes que trazaste? ____________________

Justifica tu respuesta. ____________________

Ahora sabes que una recta y una circunferencia pueden tener distintas posiciones entre sí. Además conociste algunas propiedades que permiten resolver diversos problemas.

>>> Para saber más

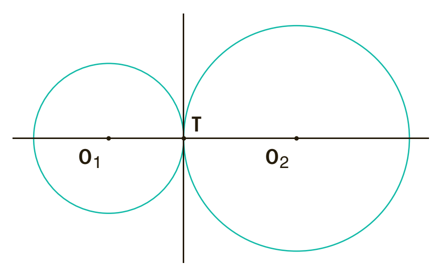
Sobre la construcción de una recta tangente a una circunferencia y de circunferencias tangentes, consulta:
http://www.educacionplastica.net/tangen.htm
Ruta 1: Construcción paso a paso
Ruta 2: Ejercicios para practicar la construcción
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].

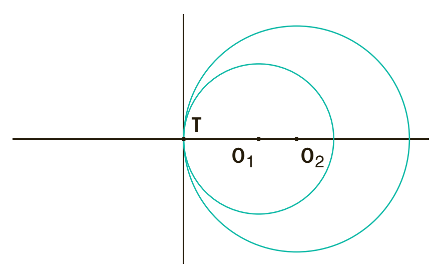
47

Posibles procedimientos. $\measuredangle O_1TP$ mide 90° porque la recta ***m*** es tangente.
$\measuredangle O_1TO_2$ mide 60° (se obtiene al calcular las medidas de los ángulos interiores del rombo).
$\measuredangle O_2TP$ mide 30° (es complementario de $\measuredangle O_1TO_2$) y como el triángulo O_2TP es isósceles, $\measuredangle TPO_2$ mide también 30°.

También puede obtenerse al prolongar la recta PO_2 hacia O_1 y observar que esa recta es un eje de simetría del rombo, por lo que $\measuredangle TO_1P$ mide 60°. Entonces, en el triángulo PO_1T, el ángulo en el vértice **P** mide 30° (por la suma de los ángulos interiores de un triángulo).

Respuesta. Son la misma recta. La recta es perpendicular al radio O_1T por ser tangente a C_1. Pero entonces también es perpendicular al radio TO_2 ya que los tres puntos, O_1, T, O_2 son colineales. Entonces también es la tangente a C_2. Si lo considera conveniente, comente con los alumnos que las circunferencias pueden ser tangentes internas o tangentes externas.





Propósito del programa. Se muestran ejemplos de figuras semejantes y se destacan algunas características que permitirán después deducir cuáles son las condiciones que deben tener dos figuras para que sean semejantes.

Plantear y resolver problemas que involucren las distintas posiciones relativas entre rectas y circunferencias en el plano vistas a lo largo de la secuencia.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Identificar y describir los ángulos inscrito y central en una circunferencia. En esta sesión se pretende que los alumnos exploren lo que son estos ángulos, por lo que, para hacer las actividades, sólo tiene el apartado *Para empezar*.

Materiales. Instrumentos geométricos: escuadras, regla, transportador y compás (para toda la secuencia).

Propósito de la sesión en el aula de medios. Descubrir las propiedades de los ángulos inscritos en la circunferencia.

Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 1.

SECUENCIA 4

Ángulos en una circunferencia

En esta secuencia determinarás la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.

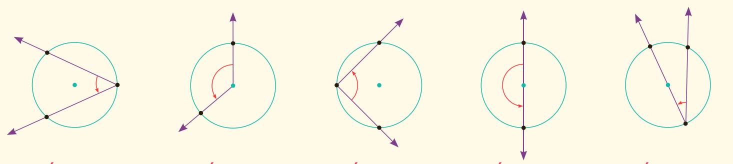
SESIÓN 1

DOS ÁNGULOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

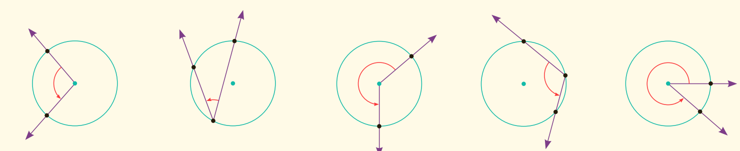
>>> Para empezar

I. Un ángulo en una circunferencia se clasifica según su vértice esté sobre la circunferencia o coincida con el centro de la circunferencia. En el primer caso, se trata de *ángulos inscritos*; en el segundo, de *ángulos centrales*.

Anota en cada ángulo "ángulo central" o "ángulo inscrito" segun corresponda.



Ángulo inscrito	Ángulo central	Ángulo inscrito	Ángulo central	Ángulo inscrito



Ángulo central	Ángulo inscrito	Ángulo central	Ángulo inscrito	Ángulo central

Comparen sus respuestas.

48

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Formas geométricas.
Subtema
Rectas y ángulos.
Antecedentes
En **Matemáticas I** los alumnos utilizaron el ángulo central y el ángulo interior para construir un polígono regular. En **Matemáticas II** establecieron la fórmula para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono. Aunque una circunferencia no tiene ángulos interiores y no tiene un único ángulo central, se puede considerar que los ángulos inscritos y centrales de la circunferencia son similares a aquéllos, ya que también abarcan una parte de la figura. En esta secuencia los alumnos van a establecer la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia.

Propósitos de la secuencia
Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Dos ángulos de una circunferencia** Identificar y describir los ángulos inscrito y central en una circunferencia.	Aula de medios Ángulos inscritos en una circunferencia (Geometría dinámica)
2	**Relaciones a medias** Determinar la relación entre la medida de un ángulo inscrito y un ángulo central que subtiendan el mismo arco de una circunferencia.	
3	**Probemos que uno es la mitad del otro** Los alumnos justificarán formalmente la relación que encontraron entre las medidas de los ángulos central e inscrito que subtienden el mismo arco.	Programa 6 Interactivo
4	**Problemas de medida** Resolver problemas relacionados con la medida de ángulos inscritos y centrales.	Programa 7

II. Dibuja los ángulos que se piden o explica por qué no es posible dibujarlos.

a) Un ángulo central tal que uno de sus lados sea una tangente.

b) Un ángulo inscrito tal que uno de sus lados sea un diámetro.

c) Un ángulo central que mida 90°.

d) Un ángulo inscrito tal que su vértice esté fuera de la circunferencia.

Comparen sus dibujos y verifiquen que cumplen con las condiciones pedidas.

Sugerencia didáctica. Ayude a los alumnos para que, cuando no sea posible dibujar lo que se pide, expliquen con argumentos basados en las características de los ángulos central e inscrito.

Respuestas. Sí es posible dibujar los ángulos que se piden en los incisos b) y c). El del inciso a) no es posible porque los lados de un ángulo central están en el interior de la circunferencia y una tangente nunca es interior, sólo toca a la circunferencia en el punto de tangencia. El del inciso d) no se puede dibujar porque el vértice de un ángulo inscrito debe estar sobre la circunferencia.

1

Sugerencia didáctica. Si lo considera conveniente, pida de tarea a los alumnos que dibujen en sus cuadernos algunos ángulos inscritos y centrales de distintas medidas.

También puede preguntarles si es posible dibujar un ángulo inscrito de 270°. Esto no es posible, ya que todos los ángulos inscritos son menores a 180°.

Propósito de la sesión. Determinar la relación entre la medida de un ángulo inscrito y uno central que subtiendan el mismo arco de una circunferencia.

Propósito de la actividad. Identificar el arco que subtiende un ángulo inscrito o un ángulo central.

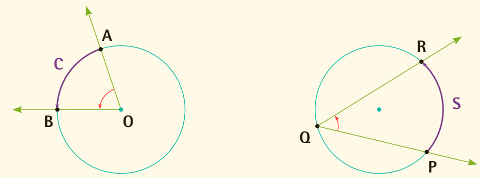
Posibles errores. En la figura 2 es posible que algunos alumnos marquen el arco que corresponde al ángulo central que es menor a 180° y no al que está señalado. Si lo considera necesario, dibuje un ejemplo parecido en el pizarrón y comente este caso con todo el grupo.

SESIÓN 2

RELACIONES A MEDIAS

>>> Para empezar

Los lados de cualquier ángulo en una circunferencia, inscrito o central, determinan un arco en la circunferencia. En estas circunferencias el arco determinado por los ángulos dados está marcado con morado. Se dice que los arcos son *subtendidos* por los ángulos que los determinan.



El arco **C** es subtendido por el ∡**AOB**; el arco **S** es subtendido por el ∡**PQR**.

En cada circunferencia marquen con azul el arco que subtienden los ángulos centrales y con rosa el arco que subtienden los ángulos inscritos.

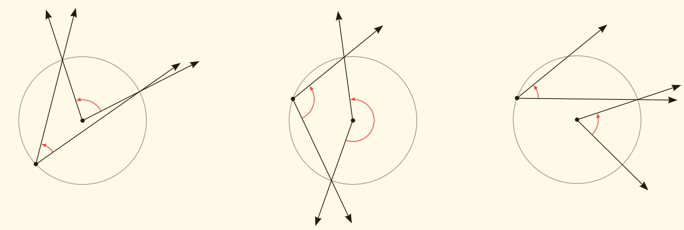


Figura 1 Figura 2 Figura 3

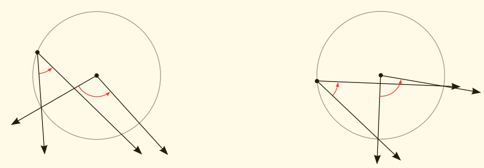


Figura 4 Figura 5

¿En qué circunferencias se cumple que el ángulo central subtiende el mismo arco que el ángulo inscrito? 1, 2 y 5

50

>>> Consideremos lo siguiente

Midan con su transportador los ángulos centrales y los ángulos inscritos y anoten los datos obtenidos.

Sugerencia didáctica. Es probable que los alumnos obtengan pequeñas diferencias en las medidas. Ayúdelos en el uso del transportador para que éstas sean lo más certeras posible; todas las medidas de los ángulos son números cerrados.

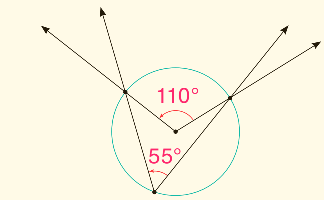


Figura 6

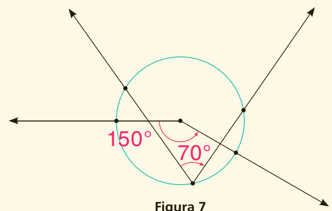


Figura 7

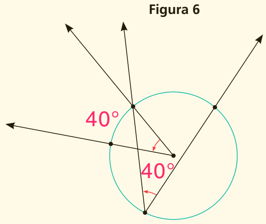


Figura 8

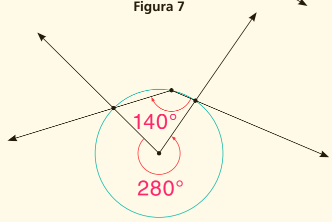


Figura 9

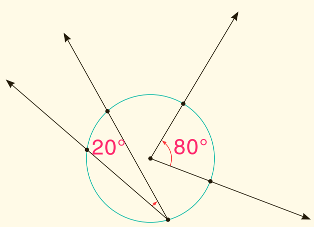


Figura 10

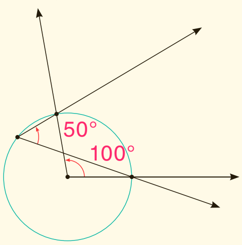


Figura 11

a) ¿En cuáles de estas figuras se cumple que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central? ___1___ , ___4___ y ___6___

b) Según los ángulos anteriores, ¿qué condición cumplen el ángulo inscrito y el central para que la medida del primero sea la mitad de la medida del segundo?

____

Se espera que los alumnos identifiquen que, si los ángulos subtienden el mismo arco, entonces el inscrito mide la mitad del ángulo central o, también, que el ángulo central mide el doble que el ángulo inscrito.

Comparen sus respuestas.

Respuestas.

a) 1, 4 y 6.

b) En cada caso el ángulo inscrito mide la mitad del ángulo central, también pueden responder que el ángulo central mide el doble que el ángulo inscrito.

Propósito de la actividad. Verificar que, si un ángulo inscrito y uno central subtienden el mismo arco, el ángulo inscrito mide la mitad del ángulo central y que el ángulo central mide el doble que el ángulo inscrito.

Sugerencia didáctica. Aunque algunos alumnos pueden anticipar que las ángulos inscritos van a medir 42°, pídales que hagan la medición con el transportador para verificarlo. Hay muchos ángulos inscritos que pueden trazar; comente a los alumnos que también se puede concluir que dos ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son iguales.

Respuestas.

a) 42°

b) Los ángulos inscritos miden la mitad del central o el ángulo central mide el doble que los inscritos.

c) Sí, pasa lo mismo.

>>> Manos a la obra

I. Marquen los arcos subtendidos por los ángulos inscrito y central en cada uno de las figuras del apartado *Consideremos lo siguiente*.

a) ¿En cuáles de las figuras los ángulos inscrito y central subtienden el mismo arco?

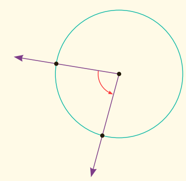
____

b) En cada una de las figuras que anotaron en el inciso anterior, ¿qué relación encuentran entre las medidas de los ángulos inscritos y centrales? _______________

____

____

II. En la siguiente circunferencia se dibujó un ángulo central de 84°. Dibujen dos ángulos inscritos que subtiendan el mismo arco que el ángulo central dado.



a) Con su transportador, midan los ángulos inscritos que dibujaron. ¿Cuánto miden?

____

b) ¿Qué relación hay entre la medida de cada ángulo inscrito dibujado y la medida del ángulo dado? _______________

____

____

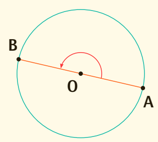
c) ¿Creen que se cumpla la misma relación para cualquier otro ángulo inscrito que subtienda el mismo arco que el ángulo central dado? _______________

Comparen sus respuestas. Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

A partir de los ejemplos trabajados, se puede suponer que un ángulo inscrito y uno central cumplen con la siguiente relación: cuando el ángulo inscrito y el ángulo central subtienden el mismo arco, la medida del primero es la mitad de la medida del segundo.

III. Tracen en la circunferencia un ángulo inscrito de tal manera que sus lados pasen por los extremos del diámetro **AB**.



a) ¿El ∡**AOB** es central o inscrito? Central ¿Por qué? Su vértice está en el centro de la circunferencia

b) ¿Cuánto mide el ∡**AOB**? 180°

c) ¿Cuánto mide el ángulo inscrito que trazaron? 90°

Tracen tres ángulos inscritos de manera que sus lados pasen por los puntos **A** y **B**, y que los vértices no coincidan con **A** o con **B**.

d) ¿Los ángulos que trazaron miden lo mismo? Sí. ¿Cuánto miden? 90°

e) ¿Será posible trazar un ángulo inscrito que sus lados pasen por los extremos del diámetro y que su medida sea menor que 90°? No

Justifiquen sus respuestas. ______

Comparen y comenten sus respuestas.

53

Sugerencia didáctica. Después de que lean esta información, pida a los alumnos que dibujen en su cuaderno una circunferencia con un ángulo central mayor que 180° y también que verifiquen la medida de dos ángulos inscritos que subtiendan el mismo arco.

Comente con el grupo que es lo mismo decir que el ángulo central mide el doble que el ángulo inscrito.

Propósito de la actividad. Determinar que la medida de un ángulo inscrito que subtiende la mitad de una circunferencia es de 90°.

Posibles procedimientos. Algunos alumnos podrían determinar la medida de los ángulos inscritos que trazaron sin necesidad de medir, al darse cuenta de que es la mitad de ∡AOB. Se espera que para justificar la respuesta en el inciso e) digan que, como el ángulo central es de 180°, el ángulo inscrito debe medir la mitad,es decir 90°.

2 3

Sugerencia didáctica. Entre todos escriban una regla que describa lo que ocurre cuando un ángulo inscrito subtiende la mitad de una circunferencia. Puede pedirles que tracen en sus cuadernos dos ángulos inscritos en una circunferencia que midan 90°; de esta manera podrán confirmar que van a subtender a la mitad de la circunferencia.

Propósito de la sesión. Los alumnos justificarán formalmente la relación que encontraron entre las medidas de los ángulos central e inscrito que subtienden el mismo arco.

Propósito del programa. Demostrar que para cualesquiera dos ángulos, central e inscrito, que subtienden el mismo arco, la medida del primero es el doble de la medida del segundo.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito del interactivo. Descubrir mediante mediciones en una figura dinámica que:

- Todos los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco tienen la misma medida.
- La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de un ángulo central cuando subtienden el mismo arco.

Sugerencia didáctica. Si lo considera pertinente, pida a algunos alumnos que pasen al pizarrón a dibujar ejemplos de cada uno de los casos presentados, para otros ángulos centrales. Pregunte al grupo si están de acuerdo en que son todos los casos posibles. En particular, algún alumno podría mencionar que hace falta el caso en el que la medida del ángulo central es mayor o igual que 180°. Este caso está incluido en el **caso II**, lo cual lo puede analizar con el grupo al final de la sesión.

Comente a los alumnos que lo que se va a hacer en la sesión es justificar que, en todos los casos, el ángulo central mide el doble que el ángulo inscrito y, por lo tanto, el ángulo inscrito mide la mitad del ángulo central.

Sugerencia didáctica. Comete a los alumnos que este dibujo representa a todos los ángulos inscritos y centrales que están el **caso I**.

SECUENCIA 4

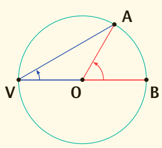
SESIÓN 3

PROBEMOS QUE UNO DE LOS ÁNGULOS ES LA MITAD DEL OTRO

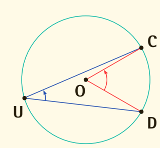
>>> Para empezar

En la sesión 2 se afirmó que *cuando un ángulo inscrito y uno central subienden el mismo arco, la medida del primero es la mitad de la medida del segundo*, a partir de comprobar que la relación se cumplía en varios ejemplos. Sin embargo, aunque la relación se cumple en los ejemplos vistos no se puede garantizar que se cumpla siempre. En esta sesión probarás que esta relación se cumple para cualquier pareja de ángulos central e inscrito que subtiendan el mismo arco.

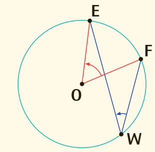
Un ángulo inscrito y un ángulo central que subtienden el mismo arco pueden corresponder a tres casos diferentes:



Caso I



Caso II



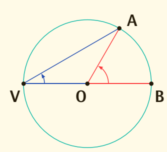
Caso III

Comenten en qué se distingue cada caso.

>>> Manos a la obra

I. **Caso I.** Observa que $\overline{VB}$, además de ser un lado del ángulo inscrito, es un diámetro de la circunferencia. Otra característica es que el lado **OB** está sobre el lado **VB**.

Elije una de las opciones para completar el siguiente texto y justifica tu elección.



Caso I

El ∡BOA es un ángulo central (central / inscrito). *El ∡BVA es un ángulo* inscrito (central / inscrito).

El △VOA es isósceles (isósceles / equilátero) *porque* tiene dos lados iguales

de ahí que los ángulos ∡OVA *y* ∡VAO *sean iguales.*

∡AOV + ∡BOA = 180° (90° / 180°) *porque* son suplementarios

∡AOV + ∡OVA + ∡VAO = 180° (180° / 360°) *porque* son los ángulos interiores de un triángulo

Comparando las dos igualdades anteriores se observa que ∡BOA = ∡OVA + ∡VAO (∡AOV + ∡OVA / ∡OVA + ∡VAO)

ya que ∡AOV + ∡BOA = ∡AOV + ∡OVA + ∡VAO porque son iguales a 180°.

De esta igualdad se obtiene que el ∡BOA es el doble (el doble / la mitad) *del ∡BVA.*

Lo que se puede escribir como: La medida del ángulo central **BOA** *es el doble de la medida del ángulo* **BVA**.

54

El procedimiento que se va a seguir consiste en identificar que el triángulo **VOA** es isósceles, debido a que dos de sus lados son radios de la circunferencia. Entonces los ángulos iguales del triángulo son ∡**OVA** = ∡**VAO**.

Además hay dos ángulos que suman 180°. ∡**AOV** + ∡**BOA** = 180° (forman un ángulo llano alrededor de O).

Por la suma de los ángulos interiores del triángulo isósceles se sabe que:

∡**AOV** + ∡**OVA** + ∡**VAO** = 180°.

Entonces, como las dos expresiones son iguales a 180°:

∡**AOV** + ∡**BOA** = ∡**AOV** + ∡**OVA** + ∡**VAO**

Se resta ∡**AOV** de ambos lados:

∡**BOA** = ∡**OVA** + ∡**VAO**.

Y como ∡**OVA** = ∡**VAO**, entonces:

∡**BOA** = 2∡**OVA**.

Pero como ∡**OVA** es el mismo ángulo que ∡**BVA**, se obtiene la conclusión de que:

∡**BOA** = 2∡**BVA**, y entonces ∡**BVA** es la mitad del ∡**BOA**.

Es decir que el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central.

Posibles dificultades. Si observa que los alumnos tienen dificultades para establecer esta relación escriba la igualdad

∡**AOV** + ∡**BOA** =

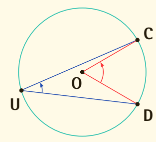
∡**AOV** + ∡**OVA** + ∡**VAO**

en el pizarrón y pregúnteles qué ocurre si se resta ∡**AOV** en ambos lados.

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Para completar el texto fue importante tomar en cuenta que uno de los lados del ángulo inscrito es también diámetro de la circunferencia y que un lado del ángulo central también está sobre el diámetro? ¿Por qué?

II. Caso II. Se observa que ninguno de los lados del ángulo inscrito es diámetro de la circunferencia, por esta razón se debe dar una justificación de que en este caso también se cumple la relación entre las medidas de los ángulos inscrito y central que subtienden el mismo arco.



Caso II

Traza el diámetro determinado por $\overline{OU}$ y denota el otro extremo del diámetro con **X**.

a) El diámetro **UX** dividió a los ángulos dados en dos ángulos cada uno. Expresa cada ángulo señalado como suma de los ángulos que formaste al trazar $\overline{UX}$.

∡**DOC** = ∡DOX + ∡XOC

∡**DUC** = ∡DUX + ∡XUC

b) Observa que al trazar el diámetro **UX** de la pareja de ángulos del caso II, se formaron dos parejas de ángulos como la del caso I. Utiliza el resultado obtenido en el caso I para responder:

¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos **XUC** y **XOC**? ∡XOC = 2 ∡XUC

¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos **DUX** y **DOX**? ∡DOX = 2 ∡DUX

c) Utiliza tus respuestas al inciso anterior y formula una justificación de que la medida del ∡**DUC** es la mitad de la medida del ∡**DOC**? ∡DOC = ∡DOX + ∡XOC

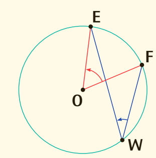
= 2 ∡DUX + 2 ∡XUC

= 2 (∡DUX + ∡XUC)

= 2 ∡DUC

Comparen sus justificaciones.

III. Da una justificación de que para el **caso III** también se cumple la relación entre las medidas de un ángulo inscrito y uno central que subtienden el mismo arco.



Caso III

Traza el diámetro determinado por $\overline{WO}$ y denota el otro extremo del diámetro con **Y**. Al trazar $\overline{WY}$, se identifican dos nuevas parejas de ángulos que, cada una, satisface el caso I

a) La primera pareja consta de los ángulos **FWY** y **FOY**, la segunda de los ángulos **EWY** y **EOY**.

Expresa cada ángulo original como la diferencia de dos de los nuevos.

∡**FWE** = ∡FWY – ∡EWY

∡**FOE** = ∡FOY – ∡EOY

Respuesta. Esto fue importante porque de esta manera se sabe que ∡**AOV** y ∡**BOA** son suplementarios.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos por qué esta justificación es válida para cualesquiera ángulos inscrito y central que estén en el **caso I**.

Sugerencia didáctica. Comete a los alumnos que este dibujo representa a todos los ángulos inscritos y centrales que están en el **caso II**.

El procedimiento que se sigue consiste en trazar el diámetro determinado por **OU**. De esta manera el ángulo central ∡**DOC** queda dividido en dos ángulos centrales, ∡**XOC** y ∡**DOX** y el ángulo inscrito ∡**DUC** queda dividido en dos ángulos inscritos, ∡**XUC** y ∡**DUX**. Se obtienen dos parejas de ángulos central e inscrito que están en el **caso I**, ∡**XOC** y ∡**XUC**, ∡**DOX** y ∡**DUX**, para las que se utiliza la relación que se justificó en la actividad anterior.

∡**XOC** = 2 ∡**XUC**

∡**DOX** = 2 ∡**DUX**.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban las dos parejas de ángulos que están en el **caso I**.

Sugerencia didáctica. Comete a los alumnos que este dibujo representa a todos los ángulos inscritos y centrales que están en el **caso III**.

El procedimiento que se sigue consiste en trazar el diámetro determinado por **WO**. De esta manera se obtienen dos parejas de ángulos central e inscrito que están en el **caso I**, ∡**FOY** y ∡**FWY**, ∡**EOY** y ∡**EWY**, para las que se utiliza la relación que se justificó en la actividad I.

∡**FOY** = 2 ∡**FWY**

∡**EOY** = 2 ∡**EWY**.

El ángulo central mayor (∡**FOY**) y el ángulo inscrito mayor (∡**FWY**) pueden expresarse como suma de otros dos ángulos:

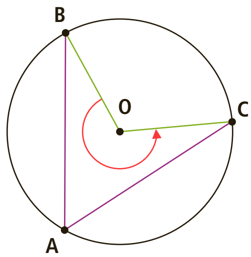
∡**FWY** = ∡**FWE** + ∡**EWY**

∡**FOY** = ∡**FOE** + ∡**EOY**

Con estas igualdades se establece la expresión de los ángulos señalados como resta de los ángulos nuevos.

2

Sugerencia didáctica. Dibuje en el pizarrón una circunferencia e indique un ángulo central que sea mayor a 180°. Pida a uno de los alumnos que trace un ángulo inscrito que subtienda el mismo arco que ese ángulo central.



Trace el diámetro determinado por **AO**. Pregunte a los alumnos cuál de las posiciones representa esta situación y analicen este caso entre todos. (Es el **caso II**.)

3

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos cuál es la diferencia entre lo que hicieron en la sesión pasada y en ésta. Deben identificar que en la sesión anterior se justificó la relación entre un ángulo central y un ángulo inscrito que subtienden el mismo arco, al medir en algunos ejemplos; en esta sesión se hizo una justificación que no depende de un ejemplo particular, sino que es válida para todos los casos posibles.

Pregunte al grupo por qué es lo mismo decir que el ángulo central mide el doble que el ángulo inscrito.

b) Utiliza el resultado obtenido del caso I para responder:

¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos **FWY** y **FOY**? $\measuredangle FOY = 2\measuredangle FWY$

¿Qué relación hay entre las medidas de **EWY** y **EOY**? $\measuredangle EOY = 2\measuredangle EWY$

c) Da una justificación de que la medida del $\measuredangle$**FWE** es la mitad de la medida del $\measuredangle$**FOE**.

$\measuredangle FOE = \measuredangle FOY - \measuredangle EOY$

$= 2\measuredangle FWY - 2\measuredangle EWY$

$= 2(\measuredangle FWY - \measuredangle EWY)$

$= 2\measuredangle FWE$

Comparen sus justificaciones.

>>> A lo que llegamos

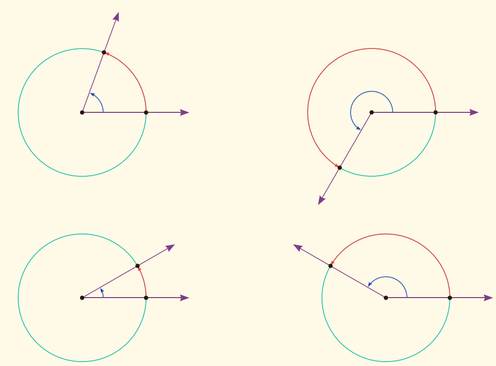
Cualquier pareja de ángulos inscrito y central cae en alguno de los casos examinados, así que la justificación que se mostró en esta sesión garantiza que la relación "la medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco", se cumple siempre que los ángulos inscrito y central subtiendan el mismo arco.

SESIÓN 4

PROBLEMAS DE MEDIDA

>>> Lo que aprendimos

1. Sin utilizar transportador dibujen en cada circunferencia un ángulo inscrito de manera que su medida sea la mitad de la medida del ángulo central dado.



56

Propósito de la sesión. Resolver problemas relacionados con la medida de ángulos inscritos y centrales.

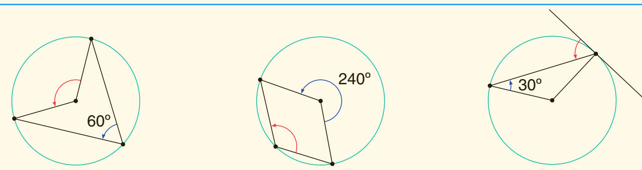
Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de su respuesta a esta actividad. Si tuvieron dificultades, revise con ellos la actividad **II** del *Manos a la obra* de la sesión 2 y los apartados *A lo que llegamos* de las sesiones 2 y 3.

2. Dibujen una semicircunferencia y llamen a sus extremos **C** y **D**. Elijan un punto P sobre la semicircunferencia que no pertenezca al diámetro.

¿El △**CDP** es un triángulo rectángulo? ____________ ¿Por qué? ____________

____

3. Sin usar transportador, determinen y anoten la medida de cada uno de los ángulos marcados en rojo.

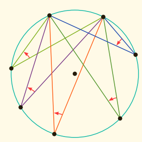


Comparen y justifiquen sus respuestas.

4. En la circunferencia se trazaron ángulos inscritos que subtienden el mismo arco que un ángulo central de 50°.

a) ¿Cuánto miden los ángulos inscritos? 25°

b) ¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco? Es la misma



Comparen y justifiquen sus respuestas.

La relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco, permite resolver múltiples problemas.

>>> Para saber más

Sobre ángulos en una circunferencia, consulten:
http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/capaz_d3/index.html
Ruta 1: Ángulos centrales
Ruta 2: Ángulos inscritos
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Eduación y Ciencia. España.

57

Respuesta. Sí es un triángulo rectángulo. ∡**CPD** es un ángulo inscrito que subtiende la mitad de una circunferencia (la semicircunferencia). Por lo tanto es un ángulo recto y el △**CDP** es rectángulo.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de su respuesta a esta actividad. Si tienen dificultades revise con ellos los apartados *A lo que llegamos* de las sesiones 2 y 3.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos qué tipo de recta es la de la tercera figura con respecto a la circunferencia (es una tangente).

Respuestas. En la primera y en la segunda figura, los ángulos subtienden el mismo arco, por lo que el ángulo central de la primera figura mide 120° y el ángulo inscrito de la segunda figura también mide 120°. En la tercera figura la tangente forma un ángulo de 90° con el radio, el triángulo es isósceles (dos de sus lados son radios), por lo que sus ángulos iguales miden 30°; el ángulo marcado mide 60°.

Propósito de la actividad. Reafirmar que los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco miden lo mismo.

Propósito del programa. Mostrar ejemplos y problemas que impliquen relacionar ángulos inscritos y centrales de una circunferencia para poder resolverlos.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Resolver problemas para calcular la medida de arcos y de sectores circulares. Los sectores circulares son una parte del círculo delimitada por un ángulo central.

3

Al final de cada sesión puede pedir a algunos alumnos que pasen a explicar sus respuestas, aunque sean incorrectas o que estén incompletas. De esta manera puede propiciar que los alumnos intercambien entre ellos los distintos procedimientos que hayan utilizado.

Materiales. Instrumentos geométricos: escuadras, regla, transportador y compás (para toda la secuencia).

Propósito del programa. Mostrar cómo se calcula la medida de arcos y ángulos centrales e inscritos; y resolver problemas.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Respuestas.

a) El procedimiento puede describirse de una manera similar a la siguiente: se traza la circunferencia de diámetro **OP**. Se marca como **T** uno de los dos puntos de intersección de las dos circunferencias. La recta determinada por **PT** es la recta tangente a la circunferencia desde el punto **P**.

b) Para justificar que la recta es tangente, hay que verificar que es perpendicular al radio **OT**. El ángulo inscrito **OTP** mide 90° porque subtiende la mitad de la segunda circunferencia, también puede argumentarse que subtiende el mismo arco que el ángulo central **PO'O** y este ángulo mide 180°.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos si la recta que va de **P** al otro punto de intersección es también una tangente.

SECUENCIA 5

Problemas con curvas

En esta secuencia determinarás la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, de área de sectores circulares y de coronas.

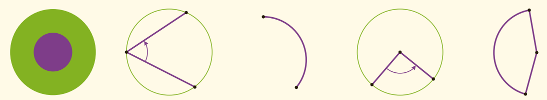
SESIÓN 1

SÓLO UNA PARTE

>>> Para empezar

Relacionen cada figura con su nombre.

1. Ángulo central
2. Sector circular
3. Corona
4. Ángulo inscrito
5. Arco

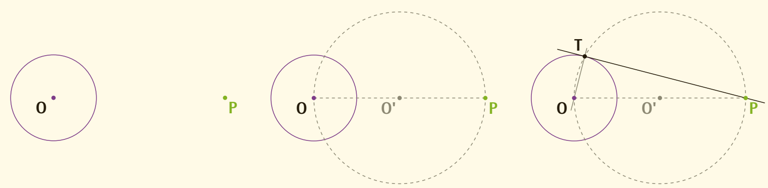


3 4 5 1 2

Recuerden que para calcular el área y el perímetro de un círculo se utiliza el número π (Pi). Para realizar cálculos pueden tomar una aproximación a dos decimales para el valor de π, por ejemplo 3.14.

>>> Lo que aprendimos

1. En el siguiente esquema se muestra una forma de trazar con exactitud una recta tangente a la circunferencia de centro **O** desde el punto **P**. La recta tangente está determinada por el segmento **PT**.



Paso 1 Paso 2 Paso 3

a) Describe el procedimiento para trazar la recta **PT**. ____________________

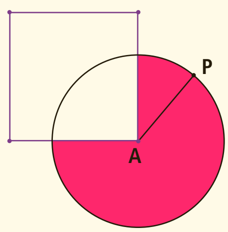
b) Justifica que la recta determinada por $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia.

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Medida.
Subtema
Estimar, medir y calcular.
Antecedentes
Los alumnos ya saben calcular el área de un círculo y saben que un ángulo central determina una fracción de éste. Con esos elementos ahora van a resolver algunos problemas de áreas y de medida de arcos.

Propósitos de la secuencia
Calcular la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Sólo una parte** Resolver problemas para calcular la medida de arcos y de sectores circulares.	Programa 8 Interactivo
2	**Lo que resta** Resolver problemas para calcular la medida del área de algunas coronas.	
3	**De todo un poco** Resolver problemas para calcular el área de distintas figuras.	

2. En el esquema siguiente el lado del cuadrado mide 3 cm. El punto **P** se mueve manteniendo una distancia de 2 cm con respecto al vértice **A**.

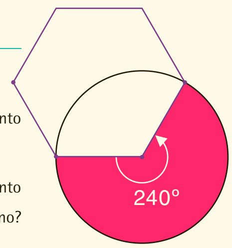


a) ¿Qué figura determina el punto **P**? ____________________

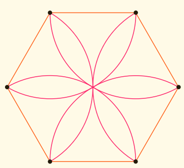
b) ¿Cuánto mide el perímetro de dicha figura? __________

c) Toma en cuenta sólo la parte de la figura que es externa al cuadrado, ¿cuánto mide el área de esa parte de la figura? __________

d) Considera un hexágono regular de 2 m de lado en lugar de un cuadrado, ¿cuánto mediría el área de la figura que determina el punto **P** fuera del hexágono? __________



3. En el siguiente dibujo el hexágono regular mide de lado 2 cm y de apotema 1.73 cm. Reprodúcelo en tu cuaderno.



Recuerda que:
Un hexágono regular se puede dividir en 6 triángulos equiláteros congruentes.

a) ¿Cuánto mide el perímetro de la flor? __________

b) ¿Cuánto mide el área de la flor? __________

59

Propósito de los interactivos. Calcular la medida de arcos y el área de sectores circulares en circunferencias que tienen su centro en un vértice de un polígono regular y su radio es igual a la medida del lado del polígono.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que dibujen la figura que se forma al mover el punto P. El área pedida es la parte del círculo que queda fuera del cuadrado. Verifique que los alumnos pongan las unidades correspondientes en cada respuesta.
Recuerde a los alumnos que 3.14 es una aproximación al valor de π. Les puede pedir que anoten las expresiones dejando el símbolo π y que después anoten el valor obtenido utilizando la aproximación de π.

Respuestas.

a) Es una circunferencia con centro en A y radio de 2 cm.

b) El perímetro es $\frac{3}{4}$ partes del perímetro de la circunferencia. $\frac{3}{4}(4\pi) = 3\pi = 9.42$ cm.

c) El área es igual a $\frac{3}{4}$ partes del área de la circunferencia. Como el área de la circunferencia es 4π la respuesta es: $\frac{3}{4}(4\pi) = 3\pi = 9.42$ cm^2.

d) El área es igual a $\frac{2}{3}$ partes del área de la circunferencia. Como el área de la circunferencia es 4π la respuesta es: $\frac{2}{3}(4\pi) = \frac{8}{3}\pi = 8.37$ m^2.

Sugerencia didáctica. Si observa que tienen dificultades, pida a los alumnos que marquen el ángulo central que subtiende la parte de la circunferencia que queda afuera del hexágono. Pregúnteles cuánto mide ese ángulo. Esto puede ayudarlos a encontrar el área.

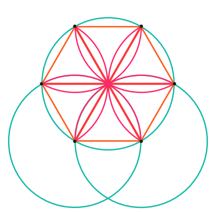
Respuestas.

a) Cada arco es la tercera parte del perímetro de una circunferencia de radio 2 cm (lo subtiende un ángulo central de 120°). La flor se forma con seis arcos, que equivalen a $\frac{6}{3}$ del perímetro de la circunferencia, es decir que el perímetro es equivalente a dos veces el perímetro de la circunferencia. Es igual a $2(4\pi) = 8\pi = 25.12$ cm.

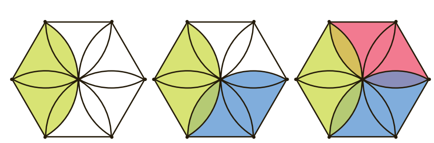
b) El área de una circunferencia de radio de 2 cm es de 4π. El área del hexágono es de 6(1.73). Al restarle al área de la circunferencia el área del hexágono se obtiene el área de tres pétalos. $4\pi - 6(1.73) = 2.18$. Los seis pétalos tienen un área de 4.36 cm^2.

Sugerencia didáctica. Si observa que tienen dificultades para encontrar el área de la flor, hay dos posibles ayudas o pistas que puede darles (cada pista lleva a un procedimiento distinto, escoja la que le parezca más conveniente):

- Que completen dos de las circunferencias en vértices consecutivos del hexágono, tracen una circunferencia de radio 2 cm con centro en el centro del hexágono (el hexágono queda inscrito en esa circunferencia) y tracen los seis triángulos equiláteros que dividen al hexágono. Esto puede ayudarlos a visualizar mejor el área que se les pide ya que cada sección que se forma entre la circunferencia y el hexágono es igual a la mitad de un pétalo de la flor. Las seis secciones entre las figuras forman tres pétalos de la flor. Entonces al restarle al área de la circunferencia el área del hexágono se obtiene el área de tres pétalos.



- Que coloreen tres de los sectores circulares con colores distintos. Esto puede ayudarlos, ya que cada sector circular equivale a un tercio de una circunferencia; al juntarlos se obtiene el hexágono y tres pétalos que se repiten (los que se enciman). Es decir que el área de una circunferencia completa es igual al área del hexágono más tres pétalos de la flor.



Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de su respuesta a esta actividad. Si tienen dificultades puede pedirles que dibujen una circunferencia de radio de 3 cm y que la dividan en seis partes iguales.

Respuestas.

a) Cada arco mide la sexta parte del perímetro de una circunferencia de radio de 3 cm (lo subtiende un ángulo central de 60°). Los tres arcos juntos miden la mitad del perímetro de la circunferencia. El perímetro de la circunferencia es 6π. Entonces el perímetro de la región es de $3\pi = 9.42$ cm.

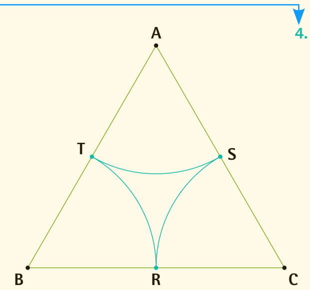
b) El área es $\frac{6(5.19)}{2} = 15.57$ cm^2.

c) Cada sector circular tiene un área igual a una sexta parte del área de la circunferencia. El área de la circunferencia es de 9π.

El área de cada sector circular es de $\frac{1}{6}(9\pi) = \frac{9}{6}\pi = 4.71$ cm^2.

d) El área de la región determinada por los tres arcos se obtiene al restarle al área del triángulo el área de los tres sectores circulares.

El área es de $15.57 - 3(4.71) = 1.44$ cm^2.



4. En el triángulo equilátero **ABC** de lado 6 cm se trazaron tres arcos con centro en sus vértices y radio la mitad de su lado, como se muestra en la figura. La altura del triángulo mide 5.19 cm.

a) ¿Cuánto mide el perímetro de la región determinada por los tres arcos? ________

b) ¿Cuánto mide el área del triángulo **ABC**? ________

c) ¿Cuánto mide el área del sector circular **BTR**? ________

d) ¿Cuánto mide el área de la región determinada por los tres arcos? ________

SESIÓN 2

LO QUE RESTA

>>> Lo que aprendimos

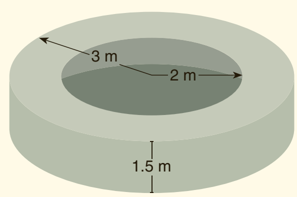
1. Dibuja dos circunferencias concéntricas cuyos radios midan 1 cm y 3 cm respectivamente.

a) ¿Cuánto mide el área que encierra la circunferencia de radio 1 cm? ________

b) ¿Cuánto mide el área que encierra la circunferencia de radio 3 cm? ________

c) ¿Cuánto mide el área de la región comprendida entre las dos circunferencias? ________

2. En el siguiente dibujo se muestra el esquema de una fuente y sus dimensiones.



a) ¿Cuánto mide el área de la cara lateral de la fuente?

____

b) ¿Cuánto mide el área de la cara superior de la fuente?

____

60

Propósito de la sesión. Resolver problemas para calcular la medida del área de algunas coronas (sección entre dos circunferencias).

Respuestas.

a) El área es de 3.14 cm^2.

b) El área es de $9\pi = 28.26$ cm^2.

c) Al área del círculo de radio 3 cm hay que restarle el área del círculo de radio 1 cm. El área es $9\pi - \pi = 8\pi = 25.12$ cm^2.

Respuestas.

a) Si extendemos la cara lateral se obtiene un rectángulo de 1.5 m de altura y largo igual al perímetro de la circunferencia de radio 3 m. Este perímetro es de 6π. Entonces el área de la cara lateral es de $1.5\,(6\pi) = 9\pi = 28.26$ m^2.

b) El área de la cara superior de la fuente se obtiene al restarle al área de la circunferencia de radio de 3 m, el área de la circunferencia de radio de 2 m.
El área es $9\pi - 4\pi = 5\pi = 15.7$ m^2.

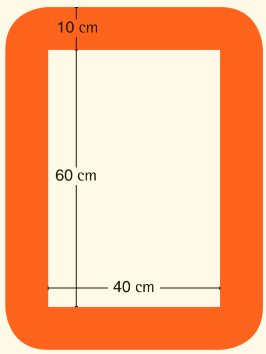
Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de su respuesta a esta actividad. Si tienen dificultad para encontrar el área de la cara lateral sugiérales que hagan una tira de papel y la doblen en forma de cilindro para que identifiquen que al extenderla se obtiene un rectángulo.

DE TODO UN POCO

SESIÓN 3

>>> Lo que aprendimos

1. Calcula el área de la figura anaranjada.



2. Un perro está atado a una cadena que le permite un alcance máximo de 2 m. La cadena está unida a una argolla que se desplaza en una barra en forma de **L**, cuyos segmentos miden 2 m y 4 m.

   a) Dibuja la barra en la que se desplaza la argolla; puedes utilizar una escala de metros a centímetros. Dibuja el contorno de la región en la que puede desplazarse el perro.

   b) ¿Cuál es el área de la región en la que puede desplazarse el perro?

   $16m^2 + 4m^2 + 5\pi\ m^2 = 35.7\ m^2$

>>> Para saber más

Sobre el cálculo de áreas y perímetros de figuras formadas por arcos y rectas, consulta, en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Hernández Garcíadiego, Carlos. "Áreas de sectores circulares" en *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Propósito de la sesión. Resolver problemas para calcular el área de distintas figuras.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de su respuesta a esta actividad.

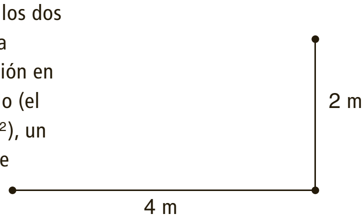
Sugerencia didáctica. Para que los alumnos identifiquen que las esquinas del marco son arcos de circunferencia, puede sugerirles que, con el compás, tracen en el dibujo una circunferencia de 1 cm de radio con centro en las esquinas del espejo. En el marco esto corresponde a circunferencias de 10 cm de radio.

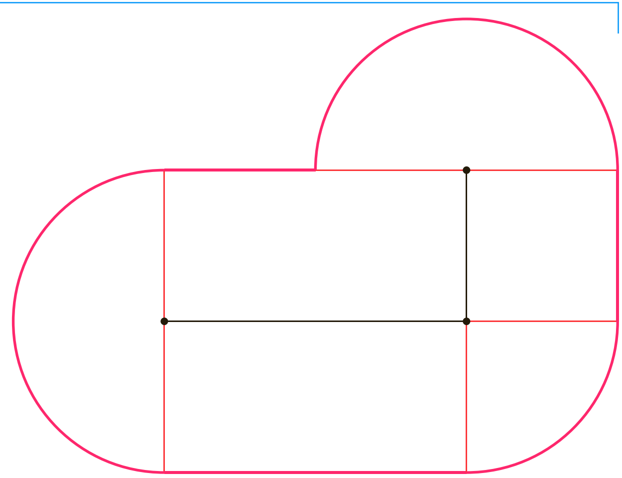
Respuestas.

Si se prolongan los lados del rectángulo que está al interior de la figura anaranjada, ésta queda dividida en dos rectángulos de 40 × 10, dos rectángulos de 60 x 10 y cuatro sectores circulares, cada uno es la cuarta parte de una circunferencia de radio de 10 cm.

El área de los cuatro rectángulos juntos es de 2 000 cm². El área de los cuatro sectores circulares; es igual al área de la circunferencia completa, que es de $100\pi = 314$ cm².
El área total es de 2 314 cm².

Pida a los alumnos que utilicen el compás para identificar el área en la que se puede desplazar el perro, ya que la cadena funciona como un compás con centro en donde esté situado el perro. Una clave está en que se fijen en los dos extremos de la barra y en el vértice. Para encontrar el área se puede dividir la región en 2 mitades de círculo, un cuarto de círculo (el área de un círculo completo es de 4π m²), un cuadrado de 4 × 4 m y otro cuadrado de 2 × 2 m.





Propósito de la sesión. Estudiar la *razón de cambio* en un fenómeno o situación lineal.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Comparar diferentes situaciones mediante la aplicación del concepto de razón y el uso de tablas.

Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 1.

Propósito de la actividad. La intención al plantear este problema es que los alumnos recuerden cuestiones que ya han estudiado acerca de las relaciones lineales en una situación que también les es familiar: el rendimiento de un automóvil, entendido como la constante que relaciona la cantidad de gasolina consumida y la distancia recorrida.

SECUENCIA 6

La razón de cambio

En esta secuencia estudiarás las razones de cambio de dos conjuntos de cantidades que están en una relación de proporcionalidad directa.

SESIÓN 1

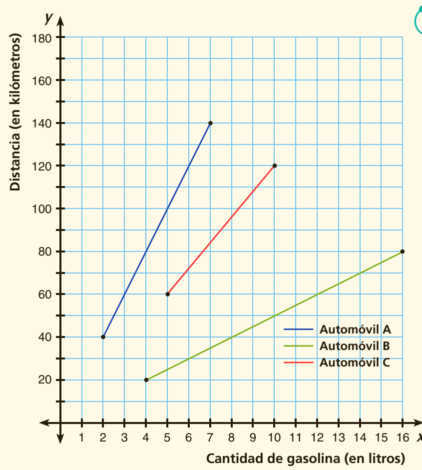
EL INCREMENTO

>>> Para empezar

En primero y segundo grado has representado de diferentes maneras las relaciones funcionales: una tabla, una expresión algebraica, una gráfica o, incluso, un enunciado; cada una de estas representaciones da diferente información.

Por ejemplo, en la secuencia 20 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste que la gráfica de la expresión $y = 3x + 2$ es una línea recta con pendiente igual a 3. En esta secuencia continuarás el estudio de la pendiente de una recta.

>>> Consideremos lo siguiente



La siguiente gráfica describe la relación entre la distancia recorrida y la cantidad de gasolina consumida por tres automóviles. El consumo de gasolina de cada automóvil es constante.

Recuerda que:

El rendimiento de un automóvil es la cantidad de kilómetros que recorre con un litro de gasolina.

Si el rendimiento de un automóvil es constante, la distancia recorrida y la cantidad de gasolina que se consume son cantidades directamente proporcionales.

62

Eje
Manejo de la información.
Tema
Representación de la información.
Subtema
Gráficas.
Antecedentes
Anteriormente los alumnos han estudiado diversas características de las funciones lineales, incluida la pendiente en una gráfica y su significado. Ahora estudiarán la *razón de cambio* relacionándola con la *pendiente*.

Propósitos de la secuencia
Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**El incremento** Estudiar la *razón de cambio* en un fenómeno o situación lineal.	Aula de medios
2	**Pendiente y razón de cambio** Relacionar la razón de cambio con la pendiente de la recta asociada al fenómeno o situación lineal.	Programa 9 Interactivo
3	**Algunas razones de cambio importantes** Estudiar algunas razones de cambio significativas, tanto positivas como negativas.	Programa 10

De acuerdo con la información de la gráfica:

a) ¿Cuántos kilómetros recorre el automóvil C con 13 ℓ de gasolina? ________

b) Si el automóvil C recorriera 204 km, ¿cuántos litros de gasolina consumiría? ______

c) ¿Cuántos kilómetros recorre el automóvil A con un litro de gasolina? ________

d) ¿Qué distancia recorre cada automóvil con tres litros de gasolina?

Automóvil A: ________ Automóvil B: ________ Automóvil C: ________

Comparen sus respuestas, contesten y comenten:

a) Por cada litro de gasolina que consume cada automóvil, ¿cuántos kilómetros recorre?

Automóvil A: ________ Automóvil B: ________ Automóvil C: ________

b) ¿Qué automóvil tuvo un mejor rendimiento? ________

>>> Manos a la obra

I. Responde lo que se te pide a ontinuación.

a) Completa las siguientes tablas para encontrar la distancia recorrida por el automóvil A y por el automóvil C a partir de la cantidad de gasolina consumida.

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
5	100
6	120
7	140
8	160
9	180
10	200

Automóvil A

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
5	60
6	72
7	84
8	96
9	108
10	120

Automóvil C

b) Completa la siguiente tabla considerando las distancias recorridas del quinto litro al décimo litro de gasolina consumida:

	Distancia recorrida	Cantidad de gasolina consumida	Cociente de la cantidad de kilómetros recorridos entre la cantidad de gasolina consumida
Automóvil A	100 km	5 litros	$\frac{100}{5} = 20$
Automóvil C	60 km	5 litros	$\frac{60}{5} = 12$

Respuestas.

a) 156 km.

b) 17 ℓ.

c) 20 ℓ.

d) Automóvil A, 60 km.

Automóvil B, 15 km.

Automóvil C, 36 km.

Respuestas.

a) Automóvil A, 20 km.

Automóvil B, 5 km.

Automóvil C, 12 km.

b) El automóvil con mejor rendimiento es el A, porque recorre 20 km con cada litro de gasolina y la recta que representa esta situación es la que tiene una mayor pendiente con respecto al eje ***x***.

Sugerencia didáctica. Dé un tiempo para que los alumnos discutan la pregunta del inciso b). Ya sea que lleguen a un acuerdo o no, pregúnteles: observando la gráfica, ¿cuál automóvil recorre más kilómetros por cada litro de gasolina?; ¿cuál es el que tiene el peor rendimiento, es decir, recorre menos kilómetros por cada litro de gasolina?

Posibles dificultades. Los alumnos ya han resuelto este tipo de problemas, por lo que se espera que lo hagan ahora sin dificultad. Sin embargo, en la pregunta del inciso d) podrían confundirse: se les pide calcular la distancia que cada automóvil recorre del quinto al octavo litro de gasolina, es decir, la distancia que recorre cada uno con 3 ℓ de gasolina (da igual que sean los primeros 3 ℓ, los últimos que quedan en el tanque o los 3 que hay entre el quinto y el octavo litro).

Algunos estudiantes podrían equivocarse pensando que del quinto al octavo litro hay 4 ℓ:

Quinto litro ⟶ 1 ℓ.

Sexto litro ⟶ 2 ℓ.

Séptimo litro ⟶ 3 ℓ.

Octavo litro ⟶ 4 ℓ.

Explíqueles que la forma correcta de contarlos es la siguiente:

Quinto litro
} 1 litro
Sexto litro
} 2 litros
Séptimo litro
} 3 litros
Octavo litro

Respuestas.

a) Iguales.

b) Iguales.

c) 20 km/ℓ.

d) 12 km/ℓ.

c) Completa la siguiente tabla considerando las distancias recorridas del quinto litro al séptimo litro de gasolina consumida:

	Distancia recorrida	Cantidad de gasolina consumida	Cociente de la cantidad de kilómetros recorridos entre la cantidad de gasolina consumida
Automóvil A	40 km	2 litros	$\frac{40}{2} = 20$
Automóvil C	24 km	2 litros	$\frac{24}{2} = 12$

Comparen sus respuestas y contesten:

a) ¿Cómo son los cocientes que encontraron en las tablas anteriores para el automóvil A, distintos o iguales? ___________

b) ¿Cómo son los cocientes que encontraron en las tablas anteriores para el automóvil C, distintos o iguales? ___________

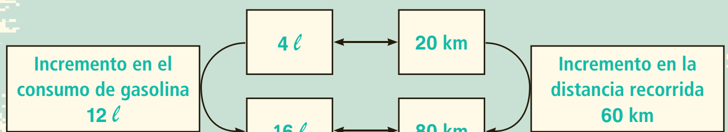
c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar la distancia recorrida por el automóvil A, a partir de la cantidad de gasolina que consumió? _________

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar la distancia recorrida por el automóvil C, a partir de la cantidad de gasolina que consumió? _________

>>> A lo que llegamos

Cuando dos conjuntos de cantidades están relacionadas entre sí, se puede estudiar el cambio o **incremento** de una cantidad respecto al cambio o **incremento** de la otra.

En este caso, la distancia recorrida está relacionada de manera directamente proporcional a la cantidad de gasolina consumida. Los incrementos de estas cantidades se pueden comparar. Por ejemplo, para el automóvil B, un incremento de 60 km recorridos corresponde a un incremento de 12 ℓ de gasolina consumidos.

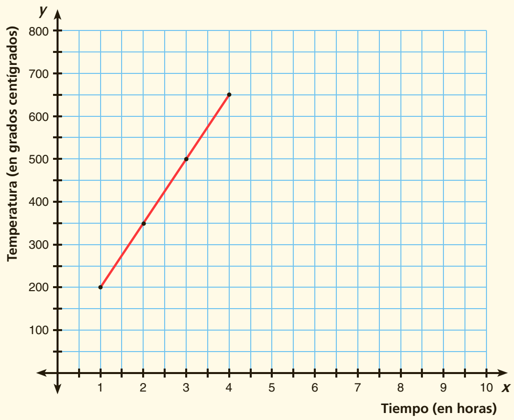


Al cociente que se obtiene al dividir el incremento de un cantidad entre el incremento correspondiente a la otra se le llama **razón de cambio**.

En el ejemplo, la razón de cambio entre la distancia recorrida (60 km) y la cantidad de gasolina consumida (12 ℓ) es: $\frac{60}{12} = 5$, que resulta ser el rendimiento del automóvil B.

Sugerencia didáctica. Analicen juntos la información de este apartado. Puede ser útil revisar algunas secuencias de los libros de grados anteriores para que los alumnos identifiquen en otros ejemplos el incremento.

II. Una barra de acero se calienta en un horno de alta temperatura. La siguiente gráfica muestra los resultados de variación de la temperatura de la barra respecto al tiempo de calentamiento.



a) Con la información de la gráfica anterior completa la siguiente tabla:

	Incremento del tiempo (en horas)	Incremento en la temperatura (en °C)	Razón de cambio de la temperatura entre el tiempo
De la primera a la cuarta hora	3	450	$\frac{450}{3}$ = 150
De la primera a la tercera hora	2	300	150
De la primera a la segunda hora	1	150	$\frac{150}{1}$ = 150
De la segunda a la tercera hora	2	150	$\frac{300}{2}$ = 150
De la tercera a la cuarta hora	1	150	$\frac{150}{1}$ = 150

b) ¿Cómo son las razones de cambio de la tabla anterior, iguales o diferentes? ____________

Explica por qué.

____

c) ¿Qué temperatura tenía la barra de acero cuando se introdujo al horno? ________

d) ¿Cuál será la temperatura de la barra de acero en la séptima hora? ____________

Comparen sus resultados y contesten:

¿Cuál es el incremento de la temperatura de la barra en cada hora? __________

Respuestas.

b) Los cocientes son iguales.

c) 50 °C.

d) 1 100 °C.

Posibles dificultades. Es probable que los estudiantes piensen que la temperatura de la barra de acero al introducirse al horno era de 0 °C porque aún no ha recibido calor, sin embargo, esto es incorrecto. Sugiérales analizar la gráfica, en ella verán que, al transcurrir la primera hora, la barra de acero tenía una temperatura de 200 °C, por lo que puede inferirse que tenía una temperatura de 50 °C antes de entrar al horno. También puede pedirles que prolonguen la recta en la gráfica hasta que interseque al eje ***y***; el punto será (0, 50).

Sugerencia didáctica. Si analizaron algunas secuencias de grados anteriores para hallar el incremento, considérenlas ahora para encontrar la razón de cambio.

Para saber más. En **Matemáticas I** y en **Matemáticas II** se trabajó con el concepto de *constante de proporcionalidad* para referirse a un número que permite pasar de una columna a la otra en una tabla. Más adelante la constante de proporcionalidad permitió asociarle una expresión algebraica a las relaciones de proporcionalidad directa ($y = kx$), y luego se relacionó la constante de proporcionalidad con la pendiente de la recta asociada al problema. En esta secuencia se pretende introducir el concepto de razón de cambio vinculándolo con el cociente de los incrementos y con la pendiente.

Así pues, a lo largo de la educación secundaria se pretende que los alumnos vayan ampliando sus conocimientos sobre las relaciones lineales, añadiendo significados que les permitan representar y analizar situaciones con mayor profundidad.

Propósito de la sesión. Relacionar la razón de cambio con la pendiente de la recta asociada al fenómeno o situación lineal.

SECUENCIA 6

>>> A lo que llegamos

Cuando la gráfica asociada a la relación entre dos conjuntos de cantidades son puntos que están sobre una línea recta, la **razón de cambio** es **constante**.

En el problema anterior, la razón de cambio de la temperatura en cada hora es 150, sin importar el intervalo de tiempo en que se calculen los incrementos.

SESIÓN 2

PENDIENTE Y RAZÓN DE CAMBIO

>>> Para empezar

En la secuencia 2 **¿Cómo se mueven las cosas?** de tu libro de **Ciencias II**, aprendiste que, en general, la rapidez y la velocidad proporcionan distintas informaciones sobre el movimiento de un objeto. Sin embargo, cuando el objeto se mueve en una línea recta y lo hace en un sólo sentido, la rapidez y la magnitud de la velocidad coinciden.

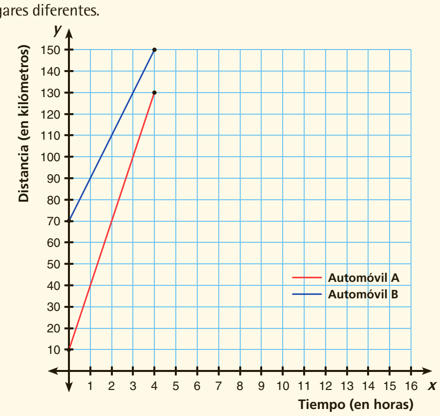
Conexión con **Ciencias II**

Secuencia 2: ¿Cómo se mueven las cosas?

En esta sesión estudiarás el movimiento de dos automóviles al ir sobre una línea recta en un mismo sentido. A lo largo de la sesión, nos referiremos al cociente de la distancia recorrida entre el tiempo empleado en recorrerla como velocidad.

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente gráfica muestra las posiciones en las que, en determinados tiempos, se encontraban dos automóviles. Cada automóvil mantuvo una velocidad constante. Además, salieron de lugares diferentes.



66

Propósito del programa. Presentar fenómenos o situaciones lineales para estudiar la razón de cambio.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito del interactivo. Presentar problemas asociados a gráficas que el alumno pueda manipular para encontrar la relación entre la razón de cambio y la pendiente de la recta asociada al fenómeno o situación lineal.

Sugerencia didáctica. Dé unos minutos a los alumnos para que analicen la gráfica y luego pídales que expliquen por qué se afirma que los automóviles A y B salieron de lugares distintos.

La intención es que se den cuenta de que la ordenada al origen de las rectas es distinta: mientras el automóvil A salió del kilómetro 10, el B salió del kilómetro 70.

De la segunda hora a la séptima hora:

a) Para el automóvil A, ¿cuál es la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo? ______

b) ¿A que velocidad fue el automóvil A? ______

c) Para el automóvil B, ¿cuál es la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo? ______

d) ¿A que velocidad fue el automóvil B? ______

e) ¿Qué automóvil fue a mayor velocidad? ______

Recuerda que:

Cuando un automóvil va a velocidad constante, la gráfica asociada a la relación distancia-tiempo es una línea recta.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Responde lo que se te pide a continuación.

a) Completa las siguientes tablas para encontrar las posiciones de los automóviles en los instantes indicados de tiempo.

Automóvil A	
Tiempo transcurrido (en horas)	Distancia a la que se encuentra el automóvil (en kilómetros)
1	40
2	70
3	100
4	130
5	160

Automóvil B	
Tiempo transcurrido (en horas)	Distancia a la que se encuentra el automóvil (en kilómetros)
1	90
2	110
3	130
4	150
5	170

b) Con la información de la tabla del automóvil A, completa la siguiente tabla para encontrar la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo.

	Incremento del tiempo (en horas)	Incremento de la distancia recorrida (en kilómetros)	Razón de cambio del automóvil A (distancia-tiempo)
De la segunda a la tercera hora	1	30	$\frac{30}{1} = 30$
De la segunda a la cuarta hora	2	60	$\frac{60}{2} = 30$
De la tercera a la cuarta hora	1	30	$\frac{30}{1} = 30$

Automóvil A

Posibles dificultades. Los estudiantes pueden tener dificultades para hallar información correspondiente a los recorridos de ambos automóviles entre la segunda y la séptima hora, ya que la gráfica sólo muestra dichos recorridos hasta la cuarta hora. Recuérdeles que:

- Al ser una relación lineal, la razón de cambio será constante, por lo que pueden prolongar la recta hasta donde lo necesiten.
- Es posible saber en dónde estará cada automóvil a la séptima hora de recorrido si conocen la razón de cambio, misma que puede averiguarse si se conocen al menos dos puntos de la recta.

Otra posible dificultad consiste en no saber cuál es el divisor ni cuál el dividendo al tratar de obtener la razón de cambio. Por ejemplo, en este problema el error sería dividir el incremento en el número de horas (que es 5) entre el incremento en la distancia recorrida por el automóvil A (150). De esta forma obtendrían $\frac{5}{150} = 0.0333\ldots$ Si algunos de sus alumnos cometen este error, revisen las tablas que llenaron en la sesión anterior y mientras lo hacen, explíqueles que siempre se divide la variable que se grafica en el eje ***y*** entre la que se grafica en el eje ***x*** porque la primera es la variable que depende del valor de la segunda.

Respuestas.

a) En 1 hora el incremento en la distancia es de 30 km, y como $\frac{30}{1} = 30$, la razón de cambio es 30.

b) 30 km/h.

c) En 1 hora el incremento en la distancia es de 20 km, y como $\frac{10}{1} = 20$, la razón de cambio es 20.

d) 20 km/h.

e) El automóvil A.

Propósito de la actividad. Ahora, al incluir las expresiones algebraicas correspondientes al recorrido de cada automóvil, se pretende que los alumnos relacionen a la razón de cambio (cociente entre los incrementos) con la pendiente de la recta.

Respuestas.

c) A 30 km/h.

d) En el kilómetro 10.

Posibles dificultades. Los alumnos podrían pensar que la expresión correcta para contestar el inciso e) es $y = 30x$, lo cual es incorrecto, ya que en ésta no se considera que el automóvil A comenzó su recorrido en el kilómetro 10.

c) ¿A qué velocidad va el automóvil A? ____________

d) ¿En qué kilómetro inició su recorrido el automóvil A? ____________

e) Si y es la distancia recorrida por el automóvil A en el tiempo x, ¿cuál la expresión algebraica que permite calcular y a partir de x? Subráyala.

- $y = 30x$
- $y = 30x + 10$
- $y = 30x + 70$

f) Con la información de la tabla del automóvil B, completa la siguiente tabla para encontrar la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo.

	Incremento del tiempo (en horas)	Incremento de la distancia recorrida (en kilómetros)	Razón de cambio del automóvil B (distancia-tiempo)
De la primera a la segunda hora	1	20	$\frac{20}{1} = 20$
De la primera a la tercera hora	2	40	$\frac{40}{2} = 20$
De la primera a la cuarta hora	3	60	$\frac{60}{3} = 20$

Automóvil B

Respuestas.

g) A 20 km/h.

h) En el kilómetro 70.

g) ¿A qué velocidad va el automóvil B? ____________

h) ¿En qué kilómetro inicio su recorrido el automóvil B? ____________

i) Si y es la distancia recorrida por el automóvil B en el tiempo x, ¿cuál es la expresión algebraica que permite calcular y a partir de x? Subráyala.

Recuerda que:
La pendiente de una recta
$y = mx + b$
es el número m.

- $y = 20x$
- $y = 20x + 10$
- $y = 20x + 70$

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cómo se comparan la pendiente de la recta y la razón de cambio (distancia-tiempo) asociadas al automóvil A?

b) ¿Cómo se comparan la pendiente de la recta y la razón de cambio (distancia-tiempo) asociadas al automóvil B?

68

Sugerencia didáctica. Esta discusión es muy importante. En este punto los alumnos muy posiblemente se hayan dado cuenta de que la pendiente de la recta y la razón de cambio son números iguales, sin embargo, para otros quizá no sea tan obvio. Permítales exponer sus dudas y pida que argumenten sus ideas.

Luego, lean juntos el apartado *A lo que llegamos* y coméntenlo. Cuando terminen, pídales que escriban en su cuaderno una definición de *razón de cambio* y de *pendiente de la recta*. No tiene que ser una explicación muy formal matemáticamente hablando, pero sí exija que sea clara, incluso sugiérales que utilicen ejemplos como:

Razón de cambio es el cambio relativo de una de las variables respecto a la otra.

Pendiente de la recta es la inclinación que ésta tiene con respecto al eje x, mientras más se acerque al eje y, tiene una mayor inclinación. En la expresión de la recta $y = mx + b$ la literal m es la que representa la pendiente.

Para aclarar dudas sobre la pendiente de la recta, pueden revisar la secuencia 23 de **Matemáticas II**.

>>> A lo que llegamos

Cuando la relación entre dos cantidades tenga por gráfica una línea recta, la razón de cambio es igual a la pendiente de la recta.

Por ejemplo, si un automóvil E va a velocidad constante de 40 km/h y parte del kilómetro 15 de la carretera, entonces la expresión algebraica asociada a la distancia que recorre el automóvil a partir del tiempo es $y = 40x + 15$; la pendiente de esta recta es 40 y la razón de cambio (distancia-tiempo) es también 40.

II. a) Si un automóvil C se desplaza a mayor velocidad que el automóvil A, ¿cómo es la razón de cambio del automóvil C respecto a la del automóvil A, mayor o menor?

____

b) Si la razón de cambio de un automóvil D es mayor que del automóvil B, ¿qué automóvil se desplaza a mayor velocidad? ____________________

Respuestas.

a) Es mayor.

b) El automóvil D.

>>> Lo que aprendimos

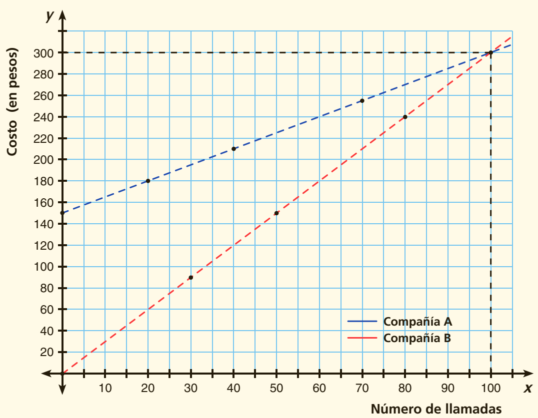
La siguiente gráfica muestra el costo del servicio telefónico de dos compañías.

Propósito de la actividad. Este problema es similar al de los automóviles, pero por el contexto utilizado aquí va a ser importante el punto en el que se intersecan las rectas. Cuando terminen de resolverlo puede hacer algunas preguntas a los alumnos como:

- Si hacen menos de 100 llamadas mensuales, ¿cuál de las dos compañías les conviene contratar?
- ¿Y si hacen más de 100 llamadas mensuales?
- Si hacen exactamente 100 llamadas, ¿cuál compañía conviene más?

Integrar al portafolios. Guarde una copia de las respuestas de los alumnos a estas preguntas. Si tienen dificultades, repasen el apartado *Manos a la obra* de esta sesión.

Costo del servicio telefónico



Respuestas.

a) 1.5; si se toman cualesquiera dos puntos, por ejemplo (0, 150) y (20, 180), el incremento es 20 en el número de llamadas y 30 en el costo, entonces el cociente es $\frac{30}{20}$ = 1.5, que es la razón de cambio.

b) 1.5

c) 3. Tomando como referencia los puntos (0, 0) y (100, 300), el incremento en el número de llamadas es 100 y en el costo es 300, así que el cociente es $\frac{300}{100}$ = 3.

d) 3

e) Porque aunque se hagan 0 llamadas la compañía A cobra $150; en cambio, la compañía B empieza a cobrar sólo hasta que se hace la primera llamada. Por eso, aunque el costo por llamada de la compañía A es la mitad que el de la compañía B, sus gráficas se intersecan en un punto (100, 300).

f) Si se hacen menos de 100 llamadas conviene más la compañía B, si se hacen más de 100 llamadas es más barato con la compañía A. La gráfica sirve para contestar esta pregunta: la tarifa de la compañía B es menor que la de la A de la llamada 1 a la 100, y si se prolongan las rectas se puede ver que a partir de la llamada 101 la A es más barata.

a) ¿Cuál es la razón de cambio (aumento en el costo por llamada) en la compañía A? ____________

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a la compañía A? ____________

c) ¿Cuál es la razón de cambio (aumento en el costo por llamada) en la compañía B? ____________

d) ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a la compañía B? ____________

e) ¿Por qué el costo de las 100 primeras llamadas telefónicas es el mismo en las dos compañías? ____________

f) ¿Cuál de las dos compañías tiene una tarifa más económica si se hacen menos de 100 llamadas? ________ ¿y si se hacen más de 100? ________

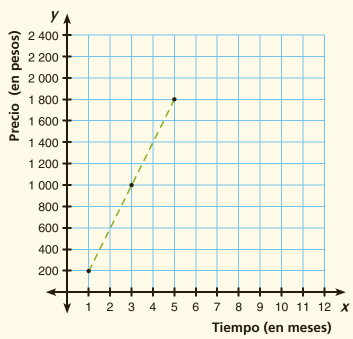
SESIÓN 3

ALGUNAS RAZONES DE CAMBIO IMPORTANTES

>>> Lo que aprendimos

1. La siguiente gráfica muestra los cambios en el precio de un artículo durante los primeros meses del año.

Variación del precio de un artículo



Propósito de la sesión. Estudiar algunas razones de cambio significativas, tanto positivos como negativos.

Propósito del programa. Mostrar y analizar ejemplos de razones de cambio significativas.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

a) Suponiendo que el aumento en el precio del artículo es el mismo cada mes, completa la siguiente tabla.

	Incremento del tiempo (en meses)	Incremento del precio (en pesos)	Cociente del incremento del precio entre el tiempo
Del primero al tercer mes	2	600	$\frac{600}{2} = 300$
Del primero al cuarto mes	3	900	$\frac{900}{3} = 300$
Del tercero al sexto mes	3	900	$\frac{900}{3} = 300$
Del primero al segundo mes	1	300	$\frac{300}{1} = 300$
Del segundo al tercer mes	1	300	$\frac{300}{1} = 300$
Del tercero al cuarto mes	1	300	$\frac{300}{1} = 300$

b) ¿Cómo son los cocientes de la tabla anterior, iguales o diferentes? ___________

Explica por qué sucede así ___________________________________

c) Si el primer mes corresponde a enero, ¿cuál es el precio del artículo en marzo?

____

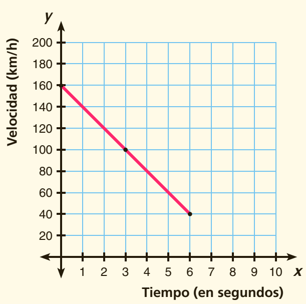
d) Si el incremento fue el mismo cada mes, ¿cuál será el precio del artículo en diciembre?

____

Comparen sus resultados y contesten:

¿Cuál es el incremento mensual del precio del artículo? ___________

2. La siguiente gráfica muestra la relación entre la velocidad de un automóvil y el tiempo que transcurre hasta estar en alto total.



Recuerda que:
La ordenada al origen de una recta es la ordenada del punto en que la recta interseca al eje y.

Recuerda que:
La pendiente de una línea recta puede ser un número con signo positivo o negativo y que la razón de cambio es igual a la pendiente de la recta.

a) ¿Cuál es la ordenada al origen de la recta anterior? ___________

Respuestas.

b) Son iguales porque el incremento es constante.

c) En enero el artículo cuesta $600; si cada mes aumenta $300, en marzo su precio es de $1 200.

d) $3 900

3

Respuesta.

a) 160.

Propósito de la actividad. Llenar la tabla a partir de los datos de la gráfica debe ser sencillo para los alumnos. El reto en este problema es que logren hallar la relación funcional asociada a la situación; por ello es importante que llenen la tabla utilizando la relación funcional que hayan elegido.

Respuestas.

d) La velocidad disminuye, es decir, el automóvil va frenando.

e) La pendiente es negativa.

f) La razón de cambio es –20, al igual que la pendiente de la recta.

Sugerencia didáctica. Quizá sea útil recordar cuándo la pendiente de una recta es positiva y cuándo es negativa. Para ello, plantee las siguientes situaciones a manera de ejemplos y pida a los alumnos que dibujen cómo sería la recta asociada a cada situación y si ésta es positiva o negativa:

- El costo de dos dulces es de $3, el de ocho dulces es de $12.
- Un artículo ha bajado de precio de manera constante. En enero costaba $66 y en marzo $44.
- El costo de un viaje en taxi cuando se ha recorrido 1 km es de $15 y cuando se han recorrido 7 km es de $63.

b) Si y es la velocidad del automóvil en el tiempo x, ¿cuál es la expresión algebraica asociada a esta situación? Subráyala.

- $y = -180x$
- $y = -20x + 160$
- $y = -180x + 20$

c) Completa la siguiente tabla para verificar que la expresión algebraica que elegiste es la correcta.

Tiempo (en segundos) x	Distancia (en metros) y
1	140
2	120
3	100
4	80
5	60

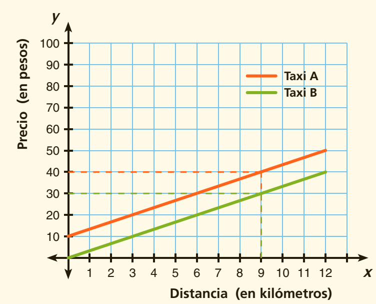
d) A medida que va transcurriendo el tiempo, ¿la velocidad del automóvil aumenta o disminuye? ____________

e) ¿Cómo es la pendiente de la recta anterior, positiva o negativa? ____________

f) ¿Cuál es la razón de cambio (velocidad-tiempo) del problema anterior? ________

La razón de cambio puede ser un número con signo positivo o negativo.

3. La siguiente gráfica muestra el costo de un viaje en dos taxis en dos ciudades distintas.



a) ¿Cuál es el costo en el taxi A por cada kilómetro recorrido? __________

b) ¿Cuál es la razón de cambio del taxi A? __________

c) ¿Cuál es el costo en el taxi B por cada kilómetro recorrido? __________

d) ¿Cuál es la razón de cambio (precio-distancia) del taxi B? __________

e) ¿Qué taxi cobró más? __________

f) ¿Por qué cobró más un taxi que otro? __________

g) ¿Cómo se refleja lo anterior respecto a la razón de cambio (precio-distancia) de cada taxi? __________

>>> Para saber más

Sobre la pendiente de una recta como razón de cambio, consulta:
http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Funcion_afin/index.htm
Ruta: Índice → características
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Respuestas.

a) Cuesta \$3.333… porque recorrer 3 kilómetros cuesta \$10, y recorrer 6 kilómetros cuesta \$20, entonces, el incremento en el costo es 10, y en los kilómetros recorridos es 3, por lo que $\frac{10}{3} = 3.333\ldots$

Sin embargo, hay que tomar en cuenta que en el taxi A se cobran \$10 antes de iniciar el trayecto, así que habrá que sumar esa cantidad más el monto obtenido por los kilómetros recorridos.

b) 3.333…

c) Cuesta igual que en el taxi A, \$3.333…

d) 3.333…

e) El taxi A.

f) Porque el servicio en el taxi A tiene un costo de \$10 (antes de recorrer ningún kilómetro).

g) La razón de cambio de los dos taxis es igual, hecho que puede verificarse gráficamente porque las pendientes son iguales (son dos rectas paralelas). Pero hacer el mismo recorrido en uno o en otro taxi no cuesta igual porque el taxi A cobra \$10 antes de iniciar el trayecto, es decir, la ordenada el origen es distinta.

Integrar al portafolios. Esta actividad también puede serle útil para valorar si los alumnos han comprendido lo que estudiaron en esta secuencia.

Propósito de la sesión. Reflexionar sobre cuáles son las preguntas adecuadas para recopilar, organizar, representar e interpretar datos, dependiendo de la situación que se quiere analizar.

Emplear encuestas para recopilar datos.

Elegir adecuadamente una forma para organizar y representar los datos.

Propósito del programa. Mostrar y ejemplificar el proceso que se sigue para diseñar un estudio o experimento estadístico y seleccionar la manera más adecuada para presentar la información derivada.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito del interactivo. Que los alumnos cuenten con una herramienta de captura de información o datos estadísticos y presentación gráfica de los mismos con opción de diferentes tipos de gráficas.

Propósito de la actividad. Reflexionar sobre si las preguntas que se plantean en una encuesta permitirán obtener respuestas con las que se pueda estudiar cierta situación o fenómeno.

SECUENCIA 7

Diseño de experimentos y estudios estadísticos

En esta secuencia aprenderás que, para obtener información confiable en un experimento o estudio estadístico, es conveniente reflexionar sobre los procedimientos y herramientas que se utilizaran para recopilar, organizar y representar los datos que se obtengan en cada etapa que conforma al experimento o estudio en cuestion.

SESIÓN 1

DISEÑO DE UN ESTUDIO ESTADÍSTICO ¿QUÉ MATERIA TE GUSTA MÁS?

>>> Para empezar

Los estudios estadísticos nos permiten investigar sobre diversas situaciones o fenómenos.

Por medio de un estudio estadístico adecuado, lo mismo podemos conocer los efectos que provoca una determinada sustancia en los seres vivos, que el comportamiento del mercado ante un determinado producto o servicio así como, conocer las preferencias de un determinado grupo o sector.

Una fase importante del estudio, dado que es el inicio, es determinar cuál es la pregunta o el problema que se quiere estudiar y la manera en que se obtendrán los datos.

>>> Consideremos lo siguiente

Lee cuidadosamente las preguntas que aparecen en las siguientes encuestas y contéstalas:

Encuesta A	Encuesta B
• Asignatura o materia que te gusta más y por qué	• Asignatura o materia que te resulta más fácil. Anota tu última calificación en esa materia
• Asignatura o materia que te gusta menos y por qué	• Asignatura o materia que te resulta más difícil. Anota tu última calificación en esa materia

74

Eje
Manejo de la información.
Tema
Representación de la información.
Subtema
Gráficas.
Antecedentes
En **Matemáticas I** y **II** los alumnos han hecho distintos experimentos y elegido las formas más convenientes para organizar y presentar los resultados. Ahora se enfrentarán al diseño de un experimento sencillo que abarca la definición del objeto de estudio, las preguntas que deben hacerse, la población o muestra que se considerará y las formas de organizar y presentar los resultados.

Propósitos de la secuencia

Diseñar un estudio o experimento a partir de datos obtenidos de diversas fuentes y elegir la forma de organización y representación tabular o gráfica más adecuada para presentar la información.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Diseño de un estudio estadístico. ¿Qué materia te gusta más?** Reflexionar sobre cuáles son las preguntas adecuadas para recopilar, organizar, representar e interpretar datos, dependiendo de la situación que se quiere analizar. Emplear encuestas para recopilar datos. Elegir adecuadamente una forma para organizar y representar los datos.	Programa 11 Interactivo
2	**Un juego de letras. Otro estudio estadístico** Realizar un estudio en el que se aborde la idea de muestras.	
3	**¿Qué cantidad de agua consumen diariamente los alumnos de tercer grado?** Plantear una hipótesis o determinar los posibles resultados de un experimento (que puede o no ser de azar). Posteriormente, realizar el experimento y organizar los resultados para compararlos con las hipótesis. Estudiar datos cuantitativos.	Programa 12

a) ¿Cuál de las encuestas anteriores utilizarías para obtener datos con los que puedas analizar los siguientes temas? Anota A o B en cada tema para indicar que es la encuesta A o la encuesta B, según consideres.

Temas

B Nivel de aprovechamiento y desempeño de los estudiantes.

A Intereses e inquietudes de los estudiantes en su escuela.

Hábitos de estudio de los estudiantes de secundaria.

A Preferencia acerca de las materias que cursan los estudiantes.

Encuesta A

Encuesta B

Justifica tu respuesta. ______

b) De acuerdo con lo que anotaste en el inciso anterior, si se pretende estudiar los intereses e inquietudes de los estudiantes, ¿será suficiente con los datos que se obtengan de las dos preguntas de la encuesta que elegiste? ______ ¿Por qué?

c) ¿Qué tipo de respuestas se pueden obtener al realizar la encuesta B? Anota algunos ejemplos de posibles respuestas. ______

d) Si se quiere recopilar datos para investigar sobre los hábitos de estudio de los estudiantes de secundaria, ¿qué otras preguntas consideras sería necesario incluir en la encuesta? ______

¿Por qué es importante hacer las preguntas que sugieres? ______

e) Si el tema que se pretende estudiar comprende intereses e inquietudes de los estudiantes. ¿Cuáles esperas que sean los de tus compañeros? ______

Comparen sus respuestas.

75

Posibles dificultades. Para algunos estudiantes puede ser difícil distinguir qué se quiere estudiar en la encuesta A y qué se quiere estudiar con la encuesta B. Por ejemplo, podrían pensar que, preguntando cuál es la materia más fácil o más difícil (encuesta B), se pueden conocer los intereses de los encuestados; sin embargo, esa pregunta es más pertinente para averiguar el nivel de desempeño.

Por otro lado, las preguntas pueden ser en sí mismas objeto de cuestionamientos por parte de los alumnos: las de la encuesta B. Un encuestado podría responder que le parece fácil la biología y que su calificación es 6. ¿Cómo interpretar esa respuesta, la biología le es fácil o difícil al encuestado?

Incluso el uso de ciertos términos genera la necesidad de acuerdos para que todos les atribuyan el mismo significado: sobre las palabras "aprovechamiento" y "desempeño" requiere aclarar qué se entiende con cada una. Usted puede preguntarles ¿qué es aprovechamiento y qué es desempeño?, ¿son iguales o distintos?, si son distintos, ¿en qué lo son? Si esta discusión genera polémica, usted puede sugerirles que utilicen sólo la palabra aprovechamiento ya que quizá ésta les sea más familiar en el contexto escolar.

Por lo anterior, es importante que los alumnos justifiquen sus respuestas y que hagan comentarios grupales o en equipos antes de pasar al apartado *Manos a la obra*, aunque todavía no lleguen a un acuerdo o existan dudas.

Sugerencia didáctica. Pida a varios alumnos que lean sus preguntas para que los demás las contesten. Éste es un buen ejercicio para:

- Comentar grupalmente si las preguntas son adecuadas para obtener información sobre los hábitos de estudio de los estudiantes de secundaria.
- Ver si todos comprenden las preguntas.
- Averiguar si alguien da una repuesta inesperada o ambigua.

Si hay dificultades con alguna pregunta, hay que modificarla para que sea clara y precisa.

3

Propósito de la actividad. Que los alumnos sepan cuáles son las representaciones tabulares y gráficas más adecuadas de acuerdo a la situación que se está estudiando. En este caso, en la encuesta A los datos que se obtendrán son cualitativos; y en la encuesta B la primera parte de cada respuesta es cualitativa, mientras la segunda (las calificaciones) son cuantitativas.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que expliquen por qué eligen una u otra opción. Por ejemplo, "es la segunda tabla porque presenta las razones de aquellos que eligieron educación física como la materia que más les gusta".

Respuestas. Es la segunda tabla, porque en la encuesta A justamente lo que se pregunta es qué materia les gusta más/menos y por qué. En cambio, en la primera tabla lo que se muestra es cuántos alumnos dijeron que las matemáticas son la materia que se les hace más fácil o difícil y cuál es su calificación (que es lo que se quiere averiguar en la encuesta B).

2

>>> Manos a la obra

I. En un grupo realizaron las dos encuestas anteriores; los datos que obtuvieron los organizaron en tablas y presentaron en gráficas.

a) ¿Cuál de las siguientes tablas corresponde a datos que se pudieron obtener al aplicar la encuesta A? Marquen con una ✓ y justifiquen su respuesta.

Recuerden que:

En general, los datos que se obtienen en un estudio o experimento pueden ser de dos tipos, cualitativos *(por ejemplo, el color de cabello, ojos o piel) o* cuantitativos *(por ejemplo, la edad, el peso y la estatura de una persona).*

En ambos casos se pueden organizar en tablas *de* frecuencia absoluta, relativa *o* porcentaje. *Cuando el conjunto de datos es cuantitativo y grande se puede organizar en tablas de datos agrupados en intervalos.*

☐

Asignatura: matemáticas				
Calificación	Más fácil		Más difícil	
	Conteo	Frecuencia	Conteo	Frecuencia
5	I	1	III	3
6	II	2	IIIII	5
7	I	1	II	2
8	II	2		0
9	III	3	I	1
10	IIII	4	II	2

✓

La materia que más me gusta: educación física		
Porque	Frecuencia	Porcentaje
hacemos ejercicio	2	33
salimos a jugar	3	50
no hacen examen	1	16

b) Las siguientes gráficas fueron elaboradas por diferentes alumnos para mostrar los datos que obtuvieron al aplicar la encuesta B. ¿Cuál gráfica muestra adecuadamente los datos que pudieron obtenerse al aplicar dicha encuesta? Marquen con una ✓ en el recuadro correspondiente y justifiquen su respuesta.

Recuerden que:

Una gráfica de barras *se utiliza para presentar y comparar frecuencias con que ocurre una cualidad o atributo.*

Una gráfica circular sirve *para comparar qué fracción de un todo es cada parte.*

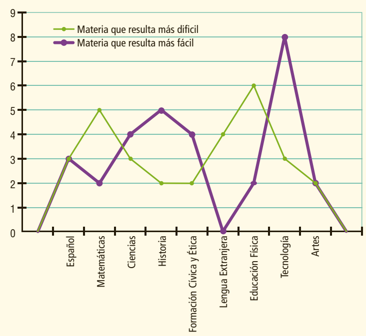
Un histograma presenta datos agrupados en intervalos; cuando éstos son iguales, la altura de cada barra indica su frecuencia.

Un polígono de frecuencias *también muestra la frecuencia absoluta, relativa o porcentaje de datos agrupados.*

Una gráfica de línea *presenta las variaciones en el tiempo.*

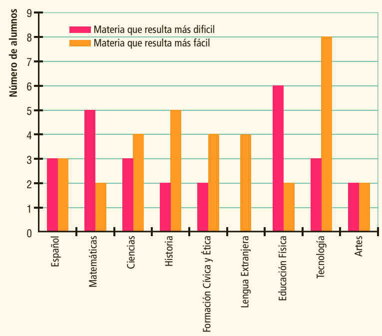
☐

Resultados de la encuesta



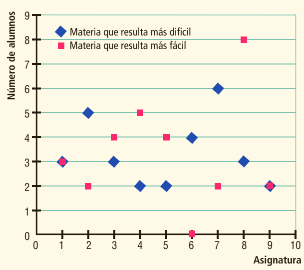
✓

Resultados de la encuesta



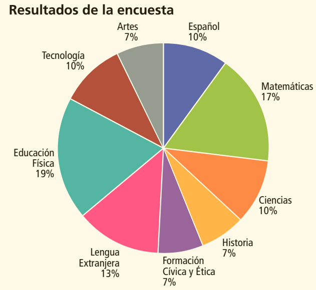
☐

Resultados de la encuesta



☐

Resultados de la encuesta



c) De acuerdo con la gráfica que consideran muestra correctamente los resultados de la encuesta B, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Señalen con una "V" en el recuadro.

- V La segunda materia más difícil para los alumnos es matemáticas.
- F La materia más fácil es educación física.
- V Ningún alumno consideró que la materia de lengua extranjera es más fácil.
- V La materia que más alumnos eligen como la más fácil es tecnología.

Respuestas.

La **primera gráfica** es un polígono de frecuencias y, aunque en ella pueden leerse los datos con relativa facilidad, suele utilizarse para representar datos agrupados en intervalos, por lo que no es la más adecuada en este caso.

La **segunda gráfica** es de barras. En ella se ven claramente las frecuencias para "más difícil" y "más fácil" por asignatura. Ésta es la gráfica correcta para la situación que se está presentando, ya que son datos cualitativos.

La **tercera gráfica** es de dispersión de puntos y no es la adecuada para presentar los resultados de esta encuesta porque suele emplearse para mostrar o encontrar la correlación de dos variables, por ejemplo, la estatura y el peso de un conjunto de personas.

La **cuarta gráfica** es circular y no es adecuada en este caso, ya que sólo permite ver qué porcentaje de los alumnos encuestados dijo que tal o cual materia es la más difícil. Esta gráfica no permite comparar cuántos alumnos dijeron que cierta asignatura es la más fácil y cuántos que es la más difícil. Además, le falta información a la gráfica que explique qué es lo que se representa.

Sugerencia didáctica. Cuando terminen de contestar estas preguntas, divida al grupo en dos; a los alumnos de una de las mitades pídales que escriban una afirmación que sea *falsa* (considerando la información de la gráfica de barras) y, a la otra mitad, una afirmación que sea *verdadera*. Después, intercambie las producciones entre los alumnos. La instrucción es que verifiquen que efectivamente la afirmación que recibieron sea falsa o verdadera, según el caso.

Propósito de la actividad. Que los alumnos recopilen datos, los organicen y presenten adecuadamente.

Si su grupo está formado por pocos alumnos, puede considerar también a los de los otros grados, en cuyo caso hay que revisar las preguntas de la encuesta para ver si son pertinentes. Por ejemplo, las materias que hay en primero y en segundo no son las mismas que en tercero, entonces hay que hacer ajustes (como preguntar solamente por las materias que hay en común en los tres grados o considerar las opiniones de los alumnos de cada grado por separado).

II. Organícense en equipos y cada uno seleccione una de las dos encuestas que aparecen en el apartado *Consideremos lo siguiente*. Pidan a todos sus compañeros que les contesten.

a) Clasifiquen las respuestas que obtuvieron para cada pregunta y registren sus resultados en una tabla; para ello deberán acordar cuáles y cuántas columnas y renglones deberá tener, así como cuáles son los encabezados y títulos adecuados. Utilicen el siguiente espacio para elaborarla.

b) ¿Qué tipo de gráfica es la que mejor describe los datos que registraron en la tabla? ¿Cuáles son los ejes y qué escala utilizarán? ¿Cuál es el título más apropiado? Trácenla en el siguiente espacio.

c) Escriban una conclusión sobre los resultados obtenidos en su encuesta y preséntenla a su grupo. ______________________________

____

____

>>> A lo que llegamos

La realización de un estudio considera diferentes fases.

Fase 1: definición del estudio o experimento. ¿Qué es lo que se quiere investigar y analizar? ¿Qué se espera encontrar?

Fase 2: obtención de datos. ¿Cómo se obtendrán los datos para analizar? ¿A quiénes se les preguntará? ¿Qué tipo de pregunta es más conveniente hacer?

Una manera de obtener datos para realizar un estudio estadístico es por medio de la aplicación de una encuesta.

Fase 3: organización y análisis de los datos. ¿Qué tipo de datos se obtendrán? ¿Cómo es conveniente ordenar y clasificar los datos? ¿Qué tipo de tabla o gráfica es conveniente para mostrar y analizar los datos obtenidos?

Fase 4 : presentación de conclusiones o reportes. ¿Cuáles son los resultados que se obtuvieron al realizar el análisis? Los resultados obtenidos, ¿afirman o contradicen lo que se esperaba encontrar?

Cuando se quiere estudiar una situación o fenómeno en una población muy grande, sólo se encuesta a una parte de ella; a ese subgrupo se le llama muestra. Si así se hiciera habría que buscar que la muestra conserve las mismas características de la población.

UN JUEGO DE LETRAS. OTRO ESTUDIO ESTADÍSTICO

SESIÓN 2

>>> Consideremos lo siguiente

En las diferentes lenguas que se hablan en el mundo prevalece más el uso de unas letras que otras.

¿Saben qué letras se utilizan con mayor frecuencia en el idioma español? ¿Creen que son las mismas que las que se utilizan más en inglés? Y en una lengua indígena, por ejemplo, el zapoteco, ¿qué letras serán las que con mayor frecuencia se utilizan?

>>> Manos a la obra

I. Reunidos en equipos, lean los siguientes tres textos y después cada equipo seleccione uno de ellos para realizar lo que se pide en los incisos.

79

Sugerencias didácticas.

- Pida a los alumnos que presenten sus resultados en cartulinas para que todos conozcan el trabajo de los demás.
- Pida a cada equipo elegir a un representante para que comente brevemente cómo organizaron la información y cómo elaboraron la gráfica.
- Pregúnteles si utilizarían el mismo tipo de gráfica para mostrar los datos de 100 o de 1 000 personas encuestadas y qué ajustes tendrían que realizar.
- Dígales que expliquen lo siguiente: ¿podría suceder que una determinada materia al mismo tiempo sea la que más les gusta y la que menos les gusta a los alumnos?, ¿cómo se vería esto en la gráfica?, ¿será posible que un alumno obtenga 10 de calificación en la materia que se le hace más difícil o, al revés, que tenga 5 de calificación en la materia que se le hace más fácil?

Sugerencia didáctica. Lean juntos esta información y encargue a una pareja de alumnos que la copie en una hoja o cartulina para pegarla en el salón.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos cómo pueden estudiar o investigar esta situación y anote las propuestas en el pizarrón. Luego concédales un tiempo para que piensen qué ventajas y desventajas puede haber en cada propuesta, es decir, se trata de considerar las primeras tres fases de un estudio estadístico (definir qué se quiere investigar, cómo se obtendrán los datos y de qué manera es mejor presentarlos).

Propósito de la actividad. La intención es que los alumnos tomen tres textos en distintos idiomas para estudiar la frecuencia con la que aparecen las letras del alfabeto. Cada texto puede ser considerado una muestra de ese idioma, y dado que los datos que se obtendrán son letras, ésos son cualitativos.

Sugerencia didáctica. Para contar rápidamente cuántas veces aparece una letra en un texto, diga a los equipos que se repartan los renglones entre todos los integrantes.

Propósito de la sesión. Realizar un estudio en el que se aborde la idea (intuitiva) de muestras. (Es idea intuitiva en cuanto no se define una técnica o procedimiento para obtener la muestra.)

Texto I

Cuento del tonto que comió pollo

Había una vez tres hermanos, el mayor y el segundo estaban bien y el tercero era un tonto, tenían un pollo pero siempre que hablaban de matar el pollo decían que no le iban a dar ningún pedazo al tonto por tonto, llegó el día que mataron al pollo y los hermanos que estaban bien ya tenían un plan para no darle nada al tonto, lo prepararon y lo dejaron listo para meterlo al horno y llamaron al tonto y ya reunidos los tres le dijeron al tonto, el que sueñe un bonito sueño se come el pollo, bueno dijo el tonto; metieron el pollo dentro del horno y se fueron a dormir, pasó un buen rato y cuando los dos hermanos ya estaban bien dormidos, el tonto se levantó y fue a la cocina y se comió el pollo, terminó y se fue a dormir. Al otro día temprano se levantaron y el mayor dijo: vamos a hablar del sueño que tuvimos anoche, yo voy a empezar, dijo, pues yo anoche fui a la Gloria y vi al Señor, sí dijo el otro hermano, yo vi cuando te ibas volando, me agarré de la manga de tu camisa y nos fuimos los dos, sí contestó el tonto, yo vi cuando se iban y como pensé que ya no iban a regresar fui a la cocina y me comí el pollo, sólo quedaron dos huesitos para que chupen.

Cuento escrito por: Joaquín Martínez Mendoza, 11 años, Juchitán de Zaragoza, Oaxaca. Tomado del libro *Las narraciones de niñas y niños indígenas.* Vol. II. México: SEP, Libros del Rincón, 2001.

Texto II

"Didxa guca zti guida gudo beere"

Chona bichi ca´be chupa la´ nu xpíaní ne tabí guidxa la´ napa ca´be ti beeré ná cabe xhimodo goo ca´be lameé ne ná cabe la´quizudidí cati nda guidxa biú ti dxí bíti cá lame má chindú cá lame xuqui rabí cá be guidxa tula´guindií xcanda ti bacaanda o má xicarú ngue goo lá mé Gulu ca´be beeré que xuqui ne guta guxii cá be ná ca´be chíchite ca´be guidxa gudídi ti xíigabá má nixiaxi cá be biazaá guidxa gudo beeré que ne guta guxií bira guela´zti dzí viaza ca´be ne guíidxicá be guidxa na luugolá que ná lá gunie xcandá guyaa ranú díuxhi bícábí ztobí que ná la ca´biá lí má zeú que gunda lú manga ztí gamixha lú na guídzxa ná lá cá biá la tú ma xeetu que lá sacaza ma quí zabíí gueta tu yende cá xha beére ne guda huá ca lña biana chupánda dixta guini pá gotó.

Cuento escrito por: Joaquín Martínez Mendoza, 11 años, Juchitán de Zaragoza, Oaxaca. Tomado del libro *Las narraciones de niñas y niños indígenas.* Vol. II. México: SEP, Libros del Rincón, 2001.

Texto III

The Canterville Ghost

Mr Hiram B. Otis was a rich American from New York. He had come to live and work in England, but he did not want to live in London. He did not want live in the city. He wanted to live in the countryside outside London. Canterville Chase was a large and very old house near London. Lord Canterville, the owner, wanted to sell it. So Mr Hiram B. Otis visited Lord Canterville.

'I do not live in Canterville Chase,' Lord Canterville said to Mr Otis. 'I do not want to live there. The house has a ghost-The Canterville Ghost.'

'I come from Ameica,' said Mr Otis. 'America is a modern country. I don't believe in ghosts. Have you seen this Canterville Ghost?'

'No,' said Lord Canterville, 'but I have heard it at night.'

'I don't believe in ghosts,' Mr Otis said again. 'No one has found a ghost. No one has put a ghost in a museum. And you haven´t seen this ghost either.'

'But several members of my family have seen it,' said Lord Canterville. 'My aunt saw the ghost. She was so frightened that she was ill for the rest of her life. Also, the servants have seen it so they will not stay in the house at night. Only the housekeeper, Mrs Umney, lives in Caterville Chase. Mrs Umney lives there alone.'

'I want to buy the house,' said Mr Otis. 'I'll buy the ghost as well. Will you sell Canterville Chase? Will you sell the ghost?'

'Yes, I will,' said Lord Canterville. 'But, please remember, I told you about the ghost before you bought the house.'

Tomado de Wilde, Oscar, *The Canterville Ghost and Other Stories*/Oscar Wilde; Stephen Colbourn; ilus. Annabel Large. México: SEP/Macmillan, 2002.

a) Después de haber leído los tres textos, ¿qué letras suponen que se utilizan más en cada una de estas lenguas? ____________________

b) De acuerdo al texto que eligieron, en la siguiente tabla, anoten el número de veces que aparece cada letra.

A-a	B-b	C-c	Ch-ch	D-d	E-e	F-f	G-g	H-h	I-i
J-j	**K-k**	**L-l**	**Ll-ll**	**M-m**	**N-n**	**Ñ-ñ**	**O-o**	**P-p**	**Q-q**
R-r	**Rr-rr**	**S-s**	**T-t**	**U-u**	**V-v**	**W-w**	**X-x**	**Y-y**	**Z-z**

c) En el texto que eligieron, ¿cuál es la letra que más veces aparece? __________

d) ¿Esa letra es vocal o consonante? __________

e) ¿Cuáles fueron las 10 letras más utilizadas en el texto que eligieron? __________

f) ¿En qué porcentaje (respecto del total de letras del texto) se utiliza cada una de estas 10 letras? ____________________

g) En el siguiente espacio, tracen una gráfica en la que se muestren las 10 letras con mayor frecuencia. ¿Qué tipo de gráfica es más apropiada para mostrar estos datos?

____

Sugerencia didáctica. Este punto es muy importante para que los alumnos expongan sus ideas, así que dediquen un tiempo para comentarlas. Algunos alumnos pueden pensar que con tener un texto de cada idioma es suficiente, pero quizá otros se cuestionen si es válido hacer afirmaciones a partir de un solo texto.

Sería interesante que usted exponga una situación similar en la que se estudie algo a partir de muestras. Por ejemplo: se quiere saber cuál es el color de ojos más frecuente de personas de distintos países. Si se toma una muestra de personas francesas, otra de mexicanas y una última de africanas, se podría esperar que en el primer grupo se encontrasen más personas con ojos de color azul. Sin embargo, si la muestra de franceses se toma en una zona en donde vivan más personas negras, los resultados serán distintos. Por ello es importante que, si se utilizan muestras para estudiar a una población más numerosa, se elijan con cuidado.

Comente con sus alumnos que las empresas que se dedican a sondeos o conteos rápidos, por ejemplo, en las votaciones, utilizan determinadas técnicas de muestreo.

Propósito de la actividad. La idea es que los alumnos estudien si se mantienen los resultados que obtuvieron en la primera actividad del apartado *Manos a la obra*, pero ahora considerando textos escritos en la misma lengua para públicos diferentes.

Siguiendo con el caso del color de ojos de las personas de distintos países, tener textos de distintos tipos es equivalente a tener varias muestras de personas francesas, mexicanas y africanas.

II. Muestren y comparen las gráficas que construyeron en los equipo y contesten las siguientes preguntas:

a) Del texto en español, ¿cuál es la letra que más se utiliza y en qué porcentaje? ____________________

b) Del texto en inglés, ¿cuál es la letra que más se utiliza y en qué porcentaje? ____________________

c) Del texto en zapoteco, ¿cuál es la letra que más se utiliza y en qué porcentaje? ____________________

d) Si comparamos los resultados, ¿en qué texto se utilizan más las vocales? __________ y ¿cuál es la vocal que más se utiliza? ______________

e) ¿Cuál es la consonante que más se utiliza en los tres textos? ______________

f) ¿Se confirmó la suposición que hicieron en cuanto a las letras que se utilizan más en cada lengua? ____________

g) ¿Creen que la información obtenida de los tres textos es suficiente para afirmar que si se toma un fragmento de cualquier otro texto escrito en español, inglés o zapoteco, la letra que más veces aparece es la misma? ________ ¿Por qué? ____

III. Ahora prueben la afirmación que hicieron para el caso de español. Cada equipo deberá seleccionar un fragmento de máximo 10 renglones de alguno de los siguientes textos que se indican.

- Texto científico, por ejemplo, de su libro de **Ciencias**.
- Novela, por ejemplo, de algún título de la Biblioteca del Aula.
- Poesía, por ejemplo, de su libro de **Español**.
- Texto técnico, por ejemplo, de algún manual o instructivo.

a) En la siguiente tabla, anoten el número de veces que aparece cada letra de acuerdo al texto que eligieron.

A-a	B-b	C-c	Ch-ch	D-d	E-e	F-f	G-g	H-h	I-i
J-j	**K-k**	**L-l**	**Ll-ll**	**M-m**	**N-n**	**Ñ-ñ**	**O-o**	**P-p**	**Q-q**
R-r	**Rr-rr**	**S-s**	**T-t**	**U-u**	**V-v**	**W-w**	**X-x**	**Y-y**	**Z-z**

b) ¿Las letras más utilizadas en el texto que eligieron son las mismas que las más utilizadas en el primer texto en español (texto I: Cuento del tonto que comió pollo)? ____________

c) Si su respuesta es no, anoten las 10 letras que más se utilizan en este último texto.

____

d) Tracen una gráfica en la que sea posible comparar las frecuencias de las 5 letras más utilizadas en cada texto.

e) ¿La letra que tiene la mayor frecuencia en uno y otro texto es la misma?

____

f) Comparen sus gráficas con las gráficas de los otros equipos y describan qué sucede, si las 5 letras con mayor frecuencia son las mismas o no.

g) De acuerdo con los resultados obtenidos en todas las gráficas, ¿cuál es la letra que más se utiliza? ____________________________

h) Con base en los resultados que obtuvieron, ¿consideran que podría afirmarse que esa letra es la que más se utiliza en español? ¿Por qué? ____________

____

____

Propósito de la sesión. Plantear una hipótesis o determinar los posibles resultados de un experimento (que puede o no ser de azar).

Posteriormente, realizar el experimento y organizar los resultados para compararlos con las hipótesis.

Estudiar datos cuantitativos.

Propósito del programa. Mostrar algunos ejemplos de estudios estadísticos, distintos a los presentados a lo largo de la secuencia, en donde se desarrolle todo el proceso, desde la búsqueda de la información hasta su presentación.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la actividad. Que los estudiantes decidan cómo llevar a cabo un estudio.

Sugerencia didáctica. Antes de iniciar el estudio pida a los alumnos que contesten estas preguntas según sus creencias u opiniones. Servirán al final, una vez concluido el estudio, para ver si sus hipótesis se corroboraron o no.

Recuperen la información del apartado *A lo que llegamos* de la sesión 1 para tener presentes las fases de un estudio y lo que debe definirse en cada una. Lo ideal sería que este estudio se trabajara como un proyecto al que se le dediquen varias clases.

SESIÓN 3

¿QUÉ CANTIDAD DE AGUA CONSUMEN DIARIAMENTE LOS ALUMNOS DE TERCER GRADO?

>>> Para empezar

El agua que proviene de los alimentos que comemos y de los líquidos que bebemos constituye casi la totalidad del agua diaria que utiliza nuestro organismo. En general, se recomienda consumir 2 ℓ de agua diariamente.

Internacional Life Sciences Institute (ILSI) es una organización científica no lucrativa que promueve el entendimiento y solución de problemas de interés común en las áreas de nutrición, toxicología, alimentos y seguridad ambiental. En 2004, el ILSI de México, A.C. publicó el documento titulado "Hidratación: líquidos para la vida", en el que se presentan recomendaciones actuales para el consumo de agua, con especificaciones de acuerdo con la edad y el sexo.

>>> Consideremos lo siguiente

¿Conoces qué cantidad de agua consumes diariamente? ¿Es la cantidad recomendada? ¿Y tus compañeros saben si están consumiendo una cantidad de agua adecuada? ¿Quiénes consumen más agua, los varones o las mujeres del grupo? ¿Cómo podrías recopilar información para conocer qué cantidad de agua estás consumiendo?

>>> Manos a la obra

I. Discutan las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo podrían averiguar la cantidad de agua que consumen sus compañeros de clase? Es decir, ¿será suficiente con preguntar cuántos vasos con agua toman al día?

¿Por qué? ______________________________

b) ¿Qué unidad de capacidad será conveniente utilizar para registrar los datos que obtengan de las respuestas de los compañeros? ______________

c) Si alguien consume un refresco de 375 ml, ¿está consumiendo agua? ________

d) ¿Comes consomé o sopa aguada diariamente? ________

e) ¿Cómo medirán la cantidad de agua que se consume en una sopa aguada o consomé? ______________________________

En el documento "Hidratación: líquidos para la vida" se incluye el contenido de agua de algunos alimentos y bebidas que se consideran son de consumo habitual. Esta información se encuentra en el anexo 2 **Ingestión de agua a partir de alimentos y bebidas consumidos frecuentemente**, consúltenla y acuerden una manera en que podrían utilizarla para determinar, aproximadamente, la cantidad de agua que consumen diariamente.

Sugerencia didáctica. Decidir cómo se obtendrán los datos no es tarea trivial al momento de realizar un estudio, por lo que nuevamente se insiste en que los alumnos planteen las posibles preguntas y en que piensen en el tipo de respuestas que pueden obtener.

Por ejemplo, es importante que decidan en qué unidad van a medir la cantidad de agua ingerida: número de vasos y si son grandes o chicos, o bien, mililitros o litros. También deben establecer un acuerdo sobre si van a considerar agua solamente o cualquier líquido ingerido (como el que podrían tomar en refrescos o en la sopa).

Anótenlo en las siguientes líneas. ______________________________

____

____

f) Una vez que decidan la forma en que recopilarán los datos, será conveniente organizarlos y clasificarlos, ¿qué tipo de tabla es más conveniente utilizar para mostrar los resultados de cada pregunta que realicen? ______________ Y, ¿qué tipo de gráfica es más conveniente utilizar? ______________

g) ¿Cuál es el consumo promedio (media) diario de agua a través de los alimentos entre tus compañeros? ______________________________

h) ¿Cuál es el consumo diario de agua más frecuente (moda) entre tus compañeros?

____

i) Una vez que han obtenido los valores del consumo promedio y del consumo diario más frecuente de agua de los alumnos de su grupo, ¿se confirma la suposición que hicieron en cuanto si la cantidad promedio de agua que consumen es la adecuada? ______________

j) Escriban en sus cuadernos sus conclusiones sobre los resultados que obtuvieron en este estudio sobre el consumo diario de agua entre tus compañeros. Deberán incluir las tablas o gráficas que elaboraron para mostrar sus resultados.

II. En el documento "Hidratación: líquidos para la vida", también, se incluye la siguiente tabla que muestra las recomendaciones para consumo de agua diario de varones y mujeres de 4 a 18 años.

Consumo de agua total diario(ml/día)

Sexo/edad	**Media**
Ambos de 4 a 8 años	1 779
Varones de 9 a 13 años	2 535
Mujeres de 9 a 13 años	2 240
Varones de 14 a 18 años	3 400
Mujeres de 14 a 18 años	2 498

Fuente: FNB 2004

a) Reorganicen los resultados que obtuvieron clasificando por separado las respuestas que dieron los varones y las mujeres, ¿cuál es el consumo promedio (media) diario de agua entre los varones del grupo? ______________

¿Y cuál es el consumo promedio (media) diarios de agua entre las mujeres del grupo? ______________________________

Posibles respuestas. Dependiendo de los resultados que obtengan, se esperaría que los alumnos fueran capaces de escribir pequeños textos como: "Sobre la cantidad de agua que toman los alumnos del grupo, la media de los varones es mayor que la de las mujeres, sin embargo, está por debajo de las recomendaciones del ILSI. La moda en las mujeres es de 1 800 ml, mientras que la de los hombres es 2 000 ml".

Sugerencia didáctica. Una vez que elijan uno de los asuntos de la lista u otro que les interese, es importante que contesten con cuidado las preguntas, ya que éstas les permitirán definir con mayor precisión el estudio.

También será útil que repasen las fases de un estudio que aparecen en el apartado *A lo que llegamos* de la sesión 1.

Integrar al portafolios. Pida a cada pareja de alumnos una copia del estudio que lleven a cabo. Para la evaluación, considere también la exposición que hagan ante todo el grupo.

b) Comparen los resultados obtenidos en el inciso anterior con los que se muestran en la tabla. En el caso de los varones, ¿cuál consumo es mayor, el que muestra la tabla para varones de 14 a 18 años o el de los compañeros de grupo? __________

c) Y al comparar la media de los varones de 9 a 13 años con la media de tus compañeros, ¿cuál es mayor? __________

d) En el caso de las mujeres, ¿qué ocurre? Anoten los comentarios en sus cuadernos.

e) ¿Con los resultados que obtuvieron, se confirmó lo respondido a las preguntas del apartado *Consideremos lo siguiente*? __________

____

>>> Lo que aprendimos

I. Seleccionen una de las siguientes preguntas para investigar, o bien realicen el estudio sobre algún otro asunto que el grupo considere más interesante.

- [ ] ¿Cuál es el grado de ansiedad de las personas?
- [ ] ¿Cuál es la estatura de los estudiantes de tu escuela?
- [ ] ¿Cuáles son las aptitudes de los adolescentes?
- [ ] ¿Cuáles son los alimentos que consumen los adolescentes en la comida?

Otra problemática: __________

____

____

a) Determinen qué grupo o población deberá ser considerado para realizar el estudio.

____

b) Elaboren la encuesta que utilizarán para recopilar los datos en su cuaderno. Recuerden que es importante reflexionar sobre el tipo de preguntas que se plantearán y las posibles respuestas que se obtendrán.

c) Apliquen la encuesta y clasifiquen las respuestas obtenidas. ¿Qué tipo de representación gráfica o tabular utilizarán? ¿Por qué?

d) Escriban las conclusiones que obtengan y preséntenlas a todos sus compañeros.

II. Seleccionen uno de los siguientes experimentos y realícenlo con los compañeros. Averiguar:

- [ ] El tiempo de duración de una vela de cera líquida y el de una vela normal.
- [ ] El número de cerillos de madera defectuosos en una caja que contiene 100 cerillos.

a) ¿Cuántos ensayos o extracciones realizarán? ______________________

b) ¿Qué tipo de tabla utilizarán para registrar los datos o resultados que obtengan?

____

c) ¿Qué tipo de representación gráfica utilizarán? ____________ ¿Por qué?

____

d) ¿Qué tipo de medida de tendencia central se podría utilizar para resumir los resultados del experimento? ______________________

e) Escriban en su cuaderno las conclusiones que obtengan y preséntenlas a todos sus compañeros.

>>> Para saber más

Sobre cómo elaborar una encuesta, consulten:
http://www.encuestafacil.com
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Elijan el icono Diseña y paso a paso podrán elaborar una encuesta.

Sobre algunos estudios estadísticos, consulten:
http://matematicas.mty.itesm.mx/uneest/home.htm
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Ruta: Servicios → Ratings de Radio en Monterrey (Presentación en Power Point), Contenido del Reporte
Tecnológico de Monterrey.

87

Sugerencia didáctica. Discutan grupalmente las respuestas a las que llegaron. Hablar sobre las opiniones de cada quien será muy enriquecedor para todos, por ejemplo, en lo concerniente a cuántos ensayos o extracciones se necesitan para poder hacer afirmaciones válidas.

Sugerencia didáctica. Puede ser necesario recordar en grupo cuáles son las medidas de tendencia central: media, moda y mediana. También pueden repasar la secuencia 17 del libro **Matemáticas II**.

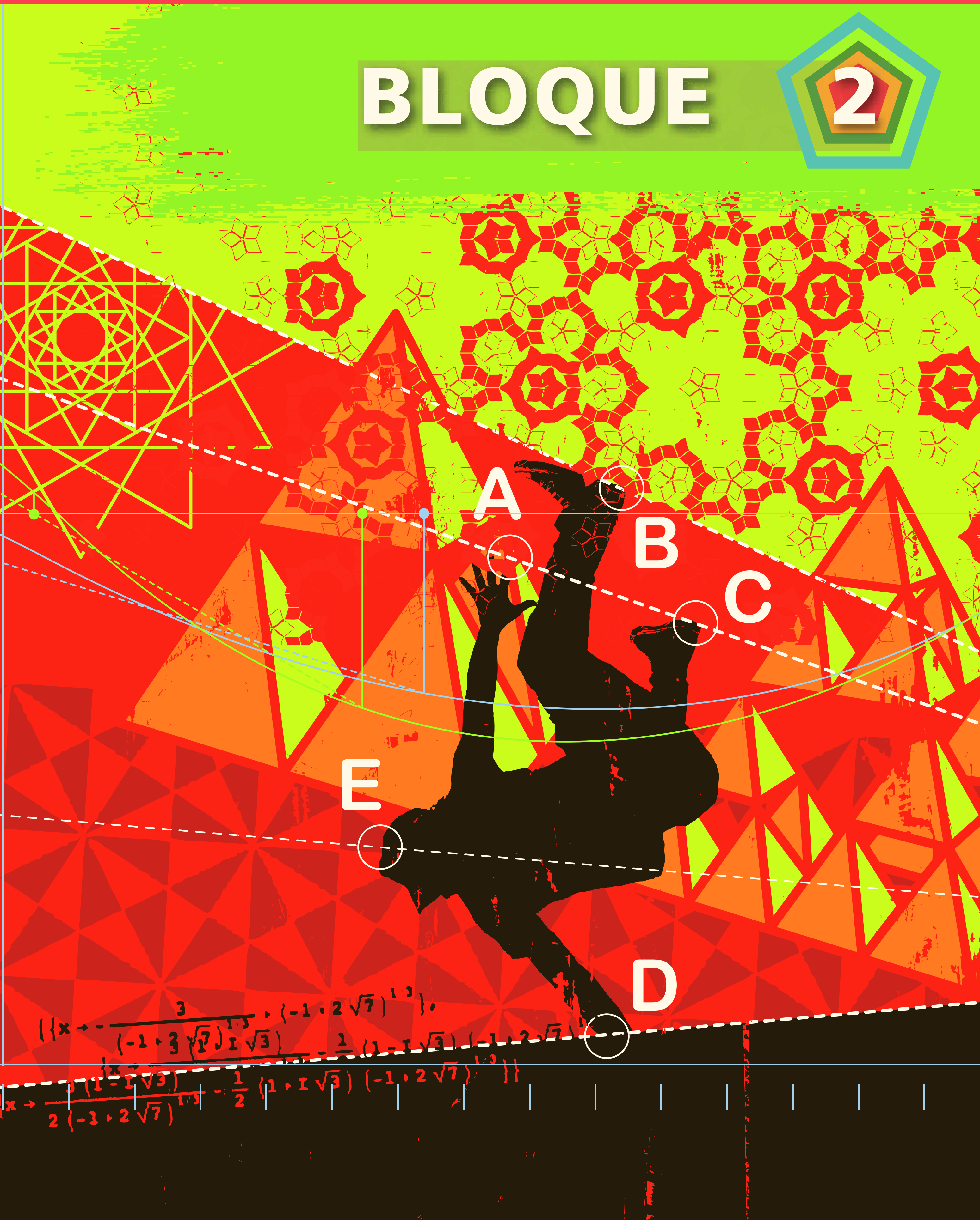
Sugerencia didáctica. En la primera página de internet que se recomienda, los alumnos podrán conocer cómo se elaboran algunas encuestas y analizar algunos de los aspectos que en dicha página se consideran.

En los siguientes sitios hay ejemplos de encuestas que se han elaborado y puede ser útil visitarlos para que los alumnos conozcan la variedad de temas que se pueden abordar.

Para acceder a la herramienta que permite elaborar encuestas es necesario estar registrado. Se sugiere que dedique tiempo para registrarse antes de que sus alumnos accedan a la página. El registro requiere llenar cuatro campos, no es necesario completar la información opcional del registro.


A’
B’
C’
E’
D’

BLOQUE 2



Propósito de la sesión. Descubrir que una ecuación de segundo grado puede tener hasta dos soluciones.

Propósito del programa. Analizar mediante ejemplos que las ecuaciones de segundo pueden tener hasta dos soluciones.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Hallar las soluciones de ecuaciones de segundo grado.

Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 1.

Respuestas. Hay dos números que cumplen la condición, $x = 5$ y también $x = -5$.

Propósito de la actividad. Los alumnos ya se han enfrentado antes con este tipo de acertijos, pero ahora se incluyen números elevados al cuadrado. Esto representa una dificultad mayor no tanto al escribir la expresión algebraica, sino al resolverla, porque habrán de obtener raíces.

Una parte importante en esta sesión es que los alumnos logren darse cuenta de que el resultado de elevar cualquier número al cuadrado es positivo (porque positivo × positivo = positivo, y negativo × negativo = positivo), pero no les anticipe esta información, primero permita que trabajen las actividades.

SECUENCIA 8

Ecuaciones no lineales

En esta secuencia resolverás problemas mediante el planteamiento y solución de ecuaciones de segundo o tercer grado.

SESIÓN 1

EL NÚMERO SECRETO

>>> Para empezar

En **Matemáticas I** y **II** aprendiste a resolver problemas y ecuaciones lineales con una incógnita y con dos. Algunas de esas ecuaciones tienen sólo una solución, por ejemplo: $2x + 3 = 8$. Otras tienen una infinidad de soluciones, tal como: $x + y = 10$.

En esta secuencia estudiarás algunos problemas que pueden resolverse con ecuaciones que tienen dos soluciones, una solución o ninguna solución.

>>> Consideremos lo siguiente

Resuelve el acertijo:

Pensé un número y lo elevé al cuadrado. Al resultado lo multipliqué por 4 y al final obtuve 100. Si no pensé en el 5, ¿de qué número se trata? ________

>>> Manos a la obra

I. Comparen sus soluciones y verifíquenlas usando el siguiente diagrama:

$$\boxed{-5} \xrightarrow{\text{Se eleva al cuadrado}} (25) \xrightarrow{\text{Se multiplica por 4}} \boxed{100}$$

Entrada — Salida

a) ¿Qué número podría ir en el círculo azul?________ ¿Hay otro?________

b) En el cuadrado rojo pueden ir dos números, encuéntrenlos. ________

Comenten:

c) ¿Existe algún número negativo que elevado al cuadrado dé 25? Sí
¿Cuál? –5

d) ¿Por qué al elevar al cuadrado cualquier número (positivo o negativo) el resultado es siempre un número positivo? ________

90

Respuestas.

a) El 25, no puede haber otro porque el resultado de elevar un número al cuadrado es siempre positivo.

b) El 5 y el –5.

c) Sí, el –5.

d) Permita que los alumnos contesten esta pregunta de manera libre. Se espera que escriban cosas como: "porque menos × menos es más" y también "más × más es más".

Sugerencia didáctica. Antes de contestar estas preguntas puede plantear a los alumnos un reto: encontrar un número que al elevarlo al cuadrado, el resultado sea negativo. Dé un tiempo para que exploren posibles resultados, y una vez transcurrido éste, o bien, cuando ellos mismos manifiesten que no existe un número con tales características, pídales que contesten las preguntas.

También puede aprovechar estas preguntas para trabajar potencias con números negativos. Plantéeles algunos ejercicios, por ejemplo:

(-3) (-3) =

(-3) (-3) (-3) =

(-3) (-3) (-3) (-3) =

Cuando terminen, hágales preguntas como:

¿Qué signo tendrá el resultado de elevar a la quinta potencia el –3?

Si el exponente es par, ¿cómo será la potencia de –3?

Si el exponente es impar, ¿cómo será la potencia de 3?

Eje

Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tema

Significado y uso de las literales.

Subrema

Ecuaciones.

Antecedentes

Los alumnos ya conocen varios procedimientos de resolución de ecuaciones lineales. Ahora se enfrentarán a la resolución de otro tipo de ecuaciones: las cuadráticas y las cúbicas. Se espera que en esta secuencia logren representar algunas situaciones mediante dichas ecuaciones y que utilicen procedimientos propios para su resolución.

II. El producto de dos números enteros consecutivos es 552. ¿Cuáles son esos números?

_______ y _______

Comparen sus soluciones y verifíquenlas. Comenten:

a) Para resolver este tipo de problemas es necesario, frecuentemente, encontrar la ecuación primero la ecuación correspondiente. Si se representa con la letra x el número menor de los dos, ¿cuál de las siguientes ecuaciones corresponde al problema anterior?

- $(x)(x) = 552$
- $(x)(552) = y$
- $x(x + 1) = 552$
- $(x)(x) + 1 = 552$
- $x^2 + 1 = 552$

b) Hay una pareja de números enteros negativos consecutivos cuyo producto es igual a 552. Completen la siguiente tabla para encontrarla.

x	$x + 1$	$x(x + 1)$
–23	–22	(–23) (–22) = 506
–25	–24	(–25) (–24) = 600

Recuerden que:
(–23) + 1 = –22
(–25) + 1 = –24

c) ¿Cuáles son los números enteros negativos consecutivos que multiplicados dan 552?
–24 y –23

>>> A lo que llegamos

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación en la cual hay un término que tiene la incógnita elevada al cuadrado. Por ejemplo, las siguientes son ecuaciones cuadráticas:

$2x^2 = 18$ — Término cuadrático
$x^2 + 3x - 2 = 0$ — Término cuadrático
$x(x + 3) = -9$ — Producto que da un término cuadrático

Las ecuaciones cuadráticas pueden tener **dos soluciones**. Por ejemplo: $2x^2 = 18$, tiene dos soluciones: +3 y –3, porque al sustituir estos valores en la ecuación y efectuar las operaciones se obtiene 18.

Ecuación: $2x^2 = 18$
Para $x = +3$: $2(+3)^2 = 2(+9) = 18$
Para $x = -3$: $2(-3)^2 = 2(+9) = 18$

91

Propósitos de la secuencia
Utilizar ecuaciones no lineales para modelar situaciones y resolverlas utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**El número secreto** Descubrir que una ecuación de segundo grado puede tener hasta dos soluciones.	Programa 13 Aula de medios Ecuaciones con más de una solución I (Calculadora)
2	**Cubos, cuadrados y aristas** Conocer y analizar diversos procedimientos para resolver ecuaciones no lineales.	
3	**Menú de problemas** Resolver e inventar problemas que puedan modelarse con ecuaciones de segundo y tercer grado.	Programa 14 Interactivo

Respuestas. Hay dos posibles respuestas: la pareja 23 y 24, y la pareja –23 y –24. Para encontrar esos números, los alumnos pueden seguir varios procedimientos, como el ensayo y error. Una manera más rápida es obtener la raíz cuadrada de 552; como el número que se obtiene está entre 23 y 24, ésos son los dos números consecutivos que se buscan.

Propósito de la actividad. El propósito es que los alumnos se vayan familiarizando con la traducción de problemas a expresiones algebraicas, en este caso, de ecuaciones de segundo grado.

Posibles dificultades. Algunos alumnos podrían cometer errores como los siguientes:

- Multiplicar un número por sí mismo (olvidando que deben ser números consecutivos), que es el caso que se presenta en la primera ecuación.
- Primero elevar al cuadrado un número y luego sumarle 1 (porque son consecutivos), que es el caso que se presenta en la última ecuación.

Si sus alumnos cometen alguno de estos errores u otros, revisen juntos el enunciado haciendo énfasis en que son dos números consecutivos cuyo producto es 552. Si se representa con x al número menor, el mayor tiene que ser $x + 1$, entonces la expresión correcta es $x(x + 1) = 552$.

Propósito de la actividad. Es posible que los alumnos en el primer paso descubran que la pareja de números negativos que se busca tiene que ser –24 y –23 porque 552 se encuentra entre 506 y 600. Sin embargo, en la tabla hay más renglones por si algunos alumnos no lo logran en el primer paso.

Posibles dificultades. Aunque los alumnos ya han sumado y restado números enteros desde el primer grado de secundaria, es probable que algunos tengan dificultades al tratar de sumarle 1 a la expresión $x + 1$ cuando x es un número negativo. Recuérdeles que si $x = -23$, entonces $x + 1 = -22$ (y no –24).

Sugerencia didáctica. Es posible que algunos alumnos intenten resolver el problema utilizando la ecuación que seleccionaron en el inciso a); sin embargo, puede resultarles difícil porque todavía no han aprendido a hacerlo. Si logran plantear $x^2 + x = 552$, sugiérales que la resuelvan por ensayo y error probando con varias parejas de números. Podrán justificar su respuesta llenando la tabla del inciso b). Esta ecuación puede resolverse igualando a cero y factorizando, como se muestra enseguida. Los alumnos estudiarán ese método en la secuencia 9, por lo que ahora no es conveniente que se explique.

$x(x + 1) = 552$
$x^2 + x = 552$
$x^2 + x - 552 = 0$
$(x + 24)(x - 23) = 0$
$x_1 = -24$
$x_2 = 23$

La ecuación tiene dos soluciones: x puede valer –24 (su consecutivo sería –23), y también puede valer 23 (su consecutivo sería 24). Ambas soluciones son pertinentes para resolver el problema.

Posibles dificultades. Al igual que en la actividad II, la intención es que los alumnos traduzcan un enunciado a una expresión algebraica. Esto todavía puede ser difícil para algunos, especialmente ahora que se incluyen números elevados al cuadrado.

Puede servirles que lean por partes el enunciado:

- A tres veces: *hay un factor que es* 3.
- El cuadrado de un número: *el otro factor es* x^2.
- Se le sumó 8: *al resultado de la multiplicación anterior se le suma* 8.
- Al final se obtuvo 83: *el resultado de la multiplicación más la suma es* 83.

La expresión es $(3)\ (x^2) + 8 = 83$, que suele escribirse sin los paréntesis: $3x^2 + 8 = 83$.

Respuestas.

a) 5 y –5. Una manera de resolver es:

$3x^2 + 8 = 83$
$3x^2 = 75$
$x^2 = 25$
$x = 5$ y también $x = -5$

b) Para $x = 5$

$3\ (5)^2 + 8 = 83$
$3\ (25) + 8 = 83$
$75 + 8 = 83$
$83 = 83$

Para $x = -5$

$3\ (-5)^2 + 8 = 83$
$3\ (25) + 8 = 83$
$75 + 8 = 83$
$83 = 83$

SECUENCIA 8

III. Se tiene el siguiente acertijo: a tres veces el cuadrado de un número se le sumó 8. Como resultado se obtuvo 83.

Si el número se representa con la letra x, ¿cuál de las siguientes es la ecuación que corresponde al acertijo? Subráyala.

- $(3 + x)^2 + 8 = 83$
- $3x^2 + 8 = 83$
- $(3)\ (x^2)\ (8) = 83$

La ecuación que corresponde al acertijo tiene dos posibles soluciones.

a) Encuentra las dos soluciones de la ecuación que subrayaste: ______ y ______

b) Verifica las soluciones realizando con cada una de ellas las operaciones que se indican en el acertijo.

>>> Lo que aprendimos

Resuelve los siguientes problemas. Verifica las soluciones que obtengas.

1. El cuadrado de un número más 3 es igual a 84.

   El número puede ser ________ o ________

2. Pedro pensó un número, lo elevó al cuadrado, al resultado le sumó 5 y obtuvo 1.

   a) ¿Por qué crees que Pedro se equivocó al hacer alguna de las dos operaciones? ________

   b) Si Pedro pensó en el –2, ¿cuánto debió obtener de resultado? ________

   c) Si Pedro pensó en el +2, ¿cuánto debió obtener de resultado? ________

   d) ¿Hay algún número que elevado al cuadrado sea igual a –4? ________ ¿Cuál? ________

3. El largo de un terreno rectangular mide el doble del ancho. El terreno tiene 162 m² de área.

   a) Encuentra una ecuación que exprese el problema anterior. Usa la letra x para representar al ancho. ____________

   b) ¿Cuánto mide de ancho? ________

   c) ¿Cuánto mide de largo? ________

92

Respuestas.

1. Puede ser 9 o también –9.

2.

a) Porque si a un número se le sumas 5 y se obtiene 1, ese número tiene que ser –4, y no puede haber un número que elevado al cuadrado sea igual a –4. Otra razón que podrían utilizar los alumnos es “un número elevado al cuadrado da cero o más que cero, si luego le sumas 5 el resultado final debe mayor o igual que 5.”

b) 9

c) 9

d) No hay ninguno.

3.

a) Si x es el ancho, entonces el largo mide $2x$ y el área se obtiene mediante la multiplicación $(2x)\ (x) = 162$.

b) Una manera de resolver es la siguiente:

$(2x)\ (x) = 2x^2 = 162$

$x^2 = 81$

$x = 9$

El ancho mide 9 m.

c) El largo mide 18 m.

Posibles dificultades. Es común que los alumnos consideren que -2^2 es igual a –4. Si algunos de sus estudiantes cometen ese error, conviene repasar las leyes de los signos en la secuencia 1 del libro **Matemáticas II**.

Posibles dificultades. Puede haber varios problemas para contestar la pregunta del inciso b), por ejemplo, que acostumbrados a que en las ecuaciones cuadráticas existen dos soluciones, los alumnos consideren al –9 como la medida del ancho del rectángulo y al –18 como la del largo. Será pertinente aclarar que en este caso, la solución negativa no tiene sentido ya que no hay ninguna medida menor que cero.

Propósito de la sesión. Conocer y analizar diversos procedimientos para resolver ecuaciones no lineales.

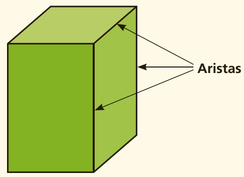
CUBOS, CUADRADOS Y ARISTAS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En un prisma los segmentos donde se unen dos caras se llaman *aristas*.

¿Cuántas aristas tiene el prisma cuadrangular de la derecha? ________



Respuesta. Tiene 12 aristas. Si los alumnos tienen dudas, pídales que tomen una cajita de medicinas o alguna similar para contarlas.

Un cubo es un prisma cuadrangular especial. Tiene 6 caras y todas son cuadrados congruentes.

Además, sabes que el volumen de un cubo cuya arista mide x es:

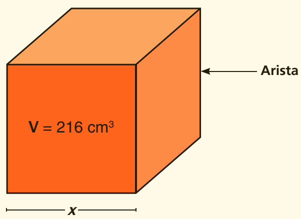
$$V = (x)\,(x)\,(x) = x^3$$

>>> Consideremos lo siguiente

Propósito de la actividad. Ahora los alumnos resolverán problemas en los que trabajen con ecuaciones cúbicas sencillas. Es importante que les permita intentar diversos procedimientos de resolución aunque inicialmente cometan errores.

¿Cuánto mide la arista de un cubo cuyo volumen es 216 cm³? ________

Respuesta. La arista mide 6 cm porque $6^3 = 216$.



Comparen sus soluciones y comenten cómo las obtuvieron.

3

>>> Manos a la obra

I. Revisa los procedimientos que siguieron algunos alumnos para resolver el problema.

PROCEDIMIENTO 1.

Arturo planteó la siguiente ecuación: $x^3 = 216$.

Luego, dividió 216 entre 3 y escribió: $x = \frac{216}{3}$.

Finalmente encontró que la arista mide 72 cm.

93

Sugerencia didáctica. Una vez que los alumnos lean el apartado *Manos a la obra*, dé un tiempo para que comenten cada procedimiento. Puede hacerles las siguientes preguntas:

- ¿Alguno de ustedes siguió uno de los procedimientos que se describen aquí?
- ¿Cuál o cuáles creen que son correctos?, ¿por qué?
- ¿Cuál o cuáles creen que son incorrectos?, ¿por qué?

El **procedimiento 1** es incorrecto. Aunque es cierto que la expresión que modela el problema es $x^3 = 216$, no puede obtenerse el valor de x dividiendo entre 3. Es un error común que los alumnos confundan la obtención de una raíz con una división, por ello es importante aclarar que el procedimiento correcto, en este caso, es buscar un número que elevado al cubo sea igual a 216.

Sugerencia didáctica.

El **procedimiento 2** es correcto aunque Rosa no logró obtener una solución. Si hubiese probado con más números entre 5 y 8 posiblemente habría descubierto que $6^3 = 216$.

El **procedimiento 3** es correcto aunque Lupe tampoco pudo llegar al resultado. Sin embargo, sabe que siguiendo el procedimiento de operaciones inversas la forma de encontrar el valor de x es sacando la raíz cúbica de 216.

Lo que debe destacarse con los alumnos al discutir los **procedimientos 2** y **3** es que aunque ni Rosa ni Lupe llegaron al resultado, la forma de plantear la obtención de la solución es correcta.

Sugerencia didáctica. Esta actividad es importante para que los alumnos logren traducir información verbal en expresiones algebraicas. Analicen juntos cada uno de los enunciados una vez que los hayan contestado y pida a los alumnos que argumenten sus respuestas. Después, a manera de cierre resalte cosas como las siguientes:

- La diferencia entre la expresión a) y el resto es que en ella hay dos números elevados al cubo que son: la incógnita x y el resultado.
- La diferencia entre la expresión d) y el resto es que hay una operación que debe hacerse antes de elevar al cubo.
- La diferencia entre las expresiones b) y c) es que en la primera el 19 se eleva al cubo y se le resta a x; y en la segunda x se eleva al cubo y luego se le restan 19.

También puede pedirles que escriban un enunciado para la expresión del inciso a) que no corresponde a ninguno de los que aparecen en el libro.

PROCEDIMIENTO 2.

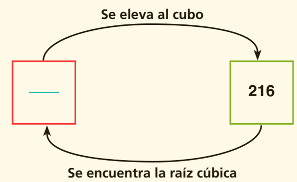
Rosa hizo la siguiente tabla:

Medida de la arista (cm)	Volumen (cm^3)
2	$2^3 = 8$
10	$10^3 = 1000$
5	$5^3 = 125$
8	$8^3 = 512$

Rosa dijo que la arista debía medir entre 5 cm y 8 cm.

PROCEDIMIENTO 3.

Lupe planteó la ecuación: $x^3 = 216$ y usó un diagrama para resolverla:



Lupe dice la solución es la raíz cúbica de 216, pero que no sabe calcularla.

¿Con cuál de los tres procedimientos estás de acuerdo? ___________

Comparen sus respuestas. Comenten:

a) ¿Cuál creen que sea la medida que encontró Rosa al continuar con su procedimiento? ___________

b) ¿Cuánto es la raíz cúbica de 216? ___________

II. Contesta lo que se te pide a continuación.

a) Relaciona las columnas.

(B) Pensé un número y le resté 19 elevado al cubo. El resultado es igual a 8. ¿De qué número se trata?	(A) $x^3 - 19 = 83$
(C) Pensé un número y lo elevé al cubo. Al resultado le resté 19 y al final obtuve 8. ¿De qué número se trata?	(B) $x - 19^3 = 8$
(D) Pensé un número y le resté 19. Al resultado lo elevé al cubo y al final obtuve 8. ¿De qué número se trata?	(C) $x^3 - 19 = 8$
	(D) $(x - 19)^3 = 8$

94

b) Soluciona las ecuaciones que seleccionaste.

c) Verifica tus soluciones sustituyendo los valores en la siguiente tabla. Si lo consideras necesario, usa tu calculadora.

$x^3 - 19 = 83$	$x - 19^3 = 8$	$x^3 - 19 = 8$	$(x - 19)^3 = 8$
$(\_\_\_\_)^3 - 19 = 83$	$(\underline{6\,867}) - 19^3 = 8$ $6\,867 - 6\,859 = 8$ $8 = 8$	$(\underline{3})^3 - 19 = 8$ $27 - 19 = 8$ $8 = 8$	$(\underline{21} - 19)^3 = 8$ $2^3 = 8$ $8 = 8$

Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

III. Plantea una ecuación para resolver el siguiente acertijo. Usa x para representar el número buscado.

Pensé un número. Le sumé 5 y al resultado lo elevé al cubo. Al final obtuve –27. ¿Cuál es el número que pensé?

a) Ecuación: ____________________

b) Soluciona la ecuación que planteaste. Verifica tu solución sustituyendo el valor que encontraste.

Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

>>> A lo que llegamos

Una **ecuación cúbica** es una ecuación en la cual hay un término que tiene la incógnita elevada al cubo. Por ejemplo, las siguientes son ecuaciones cúbicas:

$2x^3 = -128$ — Término cúbico

$x^3 + 6x^2 = 16$ — Término cúbico

$(x + 3)^3 = (x + 3)(x + 3)(x + 3) = -8$ — Producto que da un término cúbico

Para resolver la ecuación $2x^3 = -128$ podemos usar las operaciones inversas:

$$2x^3 = -128$$
$$x^3 = -\frac{128}{2}$$
$$x^3 = -64$$
$$x = \sqrt[3]{-64}$$
$$x = -4$$

95

Respuestas.

a) $(x + 5)^3 = -27$

b) $(x + 5) = \sqrt[3]{-27}$

$x + 5 = -3$

$x = -3 - 5$

$x = -8$

Los alumnos pueden utilizar otros procedimientos, como el uso de tablas o el ensayo y error. Permítales utilizar el que prefieran y, al final, escriba en el pizarrón el que se presenta aquí como solución y explíquelo.

Verificación:

$(-8 + 5)^3 = (-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$

Respuestas.

$x^3 - 19 = 8^3$

$x^3 = 512 + 19$

$x = \sqrt[3]{531}$

Si los alumnos tienen calculadora a la mano pídales que obtengan un número con una o dos cifras decimales que se aproxime más a la raíz cúbica de 531.

$x - 19^3 = 8$

$x - 6\,859 = 8$

$x = 6\,867$

$x^3 - 19 = 8$

$x^3 = 8 + 19$

$x^3 = 27$

$x = 3$

$(x - 19)^3 = 8$

$x - 19 = 2$

$x = 2 + 19$

$x = 21$

Posibles dificultades. Para resolver las tres primeras ecuaciones, los alumnos pueden echar mano de procedimientos que han trabajado anteriormente; sin embargo, no han aprendido a desarrollar expresiones como $(x - 19)^3$, por lo que quizá sientan que no pueden resolver la cuarta ecuación o cometan errores.

Un posible error consiste en que los alumnos eleven al cubo cada uno de los términos de la expresión entre paréntesis, con lo que obtendrían $x^3 - 6\,859 = 8$.

Los alumnos cometen otro tipo de error cuando se concentran en obtener un número que elevado al cubo dé 8 sin considerar toda la ecuación, entonces concluyen que $x = 2$. Es cierto que 23 = 8, pero x en nuestro caso vale 21.

Sugiérales que analicen la ecuación completa: deben hallar un número al que restándole 19 y luego elevándolo al cubo, sea igual a 8. Ese número es el 21 porque $21 - 19 = 2$, y $2^3 = 8$.

Respuestas.

1. Ecuación: $(x - 15)^3 = -8$

   Solución: $x = 13$

2. b) 10 cm^2

   c) $\sqrt{10}$ que es un número que se encuentra entre 3.1 y 3.2

   d) 32.768 cm^3

Sugerencia didáctica. Aproveche el problema 2 para comentar lo siguiente con los estudiantes:

La solución exacta de la ecuación $6x^2 = 60$ es el número $\sqrt{10}$. Al obtener esa raíz, el número resultante 3.1554496… tiene infinidad de cifras decimales, por lo que se hace necesario redondearlo a 3.2 o bien truncarlo tomando sólo algunas de las cifras.

Lo importante es que los alumnos sepan que ni 3.2 ni 3.1 son la solución exacta de $\sqrt{10}$: son aproximaciones a ese número.

Para saber más. Cuando se dice que un número decimal *se trunca* o se está utilizando una *aproximación por truncamiento*, quiere decir que se hace un "corte" del número considerando tantas cifras decimales como se decida. Por ejemplo, si en el número 3.1554496… se quiere truncar hasta los centésimos, el número quedaría como 3.15.

Cuando se utiliza una *aproximación por redondeo* hasta redondear décimos, se considera la cifra de los centésimos; para redondear hasta centésimos se considera la cifra de los milésimos, y así sucesivamente.

Si dicha cifra es mayor o igual que 5, se aumenta 1 a la cifra del orden anterior. Si la cifra es menor que 5, no se aumenta nada y la aproximación por redondeo es igual que la obtenida por truncamiento.

Por ejemplo, la aproximación de 3.1554496… hasta los milésimos es 3.155 porque la cifra de los diezmilésimos es 4.

>>> Lo que aprendimos

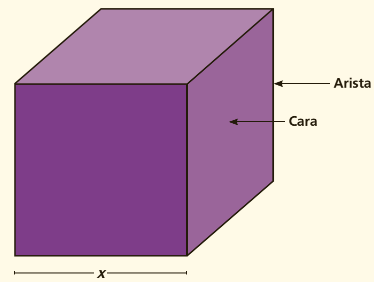
Resuelve los siguientes problemas.

1. A un número le resto 15, el resultado lo elevo al cubo y obtengo –8. ¿De qué número se trata?

   Ecuación: ___________

   Solución: ___________

2. El área total de las seis caras de un cubo es 60 cm^2.



a) Si la medida de una arista se representa con x, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite encontrar la medida de la arista? Subráyala.

- $x^3 = 60$
- $x^2 = 60$
- $6x^2 = 60$
- $6x = 60$

b) ¿Cuánto mide de área, una cara del cubo? ___________

c) ¿Cuánto mide la arista del cubo? x = ___________

(Usa la calculadora para encontrar la solución.)

d) ¿Cuánto mide de volumen el cubo? ___________

MATEMÁTICAS III

MENÚ DE PROBLEMAS

SESIÓN 3

Resuelve los siguientes problemas. Usa la calculadora para realizar las operaciones cuando lo consideres necesario.

1. A un hojalatero le encargaron hacer un recipiente en forma de prisma cuadrangular de 3 dm de altura que tenga un volumen de 48 dm³.

   Para construir el recipiente usará una lámina de metal de forma cuadrada (figura A), luego cortará cuadrados en las esquinas y, finalmente, doblará los bordes para formar el recipiente.

Contesta las siguientes preguntas para encontrar las medidas de los lados de la lámina

a) ¿Qué forma geométrica tiene la base del prisma? __________

b) La medida en decímetros del lado de la lámina es *y*. Subraya la expresión que representa la medida, en decímetros, de un lado de la base del prisma?

- y
- $y-6$
- $y-3$

c) ¿Qué expresión corresponde al área de la base del prisma? __________

d) Subraya la ecuación que hay que resolver para encontrar la medida de un lado de la lámina metálica.

- $4(y-6)^2 = 48$
- $6(y-6)^2 = 48$
- $3(y-6)^2 = 48$
- $3(y-3)^2 = 48$

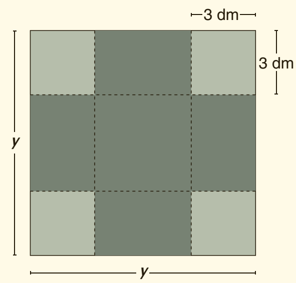
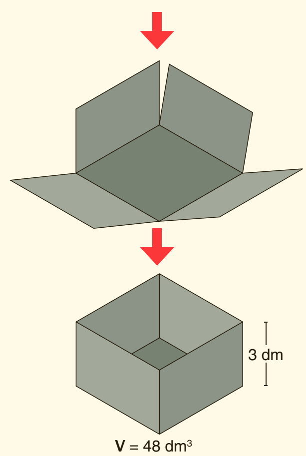


Figura A



Recuerda que:
La fórmula para calcular el volumen de un prisma es:
Área de la base × altura = volumen.

97

Propósito de la sesión. Resolver e inventar problemas que puedan modelarse con ecuaciones de segundo y tercer grado.

Sugerencia didáctica. Ahora los alumnos trabajarán con problemas en los que van a utilizar lo que aprendieron en las primeras dos sesiones. Cuando terminen de resolver cada problema, es importante destacar que aunque obtengan dos soluciones correctas algebraicamente, no necesariamente ambas tienen sentido en el contexto del problema. Por ejemplo, en el problema 2 una de las soluciones es negativa y debe descartarse porque se trata de hallar la medida de un lado de un terreno.

Integrar al portafolios. Seleccione uno o dos de los problemas de esta sesión y pida a los alumnos que le entreguen una copia de sus soluciones y procedimientos.

Propósito del interactivo. Presentar problemas en forma dinámica y acompañados de graficas (curvas) que ilustren que se trata de problemas no lineales y permitan a los alumnos resolver algunos de estos problemas apoyándose en las gráficas, sirviendo de complemento al libro.

Respuestas.

a) Un cuadrado.

b) La expresión correcta es y – 6, porque los cortes de la lámina son cuadrados y miden 3 cm por lado (que es la altura del prisma).

c) $(y-6)^2$

d) La ecuación es $3\,(y-6)^2 = 48$, porque en ella se multiplica la altura del prisma por el área de su base. Aunque ya se conoce el volumen porque aparece en el problema ($V = 48$ dm³), a partir de esta expresión se puede obtener la medida del lado de la lámina (que hasta ahora sólo se sabe que mide y dm).

Respuestas.

e) $y_1 = 10$

$y_2 = 2$

Sin embargo, la segunda solución debe descartarse en términos del contexto del problema: si a la lámina se le hacen dos cortes de 3 dm, debe asumirse que ésta no pudo haber medido 2 dm antes de los cortes.

f) 10 dm = 1 m.

Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos que en este problema las medidas se dan en decímetros. Una vez que lo hayan resuelto pídales que imaginen el tamaño del prisma y hágales preguntas como ¿será aproximadamente del tamaño de una caja de zapatos?, ¿o de un tinaco?

Respuestas.

a) $x^2 - 50^2 = 14\,400$ porque x^2 es el área de todo el terreno a la que se le restan los 50 m² del estacionamiento, y lo que queda es el área del jardín que mide 14 400 m².

b) $x^2 - 50^2 = 14\,400$

$x^2 - 2\,500 = 14\,400$

$x^2 = 16\,900$

$x = \sqrt{16\,900}$

$x_1 = 130$

$x_2 = -130$

c) Mide 130 m porque la solución negativa se descarta.

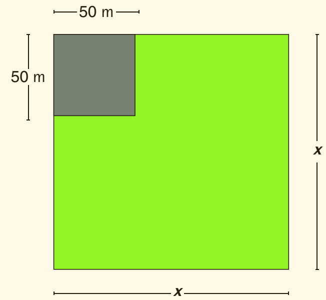
SECUENCIA 8

e) Hay dos números que solucionan la ecuación que corresponde al problema. Encuéntralos.

y_1 = ________, y_2 = ________

f) ¿Cuánto tiene que medir el lado de la lámina metálica? ________

2. El parque de una colonia está ubicado en un terreno cuadrado. El estacionamiento ocupa una parte cuadrada del terreno de 50 m por lado y el resto es el jardín con un área de 14 400 m².



a) Plantea una ecuación que permita encontrar cuánto mide el lado x de todo el terreno.

____

b) ¿Cuáles son las dos soluciones de la ecuación que encontraste?

________ y ________

c) ¿Cuánto mide el lado del terreno del parque?

____

3. El cubo de un número más el mismo número es igual a 38. ¿De qué número se trata?

a) Encuentra una ecuación que permita encontrar el número. Usa n para representarlo.

Ecuación: ________

n	n^3	$n^3 + n$
1	1	2
2	8	10
3	27	30
4	64	68
3.1	29.791	32.891
3.4	39.304	42.704
3.3	35.937	39.237
3.2	32.768	35.968
3.27	34.966*	38.236*
3.26	34.646*	37.906*
3.265	34.806*	38.071*

b) Usa la calculadora y la tabla de la izquierda para encontrar la solución de la ecuación

c) ¿Entre qué números enteros está la solución de la ecuación? ________

d) ¿Qué número con una cifra decimal estará más cerca de la solución? ________

e) ¿Qué número con dos cifras decimales estará más cerca de la solución? ________

98

Respuestas.

a) $n^3 + n = 38$

c) Entre el 3 y el 4.

d) 3.3

e) 3.26

Propósito de la actividad. Los renglones en blanco son para que los alumnos prueben con varios números decimales hasta que logren una mejor aproximación al resultado. Las cifras que aparecen en el libro del maestro son algunas de las que podrían poner los alumnos. Las que tienen un asterisco están redondeadas.

Sugerencia didáctica. La obtención de los números de esta tabla da la oportunidad de trabajar una vez más con el redondeo o con el truncamiento. Decidan en grupo cuál utilizarán.

4. Inventa un problema que se resuelva con la ecuación $\frac{x^2}{5} = 125$. Encuentra las dos soluciones de la ecuación y determina cuál de ellas es además solución del problema.

Presenten los problemas que inventaron. Comenten por qué algunas soluciones de la ecuación se descartan como solución del problema.

Inventen dos problemas para cada ecuación, resuélvanlas y determinen cuáles soluciones son aceptables para cada problema.

a) $6a^2 = 37.5$

b) $3n^2 - n = 102$

>>> Para saber más

Sobre ecuaciones cuadráticas, consulten:
http://www.emathematics.net/es/ecsegundogrado.php?a=1&tipo=numero
Ruta: Ecuación de segundo grado → Resolución cuando b=0
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].

99

Propósito del programa. Plantear y resolver problemas que se puedan modelar con ecuaciones de segundo y tercer grado.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la actividad. El propósito de esta actividad es fomentar la creatividad del alumno y afianzar los conocimientos que ha adquirido en el planteamiento y resolución de problemas por medio de ecuaciones.

Sugerencia didáctica. Es posible que en un inicio los problemas que inventen no tengan una redacción muy clara o haya errores, pero anímelos a seguirlo intentando y corrijan cuando sea necesario.

Si para algunos es difícil, sugiérales tomar alguno de los contextos que se han trabajado en esta secuencia como la adivinanza de números y los problemas de áreas. Posteriormente podrán emplear otros contextos.

Una manera de trabajar esta parte de la sesión puede ser el intercambio de problemas: pida a los alumnos que inventen un problema para una de las ecuaciones y luego intercambien ese problema con un compañero para que lo resuelva. Esta estrategia permite que cada problema sea leído y resuelto, con lo que se genera un intercambio de ideas y entre los propios alumnos se detectan errores o aspectos a precisar.

Posibles respuestas.

- La quinta parte del área de un cuadrado es 125 cm². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? La solución es 25 cm, se descarta la solución negativa –25.
- Pensé un número y lo elevé al cuadrado, el resultado lo dividí entre 5 y obtuve 125, ¿qué número pensé? Hay dos soluciones: 25 y –25.

Posibles respuestas.

a)

- Al pintar las seis caras de un cubo se cubrieron 37.5 m² ¿cuánto mide la arista del cubo?, ¿cuál es el volumen del cubo? Soluciones: la arista mide 2.5 m y el volumen es 15.625 m³, se descarta la solución negativa.
- Elevé al cuadrado un número y luego lo multipliqué por 6. El resultado fue 37.5 ¿qué número pensé? Hay dos soluciones: 2.5 y –2.5.

b)

- Si al triple del cuadrado de un número se le resta dicho número se obtiene 102, ¿de qué número se trata? Hay dos soluciones:

  6 y $-\frac{34}{6}$.

Sugerencia didáctica. La segunda solución de la ecuación $\left(-\frac{34}{6}\right)$ puede ser difícil de obtener para los alumnos. No se preocupe si no lo logran, en una secuencia posterior aprenderán a hacerlo.

Si le parece conveniente, usted puede comentarles que esa otra solución existe e incluso dárselas para que comprueben que también es correcta.

Propósito de la sesión. Descubrir que una ecuación de segundo grado puede resolverse usando la factorización.

Propósito del programa. Presentar situaciones que se modelen con ecuaciones de segundo grado y resolverlas por factorización.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la actividad. A través del conteo de los cuadrados y rectángulos que conforman el área total del cuadrado, se pretende continuar dando significado a la factorización: el trinomio $z^2 + 5z + 6$ que representa el área del rectángulo, pueden descomponerse en factores como $(z + 3)(z + 2)$.

Respuestas.

a) $z + 3$

b) $z + 2$

SECUENCIA 9

Resolución de ecuaciones por factorización

En esta secuencia resolverás problemas y ecuaciones cuadráticas mediante *factorización.*

SESIÓN 1

¿CUÁNTO MIDEN LOS LADOS?

>>> Para empezar

En la secuencia 1 trabajaron con bloques algebraicos de área x^2, x y 1.

En esta sesión trabajaremos con bloques de área z^2, z y de 1 cm², como se muestra en la figura 1.

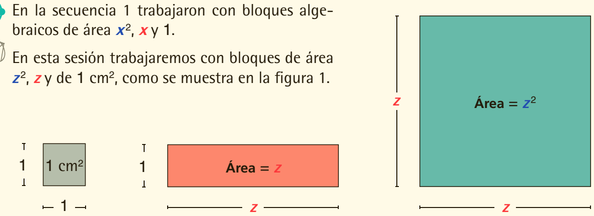


Figura 1

>>> Consideremos lo siguiente

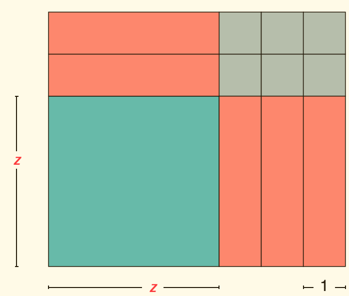


Figura 2

Con bloques como los anteriores se ha formado un rectángulo cuya área se representa por el trinomio $z^2 + 5z + 6$, como se muestra en la figura 2.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la base de este rectángulo?

____

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la altura de este rectángulo?

____

Si se sabe, además, que el área del rectángulo es 42 cm²:

100

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de las literales.
Subrema
Ecuaciones.
Antecedentes
En las secuencias 1 y 8 de **Matemáticas III**, los alumnos factorizaron y resolvieron expresiones de segundo grado usando procedimientos aritméticos y la inversión de operaciones. En esta secuencia seguirán estudiando el planteamiento y la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Propósitos de la secuencia
Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**¿Cuánto miden los lados?** Descubrir que una ecuación de segundo grado puede resolverse usando la factorización.	Programa 15
2	**Los factores de cero** Resolver ecuaciones cuadráticas en las que un lado de la igualdad es cero.	Interactivo
3	**El adorno** Modelar problemas mediante ecuaciones cuadráticas y resolverlas por factorización.	Programa 16
4	**Apliquemos lo aprendido** Integrar lo aprendido en las tres primeras sesiones sobre el planteamiento y resolución de ecuaciones de segundo grado por el procedimiento de factorización.	

c) Completen la ecuación que tienes que resolver para encontrar el valor de z, sin realizar medición alguna.

Ecuación: ______________________ = 42

d) La ecuación que escribiste debe tener dos soluciones, ¿cuál de ellas no resuelve el problema? ______________________

e) ¿Cuántos centímetros mide z? ______________________

Comparen sus soluciones y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. En la secuencia 1 estudiaste cómo factorizar trinomios. Contesta las siguientes preguntas para factorizar $z^2 + 5z + 6$:

a) Encuentra algunas parejas de números enteros que multiplicados den 6 como resultado: 6 y 1, 3 y 2

b) ¿Cuál de esas parejas de números da 5 al sumarse? 3 y 2

c) ¿Cuáles son las dos expresiones algebraicas que multiplicadas dan $z^2 + 5z + 6$? Completa.

$$(z + 3)(z + 2) = z^2 + 5z + 6$$

Comparen y verifiquen sus soluciones haciendo las multiplicaciones respectivas.

Comenten:

a) ¿Cuánto tiene que valer z para que el área del rectángulo sea igual a 42 cm²?

z = 4

b) Hay un valor negativo de z que es solución de la ecuación $(z + 3)(z + 2) = 42$. Encuéntrenlo completando la siguiente tabla.

z	$z + 3$	$z + 2$	$(z + 3)(z + 2)$
–1	2	1	2
–3	0	–1	0
–7	–4	–5	20

z = –9

c) ¿Resuelve el problema este valor de z? ________ ¿Por qué? ______________________

____

101

Propósito de la actividad. Se espera que esta actividad sea un reto para los alumnos, pues aunque ya han trabajado con la factorización y están familiarizados con la obtención de áreas de cuadrados que se conforman con bloques de distintas áreas, ahora se enfrentarán a un rectángulo cuya área está expresada por un trinomio.

Posibles dificultades. Para algunos alumnos quizá el problema sea difícil. Usted puede ayudarlos a obtener una información que es esencial para comenzar a resolverlo: cuántos bloques de cada tamaño hay dentro del rectángulo. Para ello hay que analizar el trinomio que representa su área: hay 1 bloque de área z^2, 5 de área z y 6 de área 1. Haga énfasis en ello y después, anímelos a intentar cualquier procedimiento para encontrar las medidas de los lados del rectángulo, por ejemplo, dibujando dentro de éste posibles formas de acomodar esos bloques.

Quizá otros alumnos intenten desde el inicio la factorización utilizando lo que aprendieron en la secuencia 1 de este libro: se obtiene el término común z, se buscan números que al multiplicarse den 6 y que al sumarse den 5. En este caso, son el 2 y el 3. Así pues, la medida de la base es $z + 3$ y la de la altura es $z + 2$.

Respuestas.

c) $(z + 3)(z + 2) = 42$

d) Sabemos que la base y la altura miden $z + 3$ y $z + 2$ respectivamente, y además, que el área del rectángulo expresada en centímetros cuadrados es 42, entonces dos números, que multiplicados dan 42, son 6 y 7 o –7 y –6. Sin embargo, como las longitudes no pueden ser negativas se descarta como solución del problema $z = -9$.

e) 4 cm, porque si la base mide $z + 3 = 7$, el lado del cuadrado z mide 4.

Respuestas.

b) El valor negativo de z que también soluciona la ecuación es –9. Quedaría

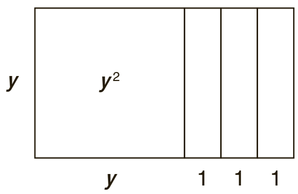
$$\begin{aligned}(z + 3)(z + 2) &= (-9 + 3)(-9 + 2)\\ &= (-6)(-7)\\ &= 42\end{aligned}$$

Los renglones que aparecen en blanco en la tabla son para que los alumnos prueben con distintos valores de z.

c) Por medio de la tabla los alumnos pueden darse cuenta de que una solución a la ecuación $(z + 3)(z + 2) = 42$, es $z = -9$, sin embargo, ésta no resuelve el problema porque la longitud de un lado no puede ser negativa.

Respuesta.

a) Al factorizar la expresión se obtiene $y(y + 3) = 54$, cada factor en la expresión puede verse como uno de los lados del rectángulo, así pues, si la altura mide y, la base mide $y + 3$. Los alumnos también podrían imaginar un cuadrado de lado y, que es la medida de la altura. Entonces sabrían que el área que falta por cubrir mide $3y$. Si parte de la base mide y, hay que agregarle tres rectángulos que midan 1 de base y y de altura: entonces la base mide $y + 3$.



Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos que decidir qué lado será la base, o qué lado será la altura de un rectángulo, es una cuestión arbitraria. Seguramente están acostumbrados a que el lado más largo sea la base, pero no necesariamente tiene que ser así. También es importante aclarar que un rectángulo puede estar "acostado" o "parado", la forma de la figura no cambia.

Posibles dificultades. Hallar la segunda solución de la ecuación puede ser difícil. Sugiera a los alumnos que hagan una tabla para que vayan probando con distintos valores negativos. Por ejemplo:

y	$y + 3$	$y(y + 3)$
-2	1	-2
-5	-2	10
-10	-7	70

SECUENCIA 9

II. La figura 3 es una reducción, el área del rectángulo original era de 54 cm². ¿Cuánto medían su base y su altura?

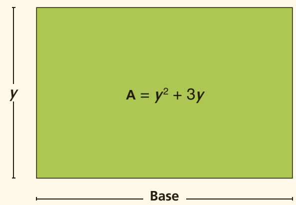


Figura 3

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la base de este rectángulo?

____

Recuerda que:

Para factorizar el binomio $x^2 + 6x$ *se busca el factor común de ambos términos:*

$$x^2 + 6x = x(x + 6)$$

Factor común

Para encontrar la longitud original del lado y, sin necesidad de medir, tienes que resolver la ecuación:

$$y^2 + 3y = 54$$

b) Completa la factorización del binomio $y^2 + 3y$, de la ecuación anterior.

$(y)(\ y + 3\ ) = 54$

c) Existen dos parejas de números enteros que multiplicados dan 54 y que uno de ellos es tres unidades mayor que el otro. Completa las parejas escribiendo en primer lugar el número menor.

$(\ 9\ )(\ 6\ ) = 54 \qquad (\ -9\ )(\ -6\ ) = 54$

d) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $y^2 + 3y = 54$?

$y_1 =$ 6 $\qquad y_2 =$ −9

e) ¿Cuántos centímetros mide la altura del rectángulo? 6

f) ¿Cuántos centímetros mide su base? 9

Comparen sus respuestas, verifiquen sus soluciones de la ecuación y comenten:

¿Cuál solución de la ecuación no resuelve el problema?

102

Respuesta. La solución negativa debe descartarse, pues en el contexto del problema no tiene sentido hablar de medidas negativas.

>>> A lo que llegamos

Una forma de resolver ecuaciones cuadráticas consiste en **factorizar** las expresiones algebraicas. Por ejemplo, la ecuación:

$$x^2 + 7x + 10 = 18$$

se puede resolver factorizando el trinomio $x^2 + 7x + 10$; la ecuación queda así:

$$(x + 5)(x + 2) = 18$$

Una manera de resolver esta ecuación factorizada consiste en buscar parejas de números que **multiplicados den 18** y que uno de ellos sea **tres unidades** menor que el otro.

En este caso, hay dos parejas de números que cumplen estas dos condiciones:

$$(3)(6) = 18 \quad \text{y} \quad (-6)(-3) = 18$$

Entonces, se tiene que: $(x + 2)(x + 5) = 18$

$(3)(6) = 18$

de donde $x = 1$, porque $x + 2 = 1 + 2 = 3$ y, $x + 5 = 1 + 5 = 6$

Además se tiene que: $(x + 2)(x + 5) = 18$

$(-6)(-3) = 18$

de donde $x = -8$, porque $x + 2 = -8 + 2 = -6$ y, $x + 5 = -8 + 5 = -3$

>>> Lo que aprendimos

1. Soluciona las siguientes ecuaciones mediante factorización. Comprueba tus soluciones sustituyéndolas en la ecuación y efectuando las operaciones.

a) $x^2 - 2x = 8$ Comprobación:

$x_1 =$ _______ $x_2 =$ _______

b) $x^2 - 4x + 4 = 81$ Comprobación:

$x_1 =$ _______ $x_2 =$ _______

103

Respuestas.

a) $x^2 - 2x = 8$

$x(x - 2) = 8$

$x_1 = 4$

Comprobación:

$4^2 - 2(4) = 16 - 8 = 8$

$x_2 = -2$

Comprobación:

$-2^2 - (-2) = 4 + 4 = 8$

b) $x^2 - 4x + 4 = 81$

$(x - 2)^2 = 81$

$x_1 = 11$

Comprobación:

$11^2 - 4(11) + 4 = 121 - 44 + 4 = 81$

$x_2 = -7$

Comprobación:

$-7^2 - 4(7) + 4 = 49 + 28 + 4 = 81$

Sugerencia didáctica. Si lo considera conveniente, diga a los alumnos que utilicen tablas como las anteriores para hallar la solución negativa de las ecuaciones. En la siguiente sesión aprenderán un método (la igualación a cero) que será más rápido para resolver estas ecuaciones.

Respuestas.

a) $x^2 - 6x + 8 = 15$

$(x - 2)\ (x - 4) = 15$

$x_1 = 7$

$x_2 = -1$

Entonces, los lados del rectángulo miden 5 y 3 cm. La solución negativa se descarta.

b) $x^2 + 9x + 18 = 40$

$(x + 6)\ (x + 3) = 40$

$x_1 = 2$

$x_2 = -11$

Los lados del rectángulo miden 8 y 5 cm. Las medidas −8 y −5 se descartan.

Sugerencia didáctica. Aunque la solución negativa no resuelva estos problemas, es importante que los alumnos la obtengan para que tomen conciencia de que en las ecuaciones cuadráticas siempre hay dos soluciones.

Además, es conveniente propiciar el análisis de las expresiones que van a factorizarse para determinar cuáles son los factores que deben tomarse. Por ejemplo, en el problema a) se tiene $(x - 2)\ (x - 4) = 15$, así que se busca una factorización en la que, entre el número del primer factor y el número del segundo factor, haya una diferencia de 2; por lo tanto, las factorizaciones (15) (1) y (−15) (−1) deben descartarse.

SECUENCIA 9

2. Resuelve los siguientes problemas. Plantea y resuelve una ecuación cuadrática para cada uno de ellos.

a) El área de un rectángulo está dada por la expresión algebraica $x^2 - 6x + 8$. Además, también se sabe que el área es igual a 15 cm. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

Ecuación: ____________________

Largo: ________ Ancho: ________

b) El área de un rectángulo está dada por la expresión algebraica $x^2 + 9x + 18$. Además, también se sabe que el área es igual a 40 m². ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

Ecuación: ____________________

Largo: ________ Ancho: ________

SESIÓN 2

LOS FACTORES DE CERO

>>> Para empezar

Encuentren distintas parejas de números que den cero al multiplicarse.

______ × ______ = 0   ______ × ______ = 0

______ × ______ = 0   ______ × ______ = 0

______ × ______ = 0   ______ × ______ = 0

______ × ______ = 0   ______ × ______ = 0

¿Habrá alguna pareja de números DISTINTOS DE CERO que den cero al multiplicarse? ______ ¿Cuál? ____________________

Lean y comenten la siguiente información.

Si el producto de dos números es igual a cero, al menos uno de los dos tiene que ser igual a cero.

104

Propósito de la sesión. Resolver ecuaciones cuadráticas en las que un lado de la igualdad es cero.

Propósito de la actividad. Que los alumnos reflexionen sobre las multiplicaciones que son iguales a cero. Esto es importante para estudiar la resolución de ecuaciones cuadráticas igualándolas a cero.

Respuesta. No hay ninguna pareja de números distintos de cero que den cero al multiplicarse.

Hay dos números que solucionan la siguiente ecuación:

$$(x - 6)\,(x - 2) = 0$$

a) ¿Cuánto tiene que valer x para que $x - 6$ sea igual a 0? x = ______

b) ¿Cuánto tiene que valer x para que $x - 2$ sea igual a 0? x = ______

Comparen sus respuestas. Verifíquenlas sustituyendo sus valores en la ecuación original.

Respuestas.

a) 6

b) 2

Al sustituir se tiene que:

$(6 - 6)\,(6 - 2) = (0)\,(-4) = 0$

$(2 - 6)\,(2 - 2) = (-4)\,(0) = 0$

>>> Consideremos lo siguiente

Plantea y resuelve una ecuación para encontrar los números que cumplan la siguiente condición:

Al elevar el número al cuadrado y restarle 8 se obtiene el mismo resultado que al multiplicar el número por 2.

Ecuación: ______________________

Números que solucionan la ecuación: ______________________

Comparen y verifiquen sus respuestas.

Sugerencia didáctica. Es posible que los alumnos no logren hallar los números que resuelven la ecuación. Lo que es importante aquí es que planteen la ecuación correctamente; en el siguiente apartado aprenderán cómo resolverla, así que permítales continuar aunque no tengan todas las respuestas o incluso se hayan equivocado.

Respuestas.

Ecuación: $x^2 - 8 = 2x$.

Números que solucionan la ecuación:

$x_1 = 4$

$4^2 - 8 = 2\,(4)$

$8 = 8$

$x^2 = -2$

$-2^2 - 8 = 2\,(-2)$

$-4 = -4$

>>> Manos a la obra

I. Con relación al problema anterior, contesta las siguientes preguntas.

a) Si el número que se busca se representa con la letra x, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al enunciado: *Elevar el número al cuadrado y restarle 8*? Subráyala.

- $(x - 8)^2$
- $x^2 - 8$
- $x^2\,(8)$

b) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde al problema? Subráyala.

- $(x - 8)^2 = 2x$
- $x^2 - 8 = 2x$
- $8x^2 = 2x$

Comparen sus respuestas.

Sugerencia didáctica. Dedique el tiempo necesario a analizar el procedimiento de Arturo para que a los alumnos les quede claro cuál fue el error. Una vez que hayan solucionado los incisos a) y b), aclare que esa factorización no puede ser correcta porque al realizar las multiplicaciones no se obtiene $2x$.

También es importante que analicen la afirmación de Arturo. Cuando dice que el 2 y el 4 "cumplen la condición del problema" está afirmando que si x vale 2 o si vale 4, la ecuación $x^2 - 8 = 2x$ es cierta; sin embargo es preciso aclarar que sólo la ecuación es cierta cuando $x = 4$, pero no lo es cuando $x = 2$.

Como la factorización $(x - 2)(x - 4) = 2x$ que propuso Arturo es errónea, el único valor de x que es cierto es $x = 0$.

Para que los alumnos se den cuenta de que lo que planteó Arturo es incorrecto, pídales que prueben esos valores tanto en la ecuación original como en la factorización.

Respuestas.

a) La factorización que propuso Arturo es incorrecta. El producto de $(x - 2)(x - 4)$ es un trinomio.

b) $x^2 - 6x + 8$

Sugerencia didáctica. Analice con los alumnos porqué Lupe afirmó que "no podía factorizar la ecuación como estaba", es decir, en su forma original que es $x^2 - 8 = 2x$. Es preciso que observen que del lado izquierdo del signo igual no hay términos comunes.

Al llegar al inciso c) lo importante es que los alumnos comprendan el procedimiento que empleó Lupe para poder factorizar: restar $2x$ en ambos lados de la ecuación es igualarla a cero (porque el lado derecho del signo igual es cero) para que del lado izquierdo se tenga un trinomio.

II. Revisa los procedimientos que siguieron algunos alumnos para resolver la ecuación que corresponde. Contesta lo que se pregunta respecto a cada procedimiento.

PROCEDIMIENTO 1

Arturo factorizó la ecuación de la siguiente manera:

$$x^2 - 8 = 2x$$
$$(x - 2)(x - 4) = 2x$$

Y dijo que los números 2 y 4 cumplían la condición del problema.

a) ¿Estás de acuerdo con la factorización que hizo Arturo? _____ ¿Por qué? _____

____

b) Para verificar la factorización que encontró Arturo, realiza la multiplicación de los factores:

$(x - 2)(x - 4) =$ _______________

PROCEDIMIENTO 2

Lupe dijo que no podía factorizar la ecuación como estaba. Restó $2x$ de ambos lados de la ecuación y obtuvo lo siguiente:

$$x^2 - 8 = 2x$$
$$x^2 - 2x - 8 = 2x - 2x$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Recuerda que:

Para factorizar un trinomio como $x^2 + 5x - 24$, hay que buscar dos números que multiplicados den -24 y sumados den $+5$.

$(+8)(-3) = -24$

$(+8) + (-3) = +5$

$x^2 + 5x - 24 = (x + 8)(x - 3)$

c) ¿Cuál de las siguientes es factorización de $x^2 - 2x - 8$? Subráyala.

- $x^2 - 2x - 8 = (x - 2)(x - 4)$
- $x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$
- $x^2 - 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$

d) En la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$, sustituye el trinomio por su factorización y resuelve la ecuación que resulte.

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(\ x + 2\ )(\ x - 4\ ) = 0$$

$x_1 =$ -2, $x_2 =$ 4

Comparen y verifiquen sus respuestas sustituyendo en la ecuación original. Comenten: ¿cuáles son los números que cumplen la condición del problema?

____

106

3

>>> A lo que llegamos

Una **ecuación cuadrática factorizada e igualada a cero** se resuelve al encontrar los números que hacen valer cero a los factores. Por ejemplo, la ecuación cuadrática factorizada:

$$(x - 7)(x + 11) = 0$$

se soluciona al encontrar los valores de x que hacen valer cero a los factores, es decir:

$$x - 7 = 0 \quad \text{y} \quad x + 11 = 0$$

de donde se obtiene: $x_1 = 7$ y $x_2 = -11$

Entonces 7 y –11 son soluciones porque al sustituirlos en la ecuación y efectuar las operaciones, se obtiene 0.

Sustituyendo 7: $(7 - 7)(7 + 11) = (0)(18) = 0$

Sustituyendo –11: $(-11 - 7)(-11 + 11) = (-18)(0) = 0$

III. Resuelve las siguientes ecuaciones. Cuando sea necesario, iguala a cero y factoriza.

a) $x^2 + 10x + 21 = 0$

b) $z^2 = -6z - 9$

c) $y^2 - 6 = -y$

>>> Lo que aprendimos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones factorizando. Cuando sea conveniente, transforma la ecuación de manera que esté igualada a cero.

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$

b) $12z - 36 = z^2$

c) $y^2 + 7y = 18$

2. Resuelve el siguiente problema mediante una ecuación.

¿Qué número elevado al cuadrado es igual a tres veces el mismo número?

Ecuación: $x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x_1 = 0, \; x_2 = 3$

El número es: 0 o 3

107

Respuestas.

a) $(x + 7)(x + 3) = 0$

$x_1 = -7 \qquad x_2 = -3$

b) Igualando a 0 quedaría:

$z^2 + 6z + 9 = 0$

$(z + 3)(z + 3) = 0$

$z_1 = -3 \qquad z_2 = -3$

c) Igualando a 0 quedaría:

$y^2 + y - 6 = 0$

$(y - 3)(y + 2) = 0$

$y_1 = 3 \qquad y_2 = -2$

Propósito del interactivo. Que los alumnos busquen numéricamente mediante la exploración del interactivo la factorización de ecuaciones de segundo grado.

Sugerencia didáctica. Dé tiempo a los alumnos para resolver este problema. Si logran plantear la ecuación pero no pueden resolverla, sugiérales igualarla a cero. Una vez hecho esto podrán factorizarla y sabrán que para que la multiplicación sea igual a cero, uno o ambos factores deben ser cero; por lo tanto, x puede ser igual a 3 o a 0.

Una vez que obtengan los valores de x pídales que los verifiquen en la ecuación original $x^2 = 3x$, así podrán darse cuenta de si cometieron algún error.

Sugerencia didáctica. A los alumnos debe quedarles claro cuándo es necesario igualar a cero una ecuación. Por ejemplo, la del inciso a) ya está igualada a cero, en cambio la del inciso c) no lo está. Comente esto con ellos antes de empezar a resolver este apartado y aclare dudas si fuera necesario.

Posibles dificultades. En las ecuaciones a) y b) las dos soluciones son el mismo número. Esto puede resultar confuso para algunos alumnos, por lo que es útil recordarles que, para que una multiplicación sea igual a cero, uno o ambos factores deben ser cero. Entonces, en $(x - 5)(x - 5)$ para que el primer factor sea igual a cero, x debe valer 5; y para que el segundo factor sea igual a cero, x también debe valer 5. Por eso las dos soluciones son iguales.

Por otro lado, como puede verse en este libro, la igualación a cero de la ecuación b) está "al revés", en el sentido de que el cero se encuentra del lado izquierdo del signo igual. Los alumnos deben saber que también es correcto plantear ecuaciones así, por lo que tienen que familiarizarse con esta forma de escritura. Explíqueles que una ecuación supone una igualdad: lo que está del lado izquierdo debe ser igual a lo que está del lado derecho, no importa de qué lado esté el cero.

La ecuación b) puede plantear otra dificultad. Es posible que los alumnos la igualen a cero de la siguiente forma:

$12z - 36 = z^2$

$12z - 36 - z^2 = z^2 - z^2$

$12z - 36 - z^2 = 0$

Entonces será necesario explicar a los alumnos que, aunque es correcto lo que hicieron, no puede resolverse así; hay que cambiar todos los signos a la ecuación, con lo que se tendría $-12z + 36 + z^2$. Si ese paso resulta confuso para los alumnos, puede ponerles un ejemplo que les resulte familiar, como:

$-4 + 6 - 2 = 0$

que también puede escribirse:

$0 = 4 - 6 + 2$

Respuestas.

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$(x - 5)(x - 5) = 0$

$x_1 = 5, \; x_2 = 5$

b) $12z - 36 = z^2$

$0 = z^2 - 12z + 36$

$0 = (z - 6)(z - 6)$

$z_1 = 6, \; z_2 = 6$

c) $y^2 + 7y = 18$

$y^2 + 7y - 18 = 0$

$(y + 9)(y - 2) = 0$

$y_1 = -9, \; y_2 = +2$

Propósito de la sesión. Modelar problemas mediante ecuaciones cuadráticas y resolverlas por factorización.

Sugerencia didáctica. Lea junto con sus alumnos este apartado y escriba en el pizarrón los ejemplos para analizarlos.

También será útil que los alumnos comenten lo que significa "efectuar todas las operaciones de un lado" de la ecuación y que "los términos ya no pueden reducirse". Para ello, pida a algunos alumnos que expliquen qué entienden por cada una de esas condiciones.

Respuesta. Lo primero que hay que hacer para escribir la ecuación en su forma general es igualarla a cero. Entonces, se resta 6 de los dos lados del signo igual.

$2x^2 + 6\ (x + 1) - 3x - 6 = 6 - 6$

$2x^2 + 6\ (x + 1) - 3x - 6 = 0$

Luego, hay que reducir los términos, es decir, efectuar las operaciones indicadas entre los términos semejantes. Paso por paso, sería:

$2x^2 + 6x + 6 - 3x - 6 = 0$

$2x^2 + 3x = 0$

SESIÓN 3

EL ADORNO

>>> Para empezar

Una ecuación cuadrática está en su **forma general** cuando un lado de la igualdad es 0 y en el otro lado se han efectuado todas las operaciones indicadas y los términos ya no pueden reducirse. Ejemplos de ecuaciones cuadráticas en su forma general son:

- $x^2 - 6x - 7 = 0$
- $x^2 - 6x = 0$

Establezcan la forma general de la ecuación $2x^2 + 6(x + 1) - 3x = 6$:

$2x^2 + 3x$ = 0

En esta sesión resolverán problemas planteando las formas generales de las ecuaciones correspondientes.

>>> Consideremos lo siguiente

Luis adornó el borde de un dibujo como se muestra en la figura 4. El área cubierta por el adorno es de 252 cm².

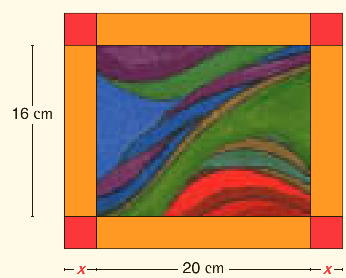


Figura 4

a) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a este problema? Subráyala.

- $4x^2 + 36x = 252$
- $4x^2 + 36 = 252$
- $4x^2 + 72x = 252$
- $4x^2 + 72 = 252$

b) ¿Cuántos centímetros mide el ancho del adorno? 3 cm

Comparen sus soluciones y comenten cómo encontraron el valor de x.

>>> Manos a la obra

I. A continuación se presenta una forma de resolver la ecuación correspondiente al problema del adorno. Efectúa las siguientes actividades:

a) Establece la forma general de la ecuación.

$4x^2 + 72x - 252$ = 0

108

Sugerencia didáctica. Quizá sea difícil para los alumnos factorizar la ecuación en su forma general. Si los alumnos no lo logran, sigan adelante y luego corrijan lo que aquí quede pendiente.

Posibles dificultades. Los alumnos pueden encontrar difícil factorizar expresiones como $4x^2 + 72x - 252 = 0$, en las que el coeficiente del término cuadrático es diferente de 1. En este caso, se les propone dividir todos los términos entre 4 para que el término cuadrático tenga coeficiente 1, pero es importante que analicen juntos porqué se hace esa división.

Es posible que algunos alumnos logren factorizar la ecuación sin hacer la división, lo cual también es correcto. En ese caso, pueden analizar las diferencias entre una y otra factorización y verificar que se obtienen los mismos valores para x. Sin hacer la división, quedaría:

$4x^2 + 72x = 252$

$4x^2 + 72x - 252 = 0$

$(2x - 6)\ (2x + 42) = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = -21$

Respuestas.

a) El ancho del adorno mide 3 cm porque al resolver la ecuación se tiene que:

$4x^2 + 72x = 252$

$4x^2 + 72x - 252 = 0$

$x^2 + 18x - 63 = 0$

$(x - 3)\ (x + 21) = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = -21$

La solución negativa se descarta.

b) La ecuación que corresponde es $4x^2 + 72x = 252$, porque cada uno de los 4 cuadrados de las esquinas tiene un área de x^2; hay 2 rectángulos con área $16x$ y 2 con área $20x$; sumados son $72x$.

b) Todos los términos de esta ecuación se pueden dividir entre el mismo número: 4. Simplifica la ecuación dividiendo entre 4.

$x^2 + 18x - 63 = 0$

c) Factoriza la ecuación.

$(x + 21)(x - 3) = 0$

d) Encuentra los valores de x que hacen cero los factores:

$x + 21 = 0$ y $x - 3 = 0$

e) Las soluciones de la ecuación son:

$x_1 = -21$ y $x_2 = 3$

f) ¿Cuál de las dos soluciones de la ecuación no puede ser la medida del lado de un cuadrado rojo de la figura 4? ______ ¿Por qué? ______

______

Respuesta. La solución es 3 porque la negativa se descarta al tratarse de la medida del ancho de un rectángulo.

Comparen y verifiquen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Para resolver una ecuación cuadrática usando la factorización es conveniente pasarla primero a su **forma general**.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 3x - 5 = 35$ se puede resolver de la siguiente manera:

- Se pasa la ecuación a su forma general: $x^2 - 3x - 40 = 0$
- Se factoriza: $(x - 8)(x + 5) = 0$
- Se encuentran los valores de x que hacen cero los factores: $x_1 = 8$, $x_2 = -5$
- Se verifican las soluciones sustituyendo en la ecuación original:
  Para $x_1 = 8$: $(8)^2 - 3(8) - 5 = 64 - 24 - 5 = 35$
  Para $x_2 = -5$: $(-5)^2 - 3(-5) - 5 = 25 + 15 - 5 = 35$

II. Resuelve y verifica en tu cuaderno las siguientes ecuaciones. Usa el procedimiento de factorización.

a) $x^2 + 3x = 10$

b) $3x^2 = -6x$

Comparen y verifiquen sus respuestas.

Propósito del programa. Plantear problemas que se modelen con ecuaciones de segundo grado y resolverlas por medio de la factorización.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Respuestas.

a) $x^2 + 3x = 10$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$(x + 5)(x - 2) = 0$

$x_1 = -5$

$x_2 = 2$

Comprobación:

Para x_1

$-5^2 + 3(-5) = 10$

$25 - 15 = 10$

Para x_2

$2^2 + 3(2) = 10$

$4 + 6 = 10$

b) $3x^2 = -6x$

$3x^2 + 6x = 0$

$x(3x + 6) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -2$

Comprobación:

Para x_1

$3(0)^2 = -6(0)$

$0 = 0$

Para x_2

$3(-2)^2 = -6(-2)$

$12 = 12$

Respuestas.

d) Para y_1

$-6^2 + 2(-6) + 2 = 26$

$36 - 12 + 2 = 26$

$26 = 26$

Para y_2

$4^2 + 2(4) + 2 = 26$

$16 + 8 + 2 = 26$

$26 = 26$

e) 4 cm, la solución negativa se descarta.

Respuestas.

a) $x^2 = -5x$

$x^2 + 5x = 0$

$x(x + 5) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -5$

Comprobación:

Para x_1

$0^2 = -5(0)$

$0 = 0$

Para x_2

$-5^2 = -5(-5)$

$25 = 25$

b) $3x^2 + 5x = 2x^2 + 7x$

$3x^2 - 2x^2 + 5x - 7x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

Comprobación:

Para x_1

$3(0)^2 + 5(0) = 2(0)^2 + 7(0)$

$0 = 0$

Para x_2

$3(2)^2 + 5(2) = 2(2)^2 + 7(2)$

$12 + 10 = 8 + 14$

$22 = 22$

c) $2x^2 + 6(x + 1) - 3x = 6$

$2x^2 + 6(x + 1) - 3x - 6 = 0$

$2x^2 + 6x + 6 - 3x - 6 = 0$

$2x^2 + 3x = 0$

$x(2x + 3) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -\frac{3}{2}$

Comprobación:

Para x_1

$2(0)^2 + 6(0 + 1) - 3(0) = 6$

$0 + 6 - 0 = 6$

$6 = 6$

Para x^2

$2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{3}{2} + 1\right) - 3\left(-\frac{3}{2}\right) = 6$

$2\left(\frac{9}{4}\right) + 6\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\left(-\frac{3}{2}\right) = 6$

$\frac{9}{2} - 3 + \frac{9}{2} = 6$

$6 = 6$

SECUENCIA 9

>>> Lo que aprendimos

1. La expresión $y^2 + 2y + 2$ representa el área de la figura 5.

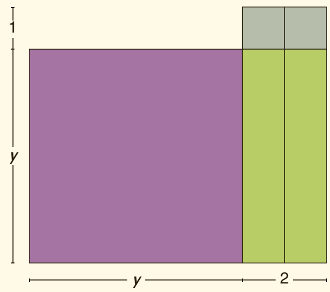


Figura 5

a) Plantea una ecuación para encontrar el valor de y si el área de toda la figura es de 26 cm².

Ecuación: $y^2 + 2y + 2$ = 26

b) Para resolver la ecuación que planteaste, primero pásala a su forma general:

Forma general: $y^2 + 2y - 24$ = 0

c) Resuelve la ecuación mediante factorización:

$(y + 6)(y - 4) = 0$

$y_1 = -6$ $y_2 = 4$

d) Verifica los valores que encontraste sustituyendo en la ecuación original.

e) ¿Cuántos centímetros mide el lado del cuadrado morado de la figura 4?

2. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones. Usa el procedimiento de factorización.

a) $x^2 = -5x$ $x_1 = 0,\ x_2 = -5$

b) $3x^2 + 5x = 2x^2 + 7x$ $x_1 = 0,\ x_2 = +2$

c) $2x^2 + 6(x + 1) - 3x = 6$ $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{3}{2}$

SESIÓN 4

APLIQUEMOS LO APRENDIDO

>>> Lo que aprendimos

1. Plantea una ecuación para modelar los siguientes problemas y aplica la factorización para resolverla.

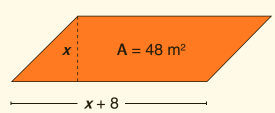


Figura 6

a) ¿Cuántos metros mide el largo del terreno que se muestra en la figura 6?

Ecuación: $x(x + 8) = 48$

El largo del terreno mide : 12 m

110

Propósito de la sesión. Integrar lo aprendido en las tres primeras sesiones sobre el planteamiento y resolución de ecuaciones de segundo grado por el procedimiento de factorización.

Integrar al portafolios. Seleccione dos de los problemas de esta sesión y pida a los alumnos que le entreguen una copia de sus resultados y procedimientos. Analice si es necesario hacer un repaso.

Sugerencia didáctica. Recuerden que la fórmula para calcular el área de un paralelogramo es base por altura. Esta última se mide trazando una línea perpendicular a la base, no por ninguna de las diagonales del paralelogramo.

Respuesta.

a) La ecuación que representa el área del paralelogramo es $x(x + 8) = 48$.

Al efectuar las multiplicaciones se tiene:

$x^2 + 8x = 48$

Al igualar a cero:

$x^2 + 8x - 48 = 48 - 48$

$(x + 12)(x - 4) = 0$

$x_1 = -12$

$x_2 = 4$

El largo del terreno mide $x + 8$, es decir, 12 m.

b) Un número elevado al cuadrado menos cinco veces el número es igual a 14. ¿De qué número se trata? 7 y −2

Ecuación: $x^2 - 5x = 14$

2. Resuelve y comprueba las siguientes ecuaciones. Usa el procedimiento de factorización.

a) $3x^2 - 15x = 0$

b) $x^2 + 4x = 7x$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $x^2 - 3x = 10$

3. Completa la siguiente tabla.

Soluciones de la ecuación	Ecuación factorizada	Ecuación en su forma general
$x_1 = 0 \quad x_2 = 5$	$x(x-5) = 0$	$x^2 - 5x = 0$
$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$	$x(x+2) = 0$	$x^2 + 2x = 0$
$x_1 = 2 \quad x_2 = -3$	$(x-2)(x+3) = 0$	$x^2 + x - 6 = 0$
$x_1 = 1 \quad x_2 = -4$	$(x-1)(x+4) = 0$	$x^2 + 3x - 4 = 0$
$x_1 = 5 \quad x_2 = 5$	$(x-5)(x-5) = 0$	$x^2 - 10x + 25 = 0$
$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$	$(x-4)(x+4) = 0$	$x^2 - 16 = 0$
$x_1 = 10,\ x_2 = -10$	$(x-10)(x+10) = 0$	$x^2 - 100 = 0$

4. Escribe un problema que se resuelva con las siguientes ecuaciones. En cada caso, resuelve y comprueba resultados.

a) $2x^2 = 8x$

b) $x^2 + 4x = 28$

>>> Para saber más

Sobre ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, consulta:
http://www.emathematics.net/es
Ruta: 3º E.S.O. → Ecuación de segundo grado → problemas
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].

111

Respuesta.

b) La ecuación sería $x^2 - 5x = 14$. Entonces:

$x^2 - 5x - 14 = 14 - 14$

$(x - 7)(x + 2) = 0$

$x_1 = 7$

$x_2 = -2$

Respuestas.

a) $3x^2 - 15x = 0$

$3x(x - 5) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 5$

b) $x^2 + 4x = 7x$

$x^2 + 4x - 7x = 7x - 7x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 3$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x - 3)(x - 3) = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = 3$

d) $x^2 - 3x = 10$

$x^2 - 3x - 10 = 10 - 10$

$(x - 5)(x + 2) = 0$

$x_1 = 5$

$x_2 = -2$

Propósito de la actividad. En esta tabla se pretende que los alumnos, a partir de las soluciones de la ecuación, escriban dicha ecuación en su forma general o factorizada.

Sugerencia didáctica. Si les resulta difícil, analicen el primero y el tercer renglón que son los que están completos. Haga énfasis en cosas como: para que la ecuación sea igual a cero, al menos uno de los factores debe ser cero; así podrán ir detectando los elementos que permiten completar la tabla. Luego resuelvan juntos uno o dos renglones en el pizarrón.

Propósito de la actividad. Ahora los alumnos partirán de conocer una ecuación para la cual deberán escribir un problema. Estas actividades son importantes para fortalecer la traducción entre el lenguaje común y el álgebra.

Sugerencia didáctica. Pida a algunos alumnos que lean uno de los problemas que escribieron, y al resto del grupo que digan de cuál ecuación se trata y si está correctamente planteado.

Posibles respuestas. Los problemas podrían ser como los siguientes:

a) El doble del cuadrado de un número es igual a ocho veces dicho número.

b) El cuadrado de un número más cuatro veces el mismo número es igual a 28.

Propósito de la sesión. Identificar las dos condiciones que se requieren para asegurar que dos polígonos son semejantes.

Materiales. Hojas blancas, tijeras e instrumentos geométricos (regla, compás, escuadras y transportador).

Propósito de la actividad. Que los alumnos recuerden que, cuando dos figuras están a escala, las medidas de los lados de una de las figuras son proporcionales a las medidas de los lados de la otra.

Sugerencia didáctica. Es posible que algunos alumnos respondan que son los dibujos que no tienen la misma forma o los que están más alargados. Pídales que midan los lados de las figuras y pregúnteles si encuentran alguna relación entre las medidas de los dibujos que sí están a escala.

Respuesta. Los dibujos que no están a escala con respecto al primero son el segundo y el tercero.

Propósito del programa. Se muestran ejemplos de figuras semejantes y se destacan algunas características que permitan después deducir cuáles son las condiciones que deben tener dos polígonos para que sean semejantes.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

SECUENCIA 10

Figuras semejantes

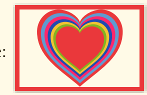
En esta secuencia aprenderás cuáles son las condiciones que deben tener dos figuras para que se diga que son semejantes.

SESIÓN 1

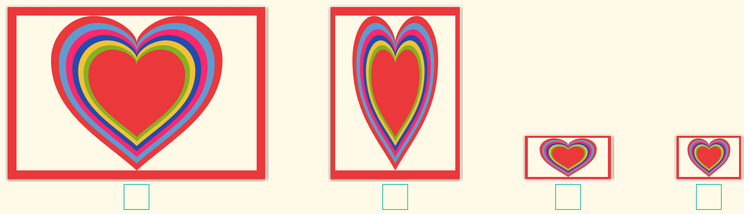
UN CORAZÓN MUY ESPECIAL

>>> Para empezar

Marca con ✗ los dibujos que no estén a escala respecto al siguiente:

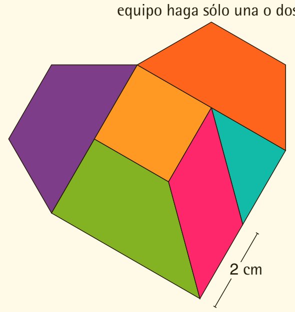


¿En qué te fijaste para elegir los dibujos que tachaste?



>>> Consideremos lo siguiente

Usen sus instrumentos geométricos para trazar en hojas blancas tamaño carta las piezas de este rompecabezas; tendrán que hacerlo a escala y de manera que la parte que mide 2 cm deberá medir 11 cm. Se deben repartir las piezas para que cada integrante del equipo haga sólo una o dos.



a) Cuando todos hayan terminado la o las piezas que le tocaron, armen con ellas el corazón.

b) Si el corazón no se puede armar, revisen cada una de las piezas y vean si realmente están hechas a escala respecto a las del dibujo del rompecabezas; si no, corrijan lo que sea necesario hasta que puedan armar el corazón.

Comenten con su grupo cómo trazaron el rompecabezas y las dificultades que tuvieron al hacerlo.

112

3

Sugerencia didáctica. Es importante que cada alumno haga sólo una o dos piezas y que, para hacerlo, no trace todo el corazón. De esta manera se busca que los alumnos tomen en cuenta las medidas de los lados y de los ángulos.

En la secuencia 7 de **Matemáticas II**, hicieron una actividad parecida; en esa ocasión, por la forma de las piezas, lo importante era que las medidas de los lados de una de los figuras fueran proporcionales a las medidas de los lados de la otra figura. En esta actividad, además, deben tener cuidado con la medida de los ángulos, aunque es probable que algunos alumnos no la consideren.

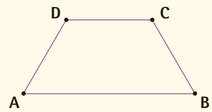
También es posible que algunos alumnos ni siquiera consideren que los lados deben ser proporcionales y utilicen una estrategia errónea: sumar 9 cm a cada una de las medidas.

Si observa que los alumnos tienen dificultades, no los corrija, tendrán oportunidad de validar sus procedimientos cuando traten de armar el corazón. Recupere algunos procedimientos, correctos e incorrectos, para el momento de la comparación grupal.

Sugerencia didáctica. Anime a algunos alumnos a que comenten qué procedimiento siguieron, aun cuando no hayan podido armar el corazón.

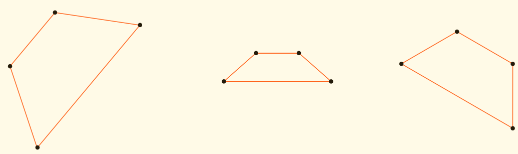
>>> Manos a la obra

I. La siguiente es una de las piezas del rompecabezas:



Con sus instrumentos geométricos tomen las medidas necesarias para realizar lo que se pide.

a) ¿Cuál de los siguientes trapecios está hecho a escala respecto al anterior? Identifiquen, en el trapecio a escala, los vértices correspondientes a **A**, **B**, **C**, **D** y anótenles **A'**, **B'**, **C'** y **D'** respectivamente.



b) ¿En qué se fijaron para elegir el trapecio hecho a escala? ____________________

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

c) Midan los segmentos y luego calculen las siguientes razones o cocientes:

$\frac{AB}{A'B'}$ = $\frac{BC}{B'C'}$ = $\frac{CD}{C'D'}$ = $\frac{DA}{D'A'}$ =

d) ¿Cómo son entre sí los cocientes: iguales o diferentes? ____________________

¿Qué significa esto? ____

e) Anoten la medida de los ángulos interiores:

$\measuredangle$**A** = ______ $\measuredangle$**B** = ______ $\measuredangle$**C** = ______ $\measuredangle$**D** = ______

$\measuredangle$**A'**= ______ $\measuredangle$**B'** = ______ $\measuredangle$**C'** = ______ $\measuredangle$**D'** = ______

Recuerden que:

En estas figuras, el lado AB es el correspondiente del lado A'B'; el lado BC es el correspondiente del lado B'C'; etcétera.

Consideren que, debido a la imprecisión de los instrumentos de medición, las medidas pueden variar ligeramente.

Si los lados que forman el ángulo A, son correspondientes a los lados que forman el ángulo A', entonces podemos decir que el ángulo A es el correspondiente del ángulo A'.

Propósito de la actividad. Que los alumnos concluyan que, cuando dos figuras son semejantes o están a escala, las medidas de los lados de una de las figuras son proporcionales a las medidas de los lados de la otra figura y los ángulos correspondientes son iguales.

Sugerencia didáctica. Verifique que los alumnos anoten correctamente las letras en los vértices correspondientes, aun cuando hayan identificado mal la figura semejante.

Posibles respuestas. Las respuestas serán distintas, de acuerdo al grado de apropiación del concepto de escala que tengan los alumnos. Una respuesta correcta es "que tengan la misma forma", aunque no se está argumentando por qué ocurre esto. También pueden considerar sólo la medida de los lados. La respuesta más elaborada es considerar que los lados son proporcionales y los ángulos son iguales, pero es probable que los alumnos todavía no la expliciten.

Respuesta. Si escogieron la tercera figura, la respuesta debe ser que todos los cocientes son iguales a 10/6 (1.666...) y los ángulos correspondientes son iguales entre sí (miden 60°, 60°, 120° y 120°, respectivamente). De otra manera serán distintos.

Posibles dificultades. Al estudiar la congruencia de figuras en **Matemáticas II**, los alumnos trabajaron la idea de correspondencia entre vértices, lados y ángulos. Si observa que tienen dificultades, revise con ellos la información del recuadro.

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Formas geométricas.
Subtema
Semejanza.
Antecedentes
Desde primaria y en los dos grados anteriores de secundaria, los alumnos han estudiado la proporcionalidad, la construcción de figuras a escala y la medida de los ángulos; ahora van a utilizar esos conocimientos para establecer las dos condiciones que se requieren para afirmar que dos polígonos son semejantes.

Propósitos de la secuencia
Construir figuras semejantes y comparar las medidas de sus ángulos y de sus lados.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Un corazón muy especial** Identificar las dos condiciones que se requieren para asegurar que dos polígonos son semejantes	Programa 17 Interactivo
2	**Aplicaciones de la semejanza** Resolver problemas que impliquen el uso de la semejanza de polígonos.	Programa 18 Interactivo

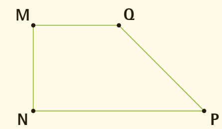
SECUENCIA 10

f) ¿Cuál es el ángulo correspondiente al ∡**B**? ___________ , ¿ de ∡**C**? _________ ¿y al ∡**D**? ______

Sugerencia didáctica. Pida a todo el grupo que comparen y comenten sus respuestas.

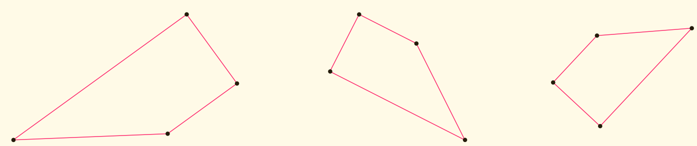
g) ¿Cómo son entre sí los ángulos correspondientes de ambas figuras? _________

II. Este trapecio es otra de las piezas del rompecabezas:



Con sus instrumentos geométricos tomen las medidas necesarias para realizar lo que se pide.

a) ¿Cuál de los siguientes trapecios está hecho a escala del anterior? Identifiquen, en el trapecio a escala, los vértices correspondientes a **M**, **N**, **P**, **Q** y anótenles **M'**, **N'**, **Q'** y **P'** respectivamente.



Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que anoten las razones o cocientes como se hizo en la actividad anterior.

Respuesta. La figura que está a escala es la primera. Los cocientes deben ser iguales a $\frac{10}{11}$ (0.9090...) y los ángulos miden 90°, 90°, 135° y 45°.

b) En la actividad **I** encontraron que los lados correspondientes de dos figuras a escala son proporcionales; verifiquen que el trapecio que eligieron cumple esta condición.

c) Midan los ángulos internos del trapecio **MNPQ** y verifiquen que son iguales a sus correspondientes ángulos internos en el trapecio **M'N'P'Q'**.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos por qué los otros dos trapecios no están a escala.

III. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Lean y comenten con ayuda de su profesor la siguiente información y resuelvan lo planteado en la actividad.

>>> A lo que llegamos

En matemáticas, cuando dos polígonos están hechos a escala se dice que son **polígonos semejantes**. Los polígonos semejantes cumplen con dos condiciones:

a) Las medidas de los lados de uno de los polígonos son proporcionales a las medidas de los lados del otro.

b) Sus ángulos correspondientes son iguales.

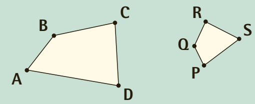
114

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que hagan en su cuaderno otro ejemplo que ilustre esta información.

Si lo considera conveniente, comente con los alumnos que la razón de semejanza del polígono menor con respecto al mayor es $\frac{1}{2}$.

Propósito del interactivo. Que los alumnos exploren la proporcionalidad de los lados y la igualdad de los ángulos correspondientes cuando los polígonos son semejantes.

Por ejemplo, el polígono **PQRS** es semejante al polígono **ABCD**:



a) Las medidas de los lados del polígono **ABCD** son proporcionales a las medidas de los lados del polígono **PQRS**.

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = 2$$

El número **2** es la **razón de semejanza** del polígono mayor con respecto al menor.

b) Los ángulos correspondientes son iguales:

$\measuredangle A = \measuredangle P \qquad \measuredangle B = \measuredangle Q \qquad \measuredangle C = \measuredangle R \qquad \measuredangle D = \measuredangle S$

IV. Verifiquen que las figuras que hicieron para el rompecabezas son semejantes a las del dibujo del apartado *Consideremos lo siguiente*, es decir, para cada una verifiquen que sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

a) ¿Cuál es la razón de semejanza del rompecabezas que trazaron con respecto al dibujo? ______

b) ¿Cuál es la razón de semejanza del dibujo con respecto al rompecabezas? ______

APLICACIONES DE LA SEMEJANZA

SESIÓN 2

>>> Lo que aprendimos

1. Cada uno del equipo recorte en cartulina un triángulo cuyos ángulos midan 30°, 40° y 110°; puede ser del tamaño que deseen.

a) ¿Son semejantes los triángulos que construyeron? ______

b) Argumenten su respuesta:

______

c) Midan los lados del triángulo que construyeron y los lados del triángulo que haya construido otro integrante del equipo; ¿cuál es la razón de semejanza entre estos dos triángulos? ______

2. Todos los rectángulos tienen sus ángulos iguales a 90°. ¿Basta esta condición para afirmar que todos los rectángulos son semejantes? ______

Argumenten su respuesta: ______

115

Sugerencia didáctica. En caso de que no hayan armado correctamente el rompecabezas, solicite a los alumnos que vuelvan a trazar las piezas; se espera que lo hagan asegurándose de las medidas de lados sean proporcionales y los ángulos iguales.

Posibles dificultades. Si los alumnos no identifican correctamente cuál es la razón de semejanza en cada caso $\left(\frac{11}{2} \text{ ó } \frac{2}{11}\right)$, comente con ellos que la razón de semejanza de una figura de mayor tamaño con respecto a una más pequeña, siempre es un número mayor que 1, ya que se obtiene al dividir la medida de los lados de la figura mayor entre la medida de los lados correspondientes de la figura menor. Y de una figura de menor tamaño con respecto a una mayor es un número menor que uno.

Respuestas.

a) $\frac{11}{2}$ (o también 5.5).

b) $\frac{2}{11}$ (o también 0.1818...).

Propósito de la sesión. Resolver problemas que impliquen el uso de la semejanza de polígonos.

Material. Cartulinas. Instrumentos geométricos.

Posibles respuestas. Las respuestas pueden ser muy variadas e ir desde "porque se parecen", "porque son triángulos", etc. hasta buscar argumentos más válidos desde el punto de vista geométrico; en este caso se espera que, como ya saben que los ángulos son iguales, traten de confirmar, al medir, que los lados sean proporcionales.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que anoten las razones o cocientes de los lados correspondientes. Usted puede recortar o trazar en el pizarrón un triángulo que sea congruente al de uno de los alumnos. Pregunte al grupo si esos dos triángulos son semejantes y, si lo son, cuál es la razón de semejanza entre ellos. La respuesta es que sí lo son y la razón de semejanza es igual a 1.

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que éste es un ejemplo de por qué se requiere que se cumplan las dos condiciones para que dos figuras son semejantes. Si sólo los ángulos son iguales, es posible que las medidas de los lados no sean proporcionales. Si tienen dificultades para identificarlo, sugiera a los alumnos que dibujen dos rectángulos distintos; por ejemplo, uno en el que la base mida el doble que la altura y otro en el que mida el triple, pregúnteles cómo argumentarían que no son semejantes.

Respuesta. No. Las medidas de los lados no siempre son proporcionales.

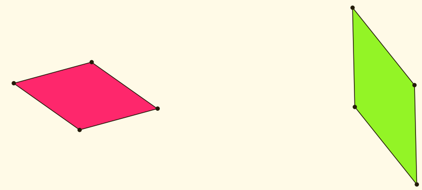
1

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que éste es un ejemplo en el que se muestra que las medidas de los lados son proporcionales, pero los ángulos no son iguales.

Posibles dificultades. A simple vista puede parecer que los rombos son semejantes; sin embargo no lo son, los lados son proporcionales pero los ángulos no son iguales.

Sugerencia didáctica. Usted puede sugerir a los alumnos que primero decidan si quieren que su figura sea mayor o menor a la original y que luego decidan la razón de semejanza. Pida a los alumnos que anoten, junto a la figura que tracen en su cuaderno, el argumento de por qué las dos figuras son semejantes. Con este ejercicio usted puede evaluar el manejo de los instrumentos geométricos para trazar la figura semejante y si han comprendido que se requiere de las dos condiciones para asegurar que dos figuras son semejantes.

3. Consideren los siguientes rombos:

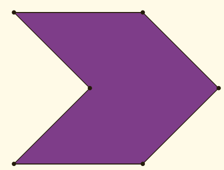


a) ¿Sus lados guardan la misma razón de semejanza? ____________________

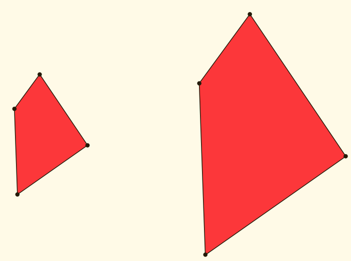
b) ¿Son semejantes los rombos? __________

c) Argumenten sus respuestas: ____

4. Tracen en su cuaderno un polígono semejante al siguiente:



5. ¿Cuál es la razón de semejanza del polígono menor con respecto al mayor? _______



Posibles procedimientos. Como se les pide la razón de semejanza, puede afirmarse que los polígonos son semejantes, por lo que basta medir un lado en el polígono menor y su correspondiente lado en el mayor para obtener la razón de semejanza. Algunos alumnos medirán todos los lados y los ángulos para asegurase de que son semejantes.

Posibles dificultades. La razón de semejanza debe ser un número menor que 1, ya que es la del polígono menor con respecto al mayor. Quizá algunos alumnos escriban la razón recíproca, la del mayor con respecto al menor, que es un número mayor que 1; para aclararlo pida a todos los alumnos que anoten los cocientes (debe ser la medida de los lados del polígono menor entre la medida de los lados correspondientes del polígono mayor).

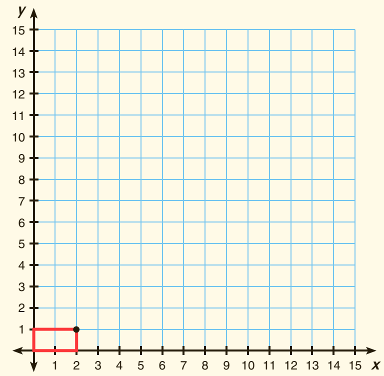
6. Tracen cinco rectángulos semejantes al rectángulo rojo, siempre con el lado más largo sobre el **eje *x*** y el más corto sobre el **eje *y***, y con uno de sus vértices en el origen.

a) Marquen en todos los rectángulos el vértice opuesto al origen, todos estos vértices deben estar alineados; si no es así corríjanlos.

b) Tracen la línea que pasa por todos los vértices que marcaron.

c) ¿Cuál es la ecuación de esa línea recta? ______________________

d) A partir del resultado anterior anoten una manera para determinar si dos rectángulos son o no son semejantes.



7. Completen la siguiente tabla; en el caso de las afirmaciones falsas, den un ejemplo para demostrar su falsedad.

Afirmación	¿Es falso o verdadero?	Ejemplo
Todos los triángulos isósceles son semejantes	F	
Todos los triángulos equiláteros son semejantes	V	
Todos los cuadrados son semejantes	V	
Todas las figuras que son congruentes también son semejantes	V	
Todas las figuras que son semejantes también son congruentes	F	

Comparen con otros equipos los resultados que obtuvieron en los ejercicios anteriores y la manera en que lo determinaron.

La semejanza de figuras geométricas tiene muchas aplicaciones, por ejemplo, las fotografías, los planos de una casa, los mapas, las maquetas, las sombras que produce el sol o alguna fuente de luz...

>>> Para saber más

Consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Hernández Garcíadiego, Carlos. "Figuras semejantes", "Dibujo a escala y figuras semejantes" en *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Propósito de la actividad. Trazar rectángulos semejantes con la ayuda de una cuadrícula y recordar cómo se obtiene la ecuación de una recta que pasa por el origen. Las ecuaciones de la línea recta las estudiaron en la secuencia 23 de **Matemáticas II**.

Posibles procedimientos. Para asegurarse de que los rectángulos sean semejantes, pueden ubicar el vértice opuesto al origen en los puntos (3,1.5), (4,2), (5,2.5), (6,3), (7,3.5), (8,4), etc. La ecuación de la recta que pasa por los vértices es $y = \frac{1}{2}x$. Si tienen dificultades para encontrar la ecuación, puede sugerirles que hagan una tabla en la que anoten los valores de ***x*** y de ***y***, para que puedan observar que el valor de ***y*** siempre es la mitad del de ***x***.

Se espera que identifiquen que, al colocar todos los rectángulos de manera que los lados correspondientes coincidan y un vértice también coincida, si los rectángulos son semejantes, una de las diagonales también coincide.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad. Si tuvieron dificultades revise con ellos el apartado *A lo que llegamos* de la sesión 1.

Sugerencia didáctica. Si lo considera conveniente, usted puede pedir a los alumnos que expliquen, en su cuaderno, por qué escogieron cada uno de sus ejemplos.

Posibles procedimientos.
En la primera afirmación falsa, por ejemplo, pueden dibujar dos triángulos isósceles con diferentes ángulos. En la segunda afirmación falsa pueden dibujar dos figuras semejantes que tengan distinto tamaño.

Para las afirmaciones verdaderas, los argumentos pueden ser: que los tres ángulos de cualquier triángulo equilátero miden 60° y los tres lados miden lo mismo; o también que cuando se tienen dos triángulos equiláteros, al dividir la medida de los lados de uno entre la medida de los lados del otro, el resultado es el mismo.

Para los cuadrados los argumentos son semejantes (todos los ángulos son rectos y los lados de cada uno son iguales).

En la tercera afirmación verdadera se puede argumentar que las figuras congruentes tienen sus ángulos correspondientes iguales y sus lados son proporcionales; la constante de proporcionalidad es 1. O bien, que al dividir la medida de los lados de una, entre la medida de los lados correspondientes, como son iguales, el resultado es siempre igual a 1 y los ángulos correspondientes son iguales.

Propósito del interactivo. Que los alumnos exploren y comprueben que, cuando los rectángulos son semejantes, al hacerlos coincidir en sus lados correspondientes y un vértice, una diagonal coincide.

Propósito del programa. Mostrar ejemplos y aplicaciones de la semejanza de las figuras geométricas en la arquitectura, diseño, medición de distancias.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Propósito de la sesión. Explorar ejemplos para identificar que es posible garantizar la semejanza de dos triángulos sin conocer la medida de todos sus lados ni la de todos sus ángulos.

Materiales. Instrumentos geométricos.

Propósito de la actividad. Identificar que, en el caso de otros polígonos, es necesario que se cumplan las dos condiciones para que las dos figuras sean semejantes.

En la secuencia anterior se estableció que estas dos condiciones son que las medidas de los lados de una de las figuras sean proporcionales a las medidas de los lados de la otra figura y que los ángulos correspondientes sean iguales.

Respuesta. En ambos casos las figuras no son semejantes. En el primer caso las medidas de los lados son proporcionales pero los ángulos correspondientes no son iguales. En el segundo caso los ángulos correspondientes son iguales pero las medidas de los lados no son proporcionales.

Propósito del programa. Mostrar mediante ejemplos con distintos tipos de triángulos las características para determinar cuándo dos o más triángulos son semejantes entre sí.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

SECUENCIA 11

Semejanza de triángulos

En esta secuencia aprenderás los criterios de semejanza de triángulos y aplicarás la semejanza de triángulos para calcular distancias inaccesibles.

SESIÓN 1

EXPLORANDO LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

>>> Para empezar

En la secuencia 10 aprendiste que para que dos polígonos sean semejantes deben reunir dos condiciones. Anótalas:

____

____

____

____

Mide los lados de las figuras.

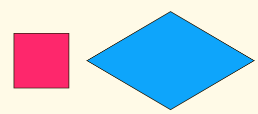


Figura A Figura B

¿Las medidas de los lados de la figura B son proporcionales a los de la figura A? ________ ¿Cómo lo sabes? ______________________________

¿Son semejantes estas dos figuras? ________ ¿Por qué? ________

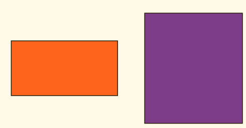


Figura C Figura D

¿Cuánto miden los ángulos de estos rectángulos? ____________

¿Son semejantes estos dos rectángulos? ______ ¿Por qué? ______

Habrás notado que cada pareja de figuras cumple sólo una de las condiciones que escribiste, pero no cumple la otra y, por eso, no son semejantes.

118

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Formas geométricas.
Subtema
Semejanza.
Antecedentes
En la secuencia anterior los alumnos estudiaron las condiciones que se requieren para que dos polígonos sean semejantes. En esta secuencia van a establecer los criterios con los que es posible garantizar la semejanza de dos triángulos, aunque no se conozca la medida de todos sus lados ni la de todos sus ángulos.

Propósitos de la secuencia
Enunciar los criterios de semejanza de triángulos y aplicar la semejanza de triángulos para resolver problemas.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Explorando la semejanza de triángulos** Explorar ejemplos para identificar que es posible garantizar la semejanza de dos triángulos sin conocer la medida de todos sus lados ni la de todos sus ángulos.	Programa 19
2	**Criterios de semejanza de triángulos I** Identificar dos de los criterios de semejanza de triángulos: cuando las medidas de los lados son proporcionales y cuando los ángulos correspondientes son iguales.	Aula de medios Idea de triángulos semejantes (Geometría dinámica)
3	**Criterios de semejanza de triángulos II** Identificar otro criterio de semejanza de triángulos: cuando las medidas de dos lados en uno de los triángulos son proporcionales a las medidas de dos lados en el otro triángulo y el ángulo entre ellos es igual.	
4	**Cálculo de distancias** Resolver problemas en los que se utilice los criterios de semejanza de triángulos.	Programa 20 Interactivo

>>> Consideremos lo siguiente

Discutan y marquen con una ✓ en cuáles de los siguientes casos se obtienen necesariamente dos triángulos que son semejantes.

- [ ] **Caso 1.** En un triángulo, uno de sus lados mide 6 cm y uno de sus ángulos 60°; en el otro triángulo, el lado y el ángulo correspondientes miden 3 cm y 60°, respectivamente.
- [ ] **Caso 2.** Los lados de un triángulo miden 4 cm, 6 cm y 7 cm; los lados del otro triángulo miden 8 cm, 12 cm y 14 cm, y no se sabe nada de las medidas de los ángulos.
- [ ] **Caso 3.** Los tres ángulos de los dos triángulos miden 30°, 60° y 90°, y no se sabe nada de las medidas de los lados.
- [ ] **Caso 4.** Dos lados de un triángulo miden 4 cm y 6 cm, y el ángulo comprendido entre ellos mide 77°. En el segundo triángulo los lados correspondientes miden 8 y 12 cm, y el ángulo entre ellos mide 77°.
- [ ] **Caso 5.** Dos lados de un triángulo miden 4 cm y 6 cm, y dos lados del otro triángulo miden 8 cm y 12 cm.
- [ ] **Caso 6.** Los dos triángulos tienen un ángulo igual a 60°.

Organícense al interior del equipo para trazar en sus cuadernos los triángulos con las condiciones indicadas en cada uno de los incisos anteriores y verifiquen sus respuestas. En caso de que estén equivocadas, corrijan lo que sea necesario.

Comparen sus respuestas y argumentos con sus compañeros de grupo e identifiquen los tres casos en que los triángulos son semejantes.

119

1

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos hagan conjeturas sobre la semejanza de los triángulos antes de trazarlos con sus instrumentos geométricos. Pídales que sólo hagan bosquejos o diagramas para determinar en cuáles casos los triángulos son semejantes.

Quizá algunos alumnos respondan que, en el caso 3, no es posible obtener triángulos semejantes porque no se sabe nada de los lados; no los corrija, al trazar los triángulos podrán validar sus hipótesis y conjeturas.

Respuesta. Los triángulos son semejantes en los casos 2, 3 y 4.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que tracen los triángulos con sus instrumentos geométricos.

En la secuencia 19 de **Matemáticas I**, aprendieron a trazar un triángulo si se conoce la medida de los lados. En la secuencia 4 de **Matemáticas II**, aprendieron a trazar un triángulo si se conoce la medida de los ángulos o de algunos lados y algunos ángulos.

Posibles dificultades. Para los casos 1, 5 y 6, los alumnos podrían trazar triángulos que sí sean semejantes. Pídales que, además, intenten trazarlos de manera que no lo sean.

3

Sugerencia didáctica. Si bien es cierto que la demostración rigurosa no constituye un propósito en el programa de estudio, no basta con que los alumnos digan sí o no en cada caso; es conveniente a que argumenten sus respuestas y utilicen las condiciones que estudiaron en la secuencia pasada.

Propósito de la sesión. Identificar dos de los criterios de semejanza de triángulos: cuando las medidas de los lados son proporcionales y cuando los ángulos correspondientes son iguales.

Propósito de la actividad. Recordar los tres criterios de congruencia de triángulos. Los criterios de congruencia de triángulos los estudiaron en la secuencia 25 de **Matemáticas II**.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Descubrir, a partir de los triángulos equiláteros, los triángulos semejantes.

Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 1.

Sugerencia didáctica. Si lo considera conveniente, indique a los alumnos que comparen estas condiciones con los seis casos que vieron en la sesión anterior; sin embargo pídales que, para dar un ejemplo o hacer un dibujo, no utilicen los mismos datos.

SESIÓN 2

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS I

>>> Para empezar

En **Matemáticas II** aprendiste tres criterios de congruencia de triángulos, anótalos.

____

____

____

____

En el caso de la semejanza, ¿existirán criterios de semejanza de triángulos?; si piensas que sí, da al menos un ejemplo.

>>> Consideremos lo siguiente

Anoten ✓ a los que crean que son criterios para establecer que dos triángulos son siempre semejantes. Recuerden que para ser un criterio la o las condiciones deben garantizar que los triángulos siempre son semejantes.

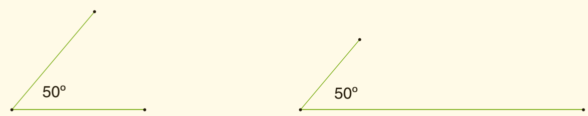
Dos triángulos son semejantes si:	¿Es un criterio de semejanza de triángulos?	Hagan un dibujo para ejemplificar su respuesta
Tienen igual uno de sus ángulos	No	
Sus lados correspondientes son proporcionales	Sí	
Sus ángulos correspondientes son iguales	Sí	
Dos lados correspondientes son proporcionales	No	

Comparen sus respuestas y argumentos con sus compañeros de grupo.

>>> Manos a la obra

En cada actividad pueden repartirse entre los miembros del equipo los trazos que se piden.

I. Se han empezado a trazar dos triángulos. El ángulo entre dos de sus lados mide 50º.



a) Terminen de trazar los triángulos.

b) ¿Son semejantes? ________

c) Argumenten su respuesta: ____________________________________
____
____

II. Tracen en su cuaderno dos triángulos cuyos lados midan:

- 4 cm, 6 cm y 8 cm, para el triángulo A
- 2 cm, 3 cm y 4 cm, para el triángulo B

a) ¿Los lados del triángulo A son proporcionales a los del triángulo B? ________

Argumenten su respuesta: ____________________________________
____
____

b) Midan los ángulos de los dos triángulos. ¿Qué notan? ________________

c) ¿Son semejantes los dos triángulos? ________

Argumenten su respuesta: ____________________________________
____
____

d) Construyan un triángulo cuyos lados sean proporcionales a los de los triángulos A y B. Midan sus lados. ¿Podrán construir un triángulo cuyos lados sean proporcionales a los lados de los triángulos A y B, y cuyos ángulos sean diferentes a los de estos triángulos?

____

Propósito de las actividades. Los alumnos trabajarán con ejemplos de cada una de las condiciones que se presentaron en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

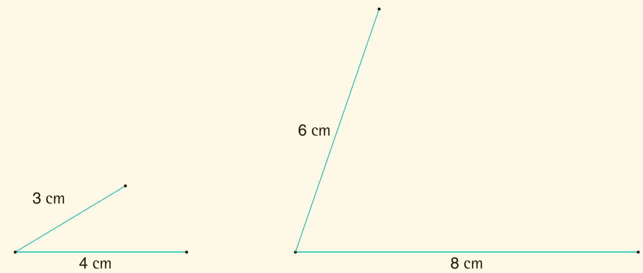
Al trazar los triángulos es probable que los alumnos puedan determinar, a simple vista, si son o no semejantes, pero lo más importante es el argumento que utilicen para justificarlo.

Respuesta. Los triángulos no son semejantes porque las medidas de los lados no son proporcionales.

Propósito de la actividad. Presentar un ejemplo en el que se sabe que las medidas de los lados son proporcionales. Cuando se trazan los triángulos, los ángulos correspondientes son iguales.

Sugerencia didáctica. Verifique que, en el triángulo que construyan, las medidas de sus lados sí sean proporcionales a las medidas de los lados de los triángulos **A** y **B**. Es importante que identifiquen que no es posible construir un triángulo cuyos ángulos sean diferentes.

III. En cada caso se tienen dos lados de un triángulo que no se ha terminado de trazar:



a) ¿Las dos medidas que se dan de un triángulo son proporcionales a las del otro?

____

Respuesta. Las medidas de los lados que están trazados son proporcionales, pero los lados que faltan no tienen esa relación de proporcionalidad. Además, los ángulos no son iguales.

b) Terminen de trazar los triángulos. ¿Son semejantes? _____________ Argumenten su respuesta: ____

Propósito de la actividad. Presentar un ejemplo en el que se sabe que los ángulos correspondientes son iguales. Cuando se trazan los triángulos, los lados son proporcionales.

IV. Tracen en su cuaderno dos triángulos A y B, de diferente tamaño pero cuyos ángulos midan 30°, 60° y 90°.

a) Midan sus lados, ¿son proporcionales los lados correspondientes? _____________

Argumenten su respuesta: ____

____

____

b) ¿Son semejantes los dos triángulos? _____________

¿Cómo lo saben? ____

____

____

c) Construyan un triángulo C, cuyos ángulos midan 30°, 60° y 90°. Midan los lados, ¿son proporcionales a los de los triángulos A y B?

d) ¿Podrán construir un triángulo cuyos ángulos midan 30°, 60° y 90°, y cuyos lados no sean proporcionales a los de los triángulos A y B? _____________

3

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos la importancia de dar argumentos basados en los conocimientos matemáticos que ya tienen. En este caso son las condiciones de semejanza que estudiaron en la secuencia anterior.

Comparen sus respuestas y argumentos con sus compañeros de grupo.

122

>>> A lo que llegamos

En la secuencia 10 aprendieron que para que dos polígonos sean semejantes deben tener:

- Los lados correspondientes proporcionales.
- Los ángulos correspondientes iguales.

En el caso de los triángulos, los **criterios de semejanza** permiten fijarnos en **menos datos** para estar seguros de que los triángulos son semejantes.

Basta que se cumpla **sólo una** de las siguientes condiciones:

Sus lados correspondientes son proporcionales,

o bien:

Sus ángulos correspondientes son iguales.

1 **Sugerencia didáctica.** Pida a los alumnos que revisen sus respuestas en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS II

SESIÓN 3

Propósito de la sesión. Identificar otro criterio de semejanza de triángulos: cuando las medidas de dos lados en uno de los triángulos son proporcionales a las medidas de dos lados en el otro triángulo y el ángulo entre ellos es igual.

>>> Consideremos lo siguiente

Anoten ✓ al que crean que es otro criterio para establecer que dos triángulos son semejantes y argumenten su respuesta. Recuerden que para ser un criterio válido las condiciones deben garantizar que los triángulos son semejantes.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que, para dar un ejemplo o hacer un dibujo, no utilicen los mismos datos de la sesión 1.

Dos triángulos son semejantes si:	¿Es un criterio de semejanza de triángulos?	Argumenten sus respuestas. Pueden hacer dibujos si lo consideran necesario o dar un ejemplo cuando crean que no es criterio.
Tienen igual uno de sus ángulos y uno de sus lados.	No	
Tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados que son proporcionales a sus correspondientes en el otro triángulo.	Sí	

Comparen sus respuestas y argumentos con sus compañeros de grupo.

Propósito de la actividad. Identificar que, si se sabe que dos triángulos tienen un lado y un ángulo igual, no se puede garantizar que sean semejantes.

>>> Manos a la obra

Cada uno haga lo siguiente en su libro sin ver lo que hace su compañero:

I. Consideren que el segmento abajo trazado es uno de los lados de un triángulo. Terminen de trazar el triángulo de tal manera que contenga un par de lados que formen un ángulo de 120°.

Cuando hayan terminado comparen los triángulos trazados por todos.

a) ¿Son semejantes? __________

b) Argumenten su respuesta: __________

c) Dos triángulos tienen un lado igual y un ángulo igual, ¿creen que necesariamente son semejantes? ______ ; ¿cómo lo saben? __________

Respuesta. No se puede garantizar que los triángulos sean semejantes, ya que, con esos datos, siempre se puede encontrar dos triángulos que no sean semejantes.

Propósito de la actividad. Presentar un ejemplo en el que se sabe que dos lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales y el ángulo entre ellos es igual. Entonces los triángulos son semejantes.

II. Tracen en su cuaderno tres triángulos con las medidas indicadas:

- Un lado de 4 cm, otro de 6 cm y el ángulo comprendido entre ellos de 60°.
- Un lado de 8 cm, otro de 12 cm y el ángulo comprendido entre ellos de 60°.

a) Midan el tercer lado en cada triángulo. ¿Los lados de uno de los triángulos son proporcionales a los lados del otro triángulo? __________

Argumenten su respuesta: __________

b) Midan los ángulos de los dos triángulos. ¿Qué notan? __________

c) ¿Son semejantes los dos triángulos? __________

Argumenten su respuesta: __________

d) Construyan un triángulo con un ángulo de 60° comprendido entre dos lados que sean proporcionales a 4 cm y 6 cm, ¿el triángulo construido es semejante a los anteriores?; ¿podrán construir un triángulo con estas condiciones (un ángulo igual comprendido entre dos lados que sean proporcionales a sus correspondientes en el otro triángulo) que no sea semejante a los anteriores?

>>> A lo que llegamos

Otro criterio de semejanza de triángulos es el siguiente:

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados que son proporcionales a sus correspondientes en el otro triángulo.

Observen que, nuevamente, tampoco es necesario conocer todos los datos del triángulo para afirmar que son semejantes.

En el recuadro se enunció el tercer criterio de semejanza de triángulos que, junto con los dos que estudiaron en la sesión 2, son los tres criterios de semejanza de triángulos. Hagan un resumen en su cuaderno de los tres criterios e ilústrenlo con triángulos semejantes que cumplan las condiciones dadas en cada uno.

CÁLCULO DE DISTANCIAS

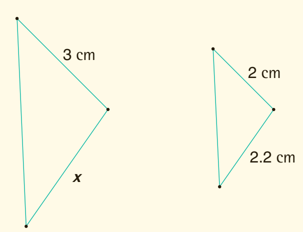
SESIÓN 4

>>> Lo que aprendimos

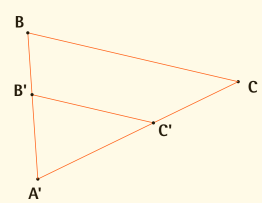
Una de las aplicaciones más útiles de la semejanza de triángulos es la de medir distancias inaccesibles a la medición directa.

Resuelvan los siguientes problemas.

1. Los triángulos son semejantes, ¿cuánto vale x? ______



2. En la siguiente figura, si el segmento **B'C'** es paralelo al segmento **BC**, entonces los triángulos **ABC** y **AB'C'** son semejantes. ¿Cuál criterio de semejanza garantiza esto? ______



Pista:
Recuerden las relaciones entre los ángulos entre paralelas

125

1 **Sugerencia didáctica.** Pida a los alumnos que revisen sus respuestas en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

2 **Sugerencia didáctica.** Es necesario que lleven a cabo esta última actividad: es la recapitulación de lo que estudiaron en las sesiones 2 y 3, y constituye un repaso de los tres criterios de semejanza. Verifique que cada caso lo ilustren con triángulos semejantes y que sólo anoten las medidas que enuncia el criterio. Si lo considera conveniente, puede pedirles que lo hagan de tarea.

Propósito de la sesión. Resolver problemas en los que se utilice los criterios de semejanza de triángulos.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que resuelvan primero todos los problemas excepto el 6, ya que esa actividad requiere que los alumnos salgan al patio o que lo hagan al aire libre. Es posible que no dé tiempo de realizarla el mismo día; procure que la realicen antes de iniciar la secuencia 12, ya que es una buena oportunidad para que los alumnos pongan en práctica lo que aprendieron en la secuencia.

Propósito del interactivo. Presentar problemas que se resuelvan utilizando la semejanza de triángulos.

Propósito del programa. Mostrar la aplicación y construcción de métodos que permitan obtener distancias que no se puedan medir directamente utilizando triángulos semejantes.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de su respuesta a esta actividad. Si tuvieron dificultades revise con ellos el apartado *A lo que llegamos* de la sesión 2.

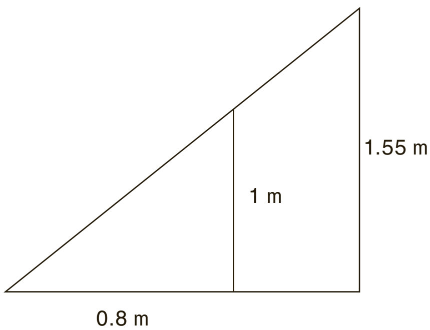
Respuesta. Como los triángulos son semejantes, los lados correspondientes son proporcionales. El lado x mide 3.3 cm.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de su respuesta a esta actividad. Si tuvieron dificultades revise con ellos los apartados *A lo que llegamos* de las sesiones 2 y 3 o revise las relaciones entre los ángulos que se forman cuando dos paralelas son cortadas por una transversal.

Respuesta. Los ángulos correspondientes entre dos paralelas cortadas por una transversal son iguales. En este caso las rectas paralelas son las que pasan por los lados **BC** y **B'C'**. Las transversales son las que pasan por los otros dos lados de los triángulos. ∡**A** es común en los dos triángulos. Entonces los triángulos tienen sus tres ángulos iguales y, por lo tanto, son semejantes.

Respuesta. Por el problema anterior, los triángulos son semejantes. Entonces los lados correspondientes son proporcionales, x vale 7.28 cm.

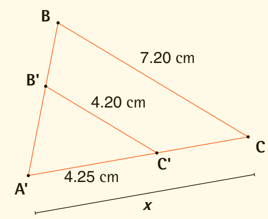
Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que tracen los triángulos que ilustran esta situación. Pregúnteles si esos triángulos son semejantes (sí son semejantes porque los dos triángulos tienen un ángulo recto, comparten un ángulo y el tercer ángulo es igual porque son ángulos correspondientes entre dos paralelas o también por la suma de los ángulos interiores de un triángulo).



Respuesta. La sombra de la abuelita mide 1.24 m.

3. En la siguiente figura, el segmento **B´C´** es paralelo al segmento **BC**, ¿cuánto vale x?

____



4. Una abuelita que mide 1.55 m lleva un bastón de 1 m. Si el bastón proyecta una sombra de 0.80 m, ¿cuánto mide la sombra de la abuelita? _______________

5. Juan está junto al asta bandera de su escuela, mide las sombras y se da cuenta de que la sombra del asta es $\frac{7}{2}$ la de él. Si él mide 1.60 m, ¿cuál es la altura del asta?

____

6. Hagan lo siguiente:
   a) Consigan una vara (palo, bastón, etc.); midan su longitud.
   b) En algún momento que haya sol, salgan al patio, pongan la vara perpendicular al piso y midan la sombra que proyecta.
   c) Elijan un objeto alto cuya altura deseen calcular: un árbol, el asta bandera, el alto de la canasta de basquetbol, etcétera.
   d) Midan la sombra que proyecta ese objeto.
   e) Con esos datos calculen la altura del objeto.

126

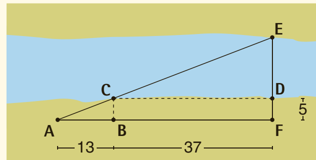
Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que tracen los triángulos que ilustran esta situación. Pregúnteles cómo pueden saber que esos triángulos son semejantes. Si tienen dificultades puede sugerirles que escriban los cocientes para establecer la razón de semejanza entre los lados correspondientes. En este caso ya conocen la razón de semejanza.

Respuesta. En este problema no se da la medida de la sombra, de Juan o del asta; pero se sabe la razón de semejanza entre la sombras $\left(\frac{7}{2}\right)$; esta misma relación es la que guardan las estaturas. Por lo tanto, la altura del asta será $\frac{7}{2}$ de 1.60, es decir 5.6 m.

4

Sugerencia didáctica. Esta actividad es una aplicación práctica de los dos problemas anteriores. Los alumnos van a utilizar la semejanza de triángulos para calcular la altura de algún objeto sin medirla directamente. Pregúnteles por qué creen que se forman triángulos semejantes; además puede pedirles que hagan un dibujo en su cuaderno en el que representen los objetos, las sombras y los triángulos.

7. Consideren el siguiente dibujo en el que los segmentos **EF** y **CB** son perpendiculares a la orilla del río y el segmento **CD** es paralelo al segmento **BF**.



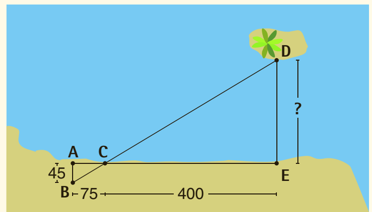
a) ¿Son semejantes los triángulos **ABC** y **CDE**? ________

Argumenten su respuesta: ____________________

____

b) ¿Cuánto mide de ancho el río? ________

8. En la siguiente figura consideren que $\overline{AB} \perp \overline{AE}$ y $\overline{DE} \perp \overline{AE}$. ¿A qué distancia se encuentra la isla de la orilla? ____________________



9. Se tienen dos triángulos **ABC** y **HKM** y se sabe que $\measuredangle$**A** = $\measuredangle$**H** y que $\measuredangle$**B** = $\measuredangle$**K**.

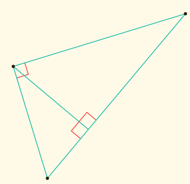
a) ¿El tercer ángulo también es igual? ____________________

b) ¿Cómo lo saben? ____________________

c) ¿Los dos triángulos son semejantes? ____________________

d) ¿Cómo lo saben? ____________________

10. Se traza la altura correspondiente al lado mayor de un triángulo rectángulo: observen que se forman dos triángulos dentro del triángulo original.



a) ¿Son semejantes los dos triángulos que se forman? ________

Argumenten su respuesta: ____________________

b) Alguno de estos triángulos, ¿es semejante al triángulo original? ________

Argumenten su respuesta: ____________________

>>> Para saber más

Sobre la semejanza de triángulos, consulten:
http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Semejanza_aplicaciones/triangulos_semejantes.htm
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Propósito de la pregunta. Que los alumnos identifiquen que los triángulos son semejantes debido a que sus ángulos correspondientes son iguales.

Respuesta. El ancho del río es de 19.23 m.

Respuesta. A 240 m.

Respuesta. La suma $\measuredangle$**A** + $\measuredangle$**B** es igual a $\measuredangle$**H** + $\measuredangle$**K**. Además $\measuredangle$**A** + $\measuredangle$**B** + $\measuredangle$**C** = $\measuredangle$**H** + $\measuredangle$**K** + $\measuredangle$**M** = 180° (por la suma de los ángulos interiores de un triángulo). Entonces los ángulos $\measuredangle$**C** y $\measuredangle$**M** son iguales, por lo que los triángulos son semejantes ya que tienen los ángulos correspondientes iguales.

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que uno de los criterios de semejanza enuncia que dos triángulos son semejantes si tienen iguales sus tres ángulos. Este criterio puede reducirse aún más, basta con saber que dos triángulos tienen dos ángulos iguales para garantizar que son semejantes.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que determinen la medida de los ángulos de los tres triángulos. Pueden hacerlo al medir los ángulos de cada uno de ellos, o también al medir los ángulos del triángulo mayor y luego determinar los de los otros dos (conocen que cada uno tiene un ángulo recto) y por la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Respuesta. Los tres triángulos son semejantes.

SECUENCIA 12

Índices

En esta secuencia aprenderás a interpretar y utilizar índices para explicar el comportamiento de diversas situaciones.

SESIÓN 1

EL ÍNDICE NACIONAL DE PRECIOS AL CONSUMIDOR

>>> Para empezar

¿Cómo han variado los precios de los alimentos, la ropa, los zapatos y el transporte, durante el año? Con frecuencia esta información la encontramos en la sección financiera de los periódicos y en los noticieros. La presentan generalmente mediante porcentajes, a los que se les llama índices de precios.

>>> Consideremos lo siguiente

Para contestar las preguntas y completar la tabla de los incisos, lean el siguiente artículo publicado el 23 de febrero de 2007 en un periódico de circulación nacional, con los datos del aumento del precio de la tortilla y su repercusión en el Índice Nacional de Precios al Consumidor en la primera quincena de ese mes.

El aumento del precio de la tortilla sigue afectando la inflación: Banco de México

ROBERTO GONZÁLEZ AMADOR

El alza en el precio de alimentos y de algunos bienes ofrecidos por el sector público dispararon la inflación en la primera quincena de febrero, reportó este jueves el Banco de México (BdeM). Aunque ha perdido relevancia en la discusión pública durante los últimos días, la variación en el costo de la tortilla sigue afectando el comportamiento inflacionario, según el organismo.

El Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), indicador que mide la inflación, repuntó en la primera quincena de este mes 0.14 por ciento, el doble del nivel registrado en el mismo periodo de 2006. Según el reporte, el precio de la tortilla ha mostrado un comportamiento del todo inestable en los últimos días. En la quincena reportada, la inflación promedio de la tortilla fue de 16.1 por ciento, una variación anual que fue superior en 114 veces a la reportada por el INPC.

El promedio general es sólo una muestra de lo ocurrido en diferentes regiones del país. El banco central reportó que en la primera quincena de febrero la variación del precio de la tortilla de maíz en Torreón, Coahuila, fue de 29.84 por ciento, 13.7 puntos arriba del promedio nacional. La segunda variación más alta ocurrió en Cuernavaca, Morelos, con 28.35 por ciento; y la tercera en Jacona, Michoacán, con 26.15.

En cambio, en varias localidades la variación de precio en la quincena fue inferior al promedio nacional. Fue el caso de Tepic, Nayarit, con un incremento en el periodo de 2.4 por ciento; Ciudad Jiménez, Chihuahua, con 3.22 por ciento; y Tijuana, Baja California, con 3.35 por ciento.

Además de la medición del INPC, el banco central hace otros ejercicios para determinar el comportamiento de los precios. Es el caso del ''índice subyacente", que se obtiene eliminando del cálculo del INPC los bienes y servicios cuyos precios son más volátiles, lo que permite una aproximación a las tendencias de mediano plazo de la inflación.

En la primera quincena de este mes el ''índice subyacente" se incrementó 0.23 por ciento, arriba del 0.21 por ciento en el mismo periodo de 2006. Mientras, el ''índice no subyacente", donde se incorporan los precios más volátiles, disminuyó en la quincena 0.03 por ciento, cuando

128

Propósito de la sesión. Conocer e interpretar los índices y su uso. Un índice es un número que se utiliza para compararlo con otros valores del mismo índice que se hayan obtenido en distintos momentos, lugares o circunstancias. Un índice en ocasiones se expresa como un porcentaje.

En esta sesión se trabaja con el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC) por su importancia en la economía. El Banco de México publica y calcula el INPC desde 1969, el se utiliza como el indicador oficial de la inflación. Este índice se calcula quincenalmente a partir de la variación del precio de 315 bienes y servicios seleccionados para que representen el consumo de las familias urbanas del país. La inflación se establece como el porcentaje de variación del INPC en un periodo de tiempo, es decir, la inflación representa la variación en el gasto promedio de una familia.

Propósito del programa. Mostrar y ejemplificar la utilización de índices en diversas situaciones.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

2

Sugerencia didáctica. Ayude a los alumnos en caso de que no entiendan correctamente alguna parte del artículo. Si tienen un diccionario en el salón, coménteles que lo utilicen para buscar el significado de las palabras que desconozcan. En particular, es importante que conozcan y entiendan lo que es la inflación.

Eje
Manejo de la información.
Tema
Análisis de la información.
Subtema
Porcentajes.
Antecedentes
En la secuencia 21 de **Matemáticas I**, los alumnos utilizaron los porcentajes para resolver algunos problemas. En la secuencia 28 de **Matemáticas II**, los alumnos aprendieron a interpretar y utilizar gráficas de línea que representan distintas características de un fenómeno o situación. En esta secuencia aprenderán a interpretar y utilizar índices. Un índice es un número que se utiliza para estudiar y valorar las variaciones que tiene una situación en distintos momentos. En ocasiones un índice se indica como un porcentaje.

Propósitos de la secuencia
Interpretar y utilizar índices para explicar el comportamiento de diversas situaciones.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**El Índice Nacional de Precios al Consumidor** Conocer e interpretar los índices y su uso.	Programa 21
2	**Índices en la escuela** Identificar y construir índices simples.	
3	**¿Quién es el pelotero más valioso?** Calcular y utilizar diferentes índices que sirven para analizar algunos aspectos del juego de beisbol.	Programa 22
4	**Más sobre índices** Utilizar índices para analizar e interpretar distintas situaciones.	Interactivo

en el periodo comparable del año anterior lo había hecho 0.22 por ciento.

Esta menor disminución fue lo que explicó la mayor parte del repunte de la inflación general. Particularmente obedeció a menores reducciones que las observadas en 2006 en algunos precios administrados (que provee el sector público) y frutas y verduras.

Fuente: Roberto González Amador. "El aumento del precio de la tortilla sigue afectando la inflación: Banco de México", *La Jornada*, 23 de febrero de 2007, [recuperado el 2 de abril de 2008 de http://www.jornada.unam.mx/2007/02/23/index.php?section=economia&article=022n2eco].

a) De acuerdo con el artículo anterior, ¿qué es lo que mide el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC)? ______

b) ¿Cuál fue el valor del repunte del INPC durante la primera quincena de febrero 2007? ______

c) ¿Y cuál fue el valor del repunte del INPC en ese mismo periodo pero en el año 2006? ______

d) Completen la siguiente tabla con la información de la variación del precio de la tortilla que aparece en el artículo.

	Variación del precio de la tortilla durante la primera quincena de febrero de 2007 (en porcentaje)
Torreón, Coahuila	29.84
Cuernavaca, Morelos	28.35
Jacona, Michoacán	26.15
Tepic, Nayarit	2.4
Ciudad Jiménez, Chihuahua	3.22
Tijuana, Baja California	3.35

e) Supongan que el precio promedio del kilogramo de tortilla, durante la primera quincena de febrero, fue de $8.50, ¿cuánto costó el precio del kilogramo de tortilla en Torreón en ese mismo periodo? ______

f) ¿Cuáles son los diferentes índices a que hace referencia el artículo? ______

g) Anoten una ✓ en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa:

El INPC puede utilizarse para mostrar la variación en el precio de algunos productos como el de la tortilla.	(V) ✓	(F)
El aumento de la inflación durante la primera quincena de febrero de 2007 fue del doble con respecto a febrero de 2006.	(V) ✓	(F)
La principal causa del aumento en el valor de la inflación en ese periodo se atribuye a la variación en el precio de la tortilla.	(V)	(F) ✓

129

Respuestas.

a) Mide la inflación.

b) 0.14%.

c) 0.07% (la mitad de 0.14%).

Posibles errores. Algunos alumnos responderán que el precio en Torreón en la primera quincena de febrero es de $9.66. Este precio se obtuvo al aumentar 13.7% a $8.50 (ya que la variación en Torreón fue de 13.7 puntos arriba del promedio nacional). Sin embargo, este procedimiento es incorrecto. Lo que tienen que hacer es tomar como referencia que el precio de $8.50 representa el 116.1% del precio base, el anterior a la primera quincena de febrero. Entonces deben calcular el precio en Torreón que representa el 129.84% del precio base (se divide 8.50 entre 116.1 y el resultado se multiplica por 129.84).

Respuestas.

e) $9.50

f) INPC, índice subyacente e índice no subyacente.

3

Posibles dificultades. Aunque el artículo señala que el aumento en el precio de la tortilla afectó a la inflación, al final se indica que el repunte inflacionario tiene su mayor causa en la menor disminución de los precios más volátiles. Para identificarlo puede pedir a los alumnos que analicen la información del primero y los dos últimos párrafos del artículo.

Sugerencia didáctica. Revise con todo el grupo sus respuestas a los incisos.

2

Propósito de la actividad. Identificar que un índice es un número que representa diversos aspectos de una situación (en este caso, diversos precios de artículos básicos) que se miden de diferentes maneras: el índice permite conjuntarlos y analizar sus variaciones.

Sugerencia didáctica. Comente que los índices pueden obtenerse de varias maneras y por diferentes entidades. En este caso se señalan otras dos instituciones oficiales que miden la variación de los precios.

>>> Manos a la obra

I. A continuación se presenta otra noticia relacionada con el INPC que apareció el 20 de septiembre de 2007; léanla y respondan las siguientes preguntas.

Antes de que entre en vigor el impuesto a la gasolina ya aumentaron alimentos, luz y otros

En 9 meses el actual gobierno encareció 34.17% los básicos

Significa 7.5 veces el aumento a los salarios

Desde diciembre la gasolina subió 3.5%

ROBERTO GONZÁLEZ AMADOR

En apenas nueve meses y medio de la actual administración federal, el precio promedio de los productos que integran la canasta básica de consumo registró un incremento de 34.17 por ciento, 7.5 veces el aumento a los salarios concedido a los trabajadores en enero de 2007, según reportes oficiales.

Se trata de un alza de precios que comenzó con la tortilla al comienzo del año, continuó esta semana con el alza al pan blanco, y que tenderá a mantenerse en cuanto comience el ajuste al costo final de la gasolina, que ya fue autorizado en el Congreso y cobrará vigencia en cuanto sea publicado por el Ejecutivo en el *Diario Oficial de la Federación*.

Desde diciembre de 2006, el precio de los 43 productos que integran la canasta básica de consumo (INPC) ha subido en proporciones que superan con creces al repunte de la inflación general, que oficialmente es de 4.2 por ciento anual, con excepción del de la cebolla, que ha disminuido.

Esto ha ocurrido en un entorno en que el costo de la gasolina se ha elevado, de diciembre de 2006 a la fecha, en un promedio de 3.5 por ciento para ambos tipos de combustibles que ofrece Petróleos Mexicanos: Magna y Premium, según datos de la propia empresa.

Organizaciones de consumidores y representantes de la oposición política al gobierno denunciaron en la última semana que el incremento al precio de la gasolina desataría una escalada de precios, como tradicionalmente ocurre en el país cuando se mueve la cotización del energético.

La legislación aprobada la semana pasada en la Cámara de Diputados por los partidos Acción Nacional y Revolucionario Institucional establece que, en cuanto entre en vigor el nuevo impuesto, el precio se elevará dos centavos por mes durante un año y medio. Es decir, 36 centavos desde el valor actual. El Banco de México estimó que la aplicación gradual del impuesto al consumo de gasolina tendrá un impacto mínimo en el Indice Nacional de Precios al Consumidor, indicador que mide el comportamiento de la inflación.

Aun antes de que el efecto del nuevo precio de la gasolina se comience a expresar en la lista de precios de los productos de mayor consumo, las variaciones ocurridas en los últimos meses ya han superado con creces el aumento otorgado a los salarios.

En enero, el salario mínimo general tuvo un incremento de 4.1 por ciento. A mediados de este año, según el Banco de México, el incremento promedio en los salarios contractuales era de 4.26 por ciento y de 4.75 por ciento en el caso del aumento de los emolumentos en el sector manufacturero.

El incremento en las percepciones representa una fracción del alza registrada en el precio de los bienes de consumo básico, aun antes de que se comience a registrar el impacto de las gasolinas. Aunque los promotores del nuevo impuesto aseguran que no debe tener un impacto inflacionario, en comercios han comenzado a observarse algunas variaciones.

Desde diciembre de 2006 y hasta el 15 de septiembre pasado, el precio promedio de la canasta básica se elevó en 34.17 por ciento, mientras el costo promedio de los alimentos considerados en ese universo repuntó 36.01 por ciento, estableció una medición de la Procuraduría Federal del Consumidor y de la Secretaría de Economía.

Algunos ejemplos son: en diciembre de 2006 el precio de un kilogramo de harina de trigo era de 5.25 pesos, que creció la semana pasada a 10.50 pesos, un alza de 100 por ciento; el pan de caja en presentación de 680 gramos elevó su costo, en el mismo periodo, de 13.90 a 19.7 pesos, esto es, 41.6 por ciento. Ambos movimientos son consistentes con el alza en el precio internacional del trigo.

Fuente: Roberto González Amador. "En 9 meses el actual gobierno encareció 34.17% los básicos", *La Jornada*, 20 de septiembre de 2007, [recuperado el 2 de abril de 2008 de http://www.jornada.unam.mx/2007/09/20/index.php?section=economia&article=033n1eco].

a) Según la noticia del periódico, ¿cuántos son los productos que se consideran parte de la canasta básica? ______

b) De diciembre de 2006 a la fecha en que se publica el artículo, ¿cuál es el repunte de la inflación general? ______

130

Respuestas.

a) 43 productos.

b) 4.2%.

c) ¿Y cuál es el aumento promedio que ha tenido la gasolina en ese mismo periodo? ______

d) ¿Por qué creen que organizaciones de consumidores consideran que afectaría el aumento del precio de la gasolina al INPC? ______

e) Completen la siguiente tabla:

Productos	Presentación del producto	Precio del producto en $		Precio del producto en la primera quincena de septiembre de 2007 comparado con diciembre de 2006	
		Diciembre 2006	15 septiembre 2007	Porcentaje	Variación
Tortilla*	(kg)	6.00	8.50	141.6	41.6
Harina	(kg)	5.25	10.50	200	100
Pan de caja	(680 g)	13.90	19.70	141.6	41.6

*Datos que corresponden a la Ciudad de México.
Fuente: Sistema Nacional de Información e Integración de Mercados (SNIIM). Secretaría de Economía.

f) Supongan que únicamente los tres productos de la tabla se consideran para calcular el Índice Nacional de Precios al Consumidor, ¿cuál sería el porcentaje promedio del precio de estos tres productos? 161.1%

¿Y cuál sería la variación promedio del precio de los tres productos? 61.1%

g) ¿Cuál de los tres productos de la tabla tuvo un aumento mayor en su precio (expresado en porcentaje) que el porcentaje promedio de diciembre de 2006 al 15 de septiembre de 2007? La harina

>>> A lo que llegamos

El porcentaje promedio del precio de esos tres productos es un índice y se puede utilizar como referencia para observar cuál ha sido su variación de diciembre de 2006 al 15 de septiembre de 2007.

II. Ahora a la tabla anterior agreguen la información acerca de la gasolina.

a) ¿Qué dato anotarían en la columna de presentación del producto? ______

b) ¿Cuál sería el INPC considerando estos cuatro productos? ______

c) Supongan que a partir de la información anterior tienen que elaborar una nota periodística. Redacten una frase que pudiera servir como encabezado para esa nota. ______

131

Respuesta.

c) 3.5%.

2

Propósito de la pregunta. Aunque la respuesta a esta pregunta no está explicitada en el artículo que leyeron, se espera que los alumnos logren identificar la importancia de la gasolina, ya que es el combustible que se utiliza para la mayoría de los medios de transporte y un aumento en su precio repercute en los costos de producción y distribución.

Posibles dificultades. Si observa que tienen dificultades, aclare a los alumnos que la columna de porcentaje indica la comparación entre los precios en los dos momentos, y que se obtiene al dividir el precio de septiembre de 2007 entre el precio de diciembre de 2006 y multiplicar el resultado por 100.

Respuesta. El porcentaje promedio se calcula al sumar los tres porcentajes que obtuvieron y dividir el resultado entre tres. El resultado que obtengan representa el INPC de los tres productos.

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que, en este caso, el porcentaje promedio representa el INPC y la variación promedio representa la inflación.

2 3

Respuestas.

a) (litros).

b) 146.675. Se calcula al sumar los tres porcentajes indicados en la tabla (141.6, 200 y 141.6) con el porcentaje que corresponde a la gasolina (103.5, ya que la gasolina subió un 3.5%) y obtener el porcentaje promedio para los cuatro productos.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos cuáles son algunos de los bienes y servicios que se mencionan.

Propósito de la sesión. Identificar y construir índices simples. Los índices simples se refieren a una sola magnitud o concepto, y se utilizan para analizar las variaciones que ha tenido esa magnitud en periodos distintos. En esta sesión esa magnitud es el número de alumnos inscritos en secundaria en un ciclo escolar. Para los índices simples se especifica uno de los valores como el valor base. Desde el punto de vista aritmético, cualquier valor puede ser la base, pero en la práctica se busca que ese valor sirva como punto de partida o como referencia de lo que se quiere comparar.

Sugerencia didáctica. En la primera parte de la sesión, el ciclo escolar base es 1993-1994, se escoge este ciclo porque es el año a partir del cual la secundaria es obligatoria. Pregunte a los alumnos qué creen que ocurrió con la matrícula en secundaria a partir de ese año escolar.

Sugerencia didáctica. Es posible que a los alumnos les cueste trabajo identificar cómo se obtiene el porcentaje (se divide la matrícula de otro ciclo escolar entre la matrícula del ciclo escolar 1993-1994 y se multiplica el resultado por 100). Permita que intenten calcularlo con sus propios procedimientos.

>>> A lo que llegamos

El índice es un número, que puede estar en forma de porcentaje, mediante el cual se resume o expresa un conjunto de valores que corresponde a diversos elementos que intervienen en una situación y, también, se utiliza para establecer comparaciones dentro de esa situación. Un ejemplo de este tipo de índice es el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC) que es un indicador económico; su finalidad es medir a través del tiempo la variación de los precios de un conjunto de bienes y servicios representativos del consumo de los hogares mexicanos. El INPC es el indicador oficial de la inflación en México.

SESIÓN 2

ÍNDICES EN LA ESCUELA

>>> Para empezar

Los índices no sólo se utilizan en la economía y las finanzas. También se usan en muchas otras áreas, por ejemplo, en la educativa, para describir el comportamiento de diversos fenómenos. Algunos ejemplos son el índice de reprobación, de deserción (alumnos que no concluyen sus estudios) y de eficiencia terminal (alumnos que concluyen sus estudios en tiempo y forma). Estos índices son los más representativos en relación con el éxito o fracaso escolar.

>>> Consideremos lo siguiente

A partir del ciclo escolar 1993-1994, la educación secundaria es parte de la educación básica en México, es decir, es obligatoria. La siguiente tabla muestra el número de alumnos que ingresaron a secundaria (matrícula) en el ciclo escolar 1993-1994; tomamos como referencia este dato para comparar la matrícula del ciclo 2000-2001 y obtener su variación. Continúen considerando la matrícula del ciclo escolar 1993-1994 como referente para comparar los otros ciclos escolares y completen la tabla.

Matrícula escolar en educación secundaria – Tabla 1

Ciclo escolar	Matrícula (en miles de alumnos)	Porcentaje	Variación de la matrícula en porcentaje
1993-1994	4 340	100.00	0
2000-2001	5 350	123.27	23.27
2001-2002	5 480	126.26	26.26
2002-2003	5 660	130.41	30.41
2003-2004	5 780	133.17	33.17
2004-2005	5 894	135.80	35.80

Fuente: SEP. *Estadísticas Básicas del Sistema Educativo Nacional*

¿Cuál es el porcentaje en que aumentó la matrícula del ciclo escolar 2004-2005 con respecto de la matrícula del ciclo escolar 1993-1994? ______

Si utilizan la información del ciclo escolar 2004-2005, ¿cuántos alumnos se espera que estuvieran inscritos en el ciclo 2005-2006? ______ ¿Por qué? ______

>>> Manos a la obra

I. Utilicen los datos de la tabla anterior para contestar las siguientes preguntas. Pueden usar calculadora para realizar las operaciones.

a) En el ciclo escolar 1993-1994, ¿cuál fue la matrícula de alumnos? ______

b) Completen la siguiente tabla para conocer la variación que ha tenido la matrícula de alumnos de secundaria en los ciclos escolares a partir del ciclo escolar 1993-1994.

Tabla 2

Ciclo escolar	Matrícula (en miles de alumnos)	Diferencia = matrícula – matrícula en el ciclo 1993-1994	% de diferencia = (diferencia / matrícula en el ciclo 1993-1994) × 100
1993-1994	4 340	0	0
2000-2001	5 350	1 010	(1 010 ÷ 4 340) × 100 = 23.27
2001-2002	5 480	1 140	26.26
2002-2003	5 660	1 320	30.41
2003-2004	5 780	1 440	33.17
2004-2005	5 894	1 554	35.80

c) Observen en la tabla que el ciclo escolar 1993-1994 muestra un valor de 0. ¿Qué representa este valor? ______

d) Comparen el porcentaje de diferencia que obtuvieron para el ciclo escolar 2000-2001 con el de la columna Variación de la matrícula en porcentaje de la tabla 1 del apartado *Consideremos lo siguiente*, ¿son iguales o diferentes? ______ ¿Por qué? ______

e) De acuerdo con los resultados que obtuvieron, completen la siguiente conclusión:

Desde el ciclo escolar 1993-1994 hasta el ciclo escolar 2003-2004, la matrícula de alumnos ha aumentado *, según se observa el porcentaje fue* 133.17% *con una variación de* 33.17%

En el ciclo escolar 2004-2005, el porcentaje fue de 135.80 *con respecto al ciclo escolar 1993-1994. La variación fue de* 35.80%

Respuestas. 35.80% y un valor cercano a 6 000 000.

Sugerencia didáctica. Revise con los alumnos los procedimientos con los que estimaron la matrícula del ciclo 2005-2006. Algunos pudieron fijarse en el cambio en la matrícula y otros en el cambio en los porcentajes. Coménteles que uno de los usos de los índices es estimar el comportamiento de una situación en el futuro.

Sugerencia didáctica. Revise las respuestas con todo el grupo.

Posibles errores. Algunos alumnos responderán que la matrícula es de 4 340. Comente con ellos que es importante leer correctamente la información de la tabla. En este caso se indica que las cifras están en miles.

Respuesta.

a) 4 340 000

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos por qué creen que se toma el ciclo escolar 1993-1994 como referencia.

Respuestas.

c) Representa que ahí no hay cambio porque ése es el ciclo base.

d) Son iguales porque ambos miden la variación en el número de alumnos en el ciclo 2000-2001 con respecto al ciclo 1993-1994.

Posibles dificultades. En esta actividad se trabaja con valores menores que el de la base, y los alumnos podrían tener dificultad para identificar que la variación, en esos casos, debe ser un porcentaje negativo. Coménteles que la variación siempre se expresa a partir de la base.

Respuestas.

a) Porque se está analizando la variación de los demás ciclos con respecto a ese ciclo base.

b) Significa que la matrícula aumentó. El aumento es el que indica el 1.9%.

c) Sí. Porqué la matrícula es menor en los años anteriores al ciclo escolar 2003-2004.

d) 75.08%

Sugerencia didáctica. Revise con todo el grupo sus respuestas a las dos actividades.

II. Si ahora consideran como referente la matrícula del ciclo escolar 2003-2004, es decir, el número de alumnos inscritos en educación secundaria 10 años después de ser obligatoria, *¿qué porcentaje representan los números de alumnos que se han inscrito en los demás ciclos escolares?* Anótenlos en la siguiente tabla:

Ciclo escolar	Matrícula (en miles de alumnos)	Porcentaje	Variación
1993-1994	4 340	75.08	–24.92
2000-2001	5 350	92.56	–7.44
2001-2002	5 480	94.80	–5.20
2002-2003	5 660	97.92	–3.08
2003-2004	5 780	100.0	0.0
2004-2005	5 894	101.9	1.9

a) Observen en la tabla que el ciclo base o de referencia muestra un porcentaje de 100. ¿Por qué? ______

b) En el ciclo escolar 2004-2005 se muestra un porcentaje de 101.9, ¿qué significa ese valor? ______ ¿Y qué significa el valor de 1.9? ______

c) ¿En algún ciclo escolar el porcentaje es menor que 100? ______ ¿Por qué? ______

d) De acuerdo con la matrícula del ciclo escolar 2003-2004, ¿qué porcentaje representa el número de alumnos que se inscribieron en el ciclo escolar 1993-1994? ______

>>> A lo que llegamos

Cuando se comparan dos cantidades del mismo tipo pero medidas en distintos lugares, momentos o circunstancias, se obtiene un **índice simple**. Para calcular el valor de un índice simple se divide el valor que se quiere comparar entre un valor que se toma como referencia, llamado base. Si el índice simple se quiere expresar en forma de porcentaje, ese cociente se multiplica por 100.

III. La siguiente tabla muestra el número de alumnos reprobados en secundaria en el ciclo escolar 2003-2004 en algunos estados del país, encuentren el índice de reprobación en cada estado.

Estado	Alumnos reprobados (en miles)	Matrícula (en miles de alumnos)	Índice de reprobación (en %)
Aguascalientes	6.5	62	10.48
Coahuila	10.3	135	7.62
Chiapas	14.2	249	5.70
Guerrero	16.9	181	9.33
Hidalgo	9.0	155	5.80
Nayarit	2.4	56	4.28
Yucatán	16.7	102	16.37
Nacional	555	5 780	9.6

a) Escriban cómo se podría comparar el número de alumnos reprobados con respecto a la matrícula de alumnos, en cada caso. ______________________

____

b) ¿En qué estado fue mayor el porcentaje de reprobación? ______________

c) ¿Coincide con el estado que tiene el mayor número de alumnos reprobados?

____

¿Por qué? ______________________

____

d) Con respecto al porcentaje de reprobación nacional, ¿cuáles estados tienen un porcentaje mayor a éste? ______________________

Entre otros fines, se utiliza esta información para valorar la necesidad de reforzar los contenidos educativos y programas complementarios para disminuir estos índices.

Propósito de la actividad. Obtener el valor índice a partir de relacionar dos conjuntos de datos en los que se tiene la misma unidad (en miles de alumnos, un conjunto corresponde a los alumnos reprobados y el otro a la matrícula).

Sugerencia didáctica. Comente a los alumnos que, en esta actividad, ya no se trabaja con un índice simple, pero se sigue comparando una sola magnitud (la cantidad de alumnos).

Respuestas.

a) Se divide el número de alumnos reprobados entre la matrícula y se multiplica el resultado por 100.

b) En Yucatán.

c) No. El estado con el mayor número de alumnos reprobados es Guerrero.

d) Aguascalientes y Yucatán.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos qué otros índices pueden ser útiles para reforzar la educación.

Para la siguiente sesión, puede pedir a los alumnos que investiguen cómo se juega beisbol.

Propósito de la sesión. Calcular y utilizar diferentes índices que sirven para analizar algunos aspectos del juego de beisbol.

3

Sugerencia didáctica. Puede pedir a los alumnos que expliquen brevemente en qué consiste el beisbol.

Sugerencia didáctica. Si tienen dudas con los términos utilizados (bases alcanzadas y carreras empujadas), comente que, para calcular el número de bases alcanzadas, se contabiliza cada sencillo como una base alcanzada, un doble como dos bases, un triple como tres y un cuadrangular como cuatro.

También puede comentarles que un jugador obtiene una carrera empujada cuando, debido a su bateo, ya sea que conecte de *hit* o alguna otra jugada, otro jugador o él mismo, anota una carrera.

Los alumnos podrían proponer que es mejor jugador el A debido a los números que tiene; habrá quienes consideren que el jugador B tiene un mejor desempeño porque ha empujado más carreras. En caso de que todos consideren el mismo jugador, cuestiónelos resaltando la importancia de algunos de los otros aspectos que se presentan en la tabla y en los que tengan mejores números los otros jugadores.

SESIÓN 3

¿QUIÉN ES EL PELOTERO MÁS VALIOSO?

>>> Para empezar

El beisbol es un deporte que se juega con una bola dura y un *bat* entre dos equipos de nueve jugadores cada uno. Un partido de beisbol se divide en nueve periodos de juego, cada uno de los cuales se llama entrada o *inning*. El equipo que anote más carreras a lo largo de las nueve entradas gana el partido. El juego comienza cuando un jugador llamado lanzador o *pitcher*, lanza la bola hacia el bateador del equipo contrario quien intenta batear (golpear con el *bat*) la bola hacia el interior del terreno de juego. Los jugadores anotan carreras bateando la bola y corriendo alrededor de una serie de 4 bases, antes de que les elimine algún jugador de campo del equipo contrario. Si un bateador alcanza una base bateando una bola de forma que los jugadores del equipo contrario no consigan atraparla con éxito, el jugador ha conseguido un *hit*, y el corredor intenta avanzar, sin que le eliminen, el mayor número de bases posible. El *hit* con el que el bateador consigue alcanzar la segunda base se llama doble; con el que alcanza la tercera, se llama triple. Si un jugador al batear la bola sale volando por encima de la zona de juego y cae fuera de los límites es un cuadrangular o *homerun*.

Las entradas están divididas en dos mitades, llamadas principio y final de entrada. Durante el principio de una entrada, un equipo batea mientras el otro está en el campo. Cuando el equipo que batea tenga tres jugadores eliminados, los dos equipos intercambian sus papeles y comienza el final de una entrada. Si el resultado permanece empatado al final de nueve entradas, los dos equipos continúan jugando hasta que, al final de una o más entradas suplementarias, uno de los dos anote más carreras que el otro.

En el caso del beisbol, como en muchos otros, hay situaciones que se miden a partir de varios índices, cada uno de los cuales determina un aspecto diferente de la situación. Por ejemplo, para medir el rendimiento de un jugador de beisbol se necesita conocer la frecuencia, calidad y oportunidad de los *hits* que "conecta". Para conocer más sobre este deporte puedes consultar la página de internet que se señala en el apartado *Para saber más.*

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos por tres jugadores de beisbol.

Tabla 1

Jugador	Número de turnos al *bat*	Número de *hits*				Número de bases alcanzadas	Número de carreras empujadas
		Sencillos	Dobles	Triples	Cuadrangulares *(homeruns)*		
A	500	100	30	10	10	230	30
B	500	120	20	10	—	190	35
C	250	30	20	—	20	150	30

¿Cuál de los tres jugadores consideran que tiene mejor desempeño como beisbolista?

____

Justifiquen sus respuestas.

136

>>> Manos a la obra

I. A la frecuencia relativa con que pega de *hit* un jugador se le llama promedio de bateo (PB) y es la razón entre el número de *hits* (sencillos, dobles, triples y cuadrangulares) y el número de turnos al *bat*. En la siguiente tabla calculen el promedio de bateo de cada uno de los tres jugadores (se acostumbra utilizar tres cifras decimales para este promedio, por ejemplo, 0.270).

Tabla 2

Jugador	Número de turnos al *bat*	Número de *hits*					Promedio de bateo (Número total de *hits* / Número de turnos al *bat*)
		Sencillos	Dobles	Triples	Cuadrangulares (*homeruns*)	Total	
A	500	100	30	10	10	150	0.300
B	500	120	20	10	—	150	0.300
C	250	30	20	—	20	70	0.280

a) ¿Para tener un mejor promedio de bateo, influye el tipo de *hit* que se pegue? _____
¿Por qué? __________________________________

b) De acuerdo con la distribución del tipo de *hits* que ha dado cada beisbolista, ¿cuál jugador consideran que es mejor? ________________________

c) ¿Cuál jugador tiene mejor promedio de bateo? ________________

II. El promedio de porcentaje de bateo efectivo (en inglés *slugging*) es el número de bases alcanzadas por un bateador entre sus turnos al *bat*. En la siguiente tabla calculen el promedio de bateo efectivo para los tres jugadores.

Tabla 3

Jugador	Número de turnos al *bat*	Número de bases alcanzadas	Promedio de bateo efectivo (número de bases alcanzadas / número de turnos al *bat*)
A	500	230	[(100 × 1) + (30 × 2) + (10 × 3) + (10 × 4)] / 500 = 0.460
B	500	190	0.380
C	250	150	0.600

a) ¿Cuál es el jugador que tiene mejor promedio de bateo efectivo? ________

b) ¿El jugador que tiene mejor promedio de bateo efectivo también tiene el mejor promedio de bateo (PB)? ________________________

c) Expliquen por qué puede ocurrir esta situación ________________

137

Propósito de las actividades. Calcular tres índices que se utilizan para evaluar la efectividad de los peloteros: el promedio de bateo, el promedio de bateo efectivo y el índice de carreras empujadas.

El total se calcula sumando el número de *hits* (sencillos + dobles + triples + cuadrangulares).

Respuestas.

a) No, porque sólo se contabiliza el número de *hits*.

b) Deben analizarlo de acuerdo al tipo de *hits* que conecta cada jugador.

c) Los jugadores A y B.

Respuestas.

a) El jugador C.

b) No.

c) El jugador C conectó muchos cuadrangulares, por lo que su promedio de bateo efectivo es más alto, aunque su promedio de bateo sea menor que el de los otros jugadores porque no conectó tantos *hits*.

III. En el beisbol, con mucha frecuencia, al final de cada entrada (turno a batear de cada equipo), quedan corredores en alguna o algunas de las bases, indicación de que no todos los *hits* se convierten en anotaciones o carreras. Por lo que es muy valorado aquel beisbolista que es capaz de pegar de *hit* teniendo jugadores en alguna base con posibilidades de anotar una carrera. La oportunidad de un *hit* se mide con el índice de carreras empujadas, el cual se obtiene dividiendo el número de carreras empujadas por el jugador entre el número de *hits* que conectó. Completen la tabla 4 y calculen el índice de carreras empujadas.

Tabla 4

Jugador	Número de *hits*	Número de carreras empujadas	Índice de carreras empujadas (número de carreras empujadas / número de *hits*)
A	150	30	0.200
B	150	35	0.233
C	70	30	0.428

Respuestas.

a) El jugador C.

b) No.

a) ¿Cuál es el jugador que tiene mejor índice de carreras empujadas? __________

b) ¿El jugador que tiene mejor promedio de bateo efectivo y mejor promedio de bateo también tiene el mejor índice de carreras empujadas? __________ Expliquen por qué ocurre esta situación __________

IV. Completa la tabla 5 concentrando los indicadores de cada jugador que obtuvieron en las tablas anteriores.

Tabla 5

Jugador	Promedio de bateo	Promedio de bateo efectivo	Índice de carreras empujadas
A	0.300	0.460	0.200
B	0.300	0.380	0.233
C	0.280	0.600	0.428

3

Sugerencia didáctica. Analicen entre todos la respuesta a la pregunta de quién es el jugador más valioso. En particular es importante que identifiquen en qué ayudan los índices a responderla.

Respuestas.

a) Jugadores A y B.

b) Jugador C.

c) Jugador C. Porque empuja más carreras y batea mejores *hits*.

a) De acuerdo con los resultados, ¿quién tiene el máximo promedio de bateo? __________

b) ¿Quién tiene el máximo promedio de bateo efectivo? __________

c) Si se consideran los tres porcentajes de cada jugador, ¿cuál jugador de beisbol consideran que es más valioso? __________

Justifiquen su respuestas.

>>> A lo que llegamos

Existen muchas formas de construir un índice; desde métodos muy sencillos, hasta aquellos que pueden combinar varios índices agregados.

- Los índices simples son los más utilizados debido a su sencillez. Para crearlos únicamente es necesario comparar el valor de la variable estudiada contra el valor que se utilizará como referencia o base.
- En otras ocasiones es necesario crear un índice que incluya un conjunto de productos. Para construir este tipo de índices es necesario conocer tanto el valor como la cantidad de cada producto. Su desventaja es que cuando se incluyen productos con distintas unidades de medida o existen grandes diferencias entre los valores de los productos, el valor del índice se afecta.

Existen situaciones en las que un solo índice puede ser útil para valorar una parte de la situación, pero es insuficiente para valorar la situación en toda su complejidad.

Por ejemplo, en el caso del beisbol se tienen tres índices, el porcentaje de bateo, porcentaje de bateo efectivo y el porcentaje de carreras empujadas. Sin embargo, aun tomados en conjunto, si se quiere comparar la capacidad ofensiva total de un jugador, se requiere considerar otros resultados como, por ejemplo, su habilidad de "robar bases".

Otro ejemplo, los cambios del costo de la vida en un determinado tiempo se miden en parte por el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), pero sin duda también influyen otras cuestiones como los salarios, la posibilidad de acceder a salud y educación de manera gratuita, etcétera.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que investiguen otro ejemplo de un índice y que indiquen cómo se calcula y su utilidad.

Uno de los deportes en que México ha tenido importantes representaciones es el de los clavados. Para determinar el ganador de una competencia de clavados, un conjunto de 8 jueces califican, por rondas, elementos objetivos y subjetivos de cada clavado.

Propósito del programa. Mostrar y ejemplificar el sistema de calificaciones utilizado en los clavados.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

MÁS SOBRE ÍNDICES

SESIÓN 4

Propósito de la sesión. Utilizar índices para analizar e interpretar distintas situaciones.

1. Solicita al profesor o director que te proporcione la información sobre las estadísticas del ciclo anterior; completa con ella la siguiente tabla:

Grado	Inscripción *	Bajas	Altas **	Existencia = Inscripción – bajas + altas	Porcentaje de deserción *** = (Inscripción – existencia / inscripción) × 100
Primero					
Segundo					
Tercero					
Total					

* Inscripción: alumnos inscritos antes del 30 de septiembre.
** Altas: alumnos inscritos después del 30 de septiembre.
*** Deserción: alumnos que no concluyen sus estudios.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad. Si tienen dificultades revise con ellos la actividad **III** del *Manos a la obra* de la sesión 2.

Sugerencia didáctica. En caso de que no cuenten con los datos, pida a los alumnos que inventen una situación en una escuela y que la analicen a partir de los índices.

SECUENCIA 12

a) ¿En qué grado o grados la existencia fue menor a la inscripción? ____________

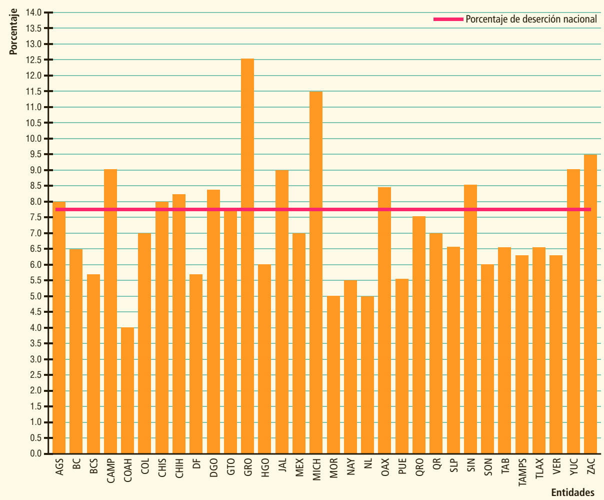
b) Considera como base los resultados totales, ¿en algún grado el porcentaje de deserción fue mayor al del total? ____________

c) ¿Qué significa esta situación? ____________

Propósito del interactivo. Ayudar a los alumnos a leer e interpretar gráficas de este tipo cuantitativa y cualitativamente.

2. La siguiente gráfica corresponde al porcentaje de deserción en secundaria por estado en el ciclo escolar 2003-2004.

Deserción en secundaria por entidad federativa, 2003-2004



Fuente: SEP, estimaciones a partir de las *Estadísticas Básicas del Sistema Educativo Nacional*.

a) ¿Cuál es el estado con mayor porcentaje de deserción escolar? ____________

b) ¿Y cuál es el estado con menor porcentaje de deserción? ____________

c) ¿Cuál es el porcentaje de deserción nacional en secundaria? ____________

d) Con respecto al porcentaje de deserción nacional, ¿cuántos estados están por arriba de él? ____________

e) ¿Cuántos estados están por debajo de él? ____________

140

Respuestas.

a) Guerrero.

b) Coahuila.

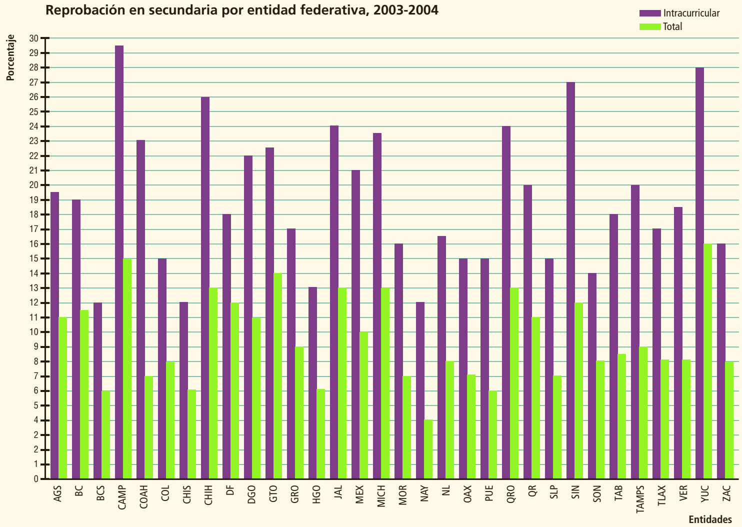
c) 7.75%.

d) 12 estados.

e) 19 estados
(Guanajuato está exactamente en 7.75%).

3. La siguiente gráfica muestra el índice de reprobación total del nivel secundaria y el índice de reprobación entre cada grado de ese nivel (se llama intracurricular).

Reprobación en secundaria por entidad federativa, 2003-2004



Fuente: SEP, estimaciones a partir de las *Estadísticas Básicas del Sistema Educativo Nacional.*

a) ¿Cuánto más aumentó la reprobación intracurricular con respecto a la reprobación total en Aguascalientes? ______

b) ¿En qué entidad o estado la reprobación intracurricular fue mayor? ______

c) ¿El estado con mayor reprobación total es el mismo que tiene mayor reprobación intracurricular? ______

d) ¿Qué estado tiene la menor reprobación intracurricular? ______

4. Consideren los valores de los índices de deserción, de reprobación nacional y de reprobación intracurricular de los problemas 2 y 3 para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál consideran que es el estado que tiene mayores problemas en estos aspectos? ______ ¿Por qué? ______

141

Respuestas.

a) Aumentó en 8.5 puntos porcentuales.

b) Campeche (29.5%).

c) No.

d) Baja California Sur, Chiapas y Nayarit (8%).

Sugerencia didáctica. Puede pedirles que cada equipo escoja un estado distinto y que escriban sus conclusiones en una cartulina para que lo presenten a los demás.

b) Nuevamente, utilicen la información de los problemas 2 y 3. Comparen ese estado con respecto a la valores de los indicadores a nivel nacional, escriban una conclusión y preséntenla a su grupo.

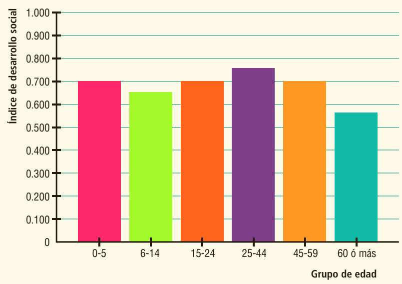
c) Observen los indicadores que corresponden al estado en que viven. Con respecto a los indicadores nacionales, ¿cómo se encuentran los indicadores de su estado, son superiores o inferiores? Describan cuál es la situación de los indicadores de su estado con respecto a los otros estados y a nivel nacional, y preséntenla a su grupo.

5. El Índice de Desarrollo Social (IDS) permite identificar contrastes y marcadas desigualdades entre los habitantes de una entidad, municipio o localidad. Se forma al considerar aspectos de educación, salud, trabajo y vivienda. Este índice se clasifica en cinco categorías:

Categoría	Valor del índice
Muy alto	0.875-1.0
Alto	0.750-0.874
Medio	0.625-0.749
Bajo	0.500-0.624
Muy bajo	Menos de 0.5

La siguiente gráfica muestra el índice de desarrollo social por grupo de edad.

Índices de desarrollo social por grupo de edad, 2000



Fuente: Estimación del Consejo Nacional de Población con bases en el *XII Censo de Población y Vivienda, 2000.*

Respuestas.

a) El de 25-44. Está en la categoría alto.

b) Es de 6.5. Está en la categoría medio.

c) Es de 5.5.

a) ¿Cuál grupo de edad tiene el mayor índice de desarrollo social? ____________
¿En qué categoría se encuentra? ____________

b) ¿Cuál es el índice de desarrollo social de la población entre 6 y 14 años? ____________ ¿En que categoría se encuentra? ____________

c) ¿Cuál es el menor índice de desarrollo social? ____________

d) ¿Cuál es el grupo de edad a que corresponde ese índice? ____________

e) ¿En qué categoría se encuentran? ____________ ¿Por qué crees que este grupo de edad tiene menor índice de desarrollo social? ____________

____

Respuestas.

d) 60 o más.

e) Bajo.

Sugerencia didáctica. Analice con todo el grupo sus respuestas al inciso e).

6. Vayan a una tienda cerca de su casa o escuela. Obtengan el precio y la presentación de cuatro productos que consideren básicos (por ejemplo: arroz, frijol, harina, aceite) u otros productos que el equipo decida. Anoten la fecha y regresen en un mes a preguntar por la misma información.

a) ¿Qué problemas tuvieron para recolectar dicha información? ____________

____

b) ¿Ha cambiado el precio de esos productos? ____________

c) Utilicen un índice para expresar dichos cambios y escriban una conclusión.

____

____

>>> Para saber más

Sobre índices en la educación básica, consulten:
http://sieeb.basica.sep.gob.mx
Ruta 1: Estadística por servicio de la Educación Básica → Secundaria
Seleccionar según su interés el ciclo escolar, modalidad, nivel y sostenimiento.
Ruta 2: Reportes interactivos → estadística de la educación básica.
Seleccionar según su interés el ciclo escolar, nivel educativo, modalidad, Sostenimiento y entidad federal.
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Sistema de Información de Estadística de la Educación Básica. SEP.

Sobre cómo se juega el beisbol, consulten:
http://www.ibaf.tv/es/index.php?option=com_content&task=view&id=22&Itemid=45
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Federación Internacional de Beisbol.

Sobre el índice nacional de precios al consumidor, consulten:
http://www.banxico.org.mx/inpc
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Ruta 1: INPC → Definición → Importancia → Papel del Banxico.
Ruta 2: Elaboración INPC → Medición → Proceso → Identificación → Obtención → Cálculo INPC.
Ruta 3: Cambio de base → Base de comparación → Importancia.

Sobre el índice de desarrollo social, consulten:
http://www.conapo.gob.mx/publicaciones/desarrollo/001.pdf
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Consejo Nacional de Población.

Se sugiere que dedique tiempo para registrarse antes de que sus alumnos accedan a la página. Este sitio requiere que su explorador de Internet tenga habilitada la opción de ventanas emergentes (*pop up*).

Propósito de la sesión. Definir qué es simulación y cuáles son las condiciones que se deben cumplir para realizar una simulación adecuada.

Propósito de la actividad. En este apartado se pretende plantear a los alumnos un escenario en el que la simulación puede dar información sobre lo que ocurriría en la situación real.

Sugerencia didáctica. Es importante que los estudiantes comprendan de qué se trata el problema antes de empezar a resolver la sesión. Para ello puede ser útil comentar algunas situaciones que muy posiblemente les sean familiares, como las votaciones en las que se elige al presidente del país.

Es común que antes de las votaciones se hable de "encuestas" que señalan como "virtual ganador" a tal o cual candidato. Pregúnteles ¿cómo creen que se obtiene esta información? Después de oír sus opiniones, coménteles que lo que se hace regularmente es obtener una muestra representativa de la población total, es decir, que refleje las características de ésta (por ejemplo, edad, nivel socioeconómico, género). A esa muestra se le aplica la encuesta y con ello se tiene un resultado que se presume será parecido al de las votaciones reales. También se utilizan programas de cómputo que simulan la situación sin necesidad de hacer encuestas.

Respuesta. Cada juguete tiene probabilidad de $\frac{1}{3}$ porque están distribuidos uniformemente.

Si se usa el dado se puede pensar en definir qué resultados corresponden a "elefante", cuáles a "jirafa" y cuales a "león" (2 números para cada animal).

La urna con las canicas también sirve: cada color sería un animal.

SECUENCIA 13

Simulación

En esta secuencia aprenderás a resolver situaciones en las que interviene el azar mediante un proceso denominado **simulación**, que consiste en diseñar, para una situación aleatoria real, una segunda situación aleatoria cuyos eventos tengan la misma probabilidad de ocurrir que en la primera, con la ventaja de que en esta segunda situación podemos observar, calcular y utilizar los resultados para obtener información de la situación original.

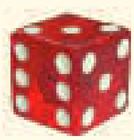
SESIÓN 1

SIMULACIÓN

>>> Manos a la obra

I. Una compañía que vende paquetes de cereales busca incrementar sus ventas ofreciendo animales de plástico, uno por cada paquete. Son tres animales diferentes (elefantes, leones y jirafas) y se distribuyen de manera uniforme en las cajas de cereal de esa compañía. Si hoy comprara una caja de cereal de esa compañía, ¿cuál sería la probabilidad de que me toque un elefante?

Una opción sería comprar muchas cajas de cereal con base en las figuras de animales que salgan y realizar el cálculo. Otra, más económica consiste en utilizar alguno de los siguientes materiales y realizar con ellos una simulación de cuál animal de plástico podría salir en una de esas cajas de cereal.



1

2

a) Completen las siguientes tablas:

144

Propósito del programa. Explicar y ejemplificar qué es una simulación en situaciones en las que interviene el azar.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Sugerencia didáctica. Dé a los alumnos un tiempo para que resuelvan la actividad individualmente. Luego pídales que, por parejas, justifiquen su respuesta. Después analicen juntos los resultados que obtendrían con cada objeto y, finalmente, pregunte si se relacionan o no con el problema. Por ejemplo, podría plantearles qué ocurriría si de la urna quitan 1 canica para que queden sólo 5, ¿sigue siendo útil para simular la situación o no? ¿Por qué?

Material:	Dado
Resultados posibles que pueden obtenerse al lanzar un dado	
¿Cuáles de los resultados posibles de lanzar un dado representarían que el animal de plástico que salió de la caja de cereal era un elefante?	
¿Cuáles corresponderían a una jirafa?	
¿Cuáles corresponderían a un león?	

Material:	Urna de canicas
Resultados posibles que pueden obtenerse al extraer una canica	
Entre una extracción y otra, ¿será necesario regresar la canica a la caja? ¿Por qué?	
¿Cuáles de los resultados posibles de extraer una canica representarían que el animal de plástico que salió de la caja de cereal era un elefante?	
¿Cuáles corresponderían a una jirafa?	
¿Cuáles corresponderían a un león?	

II. Ahora cada equipo seleccione el dado o la urna con canicas, y en su cuaderno anoten los resultados en una tabla como la siguiente. Realicen el experimento 50 veces.

Número de ensayo	Resultados	
	En la simulación con el material que seleccionaron	En la situación aleatoria

Recuerden que:

*La **probabilidad frecuencial** es un valor obtenido de la experiencia de algún fenómeno o experimento aleatorio que permite estimar a futuro un comportamiento. Sin embargo, no es definitiva, por lo que es importante saber interpretar los resultados que se obtienen.*

La probabilidad frecuencial de un evento A, que se denotará P(A), se obtiene dividiendo el número de veces que ocurre el evento entre el número total de veces que se realizó el experimento.

$$P(A) = \frac{\text{Número de veces que ocurre el evento}}{\text{Número de veces que se realiza el experimento}}$$

a) De acuerdo con los resultados que obtuvieron, ¿cuál fue el resultado que más veces apareció?

____

b) Según los resultados de este experimento de simulación, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que me toque una caja de cereal con un elefante?

____

Sugerencia didáctica. Si los resultados que han considerado los alumnos no son adecuados, se espera que al realizar el experimento se den cuenta de esas imprecisiones. Por ello, es muy importante que usted los acompañe al realizar estas actividades y que aclaren cualquier duda que pudiera surgir. Si el grupo es grande, pida trabajar juntas a todas las parejas que eligieron el mismo material. Recalque que, para que sea correcto utilizar cierto material en una simulación, en ésta se deben considerar los mismos resultados posibles y las mismas probabilidades que las de la situación original.

Eje

Manejo de la información.

Tema

Análisis de la información.

Subtema

Noción de probabilidad.

Antecedentes

Los alumnos han estudiado algunos conceptos importantes de estadística y probabilidad: qué es una muestra; cómo obtener, analizar y organizar la información; cuáles son las medidas de tendencia central; el cálculo de probabilidades; etc. En esta secuencia utilizarán varias de esas nociones para aprender qué es la simulación de una situación, cómo se hace, en qué casos se usa y cuáles son sus ventajas y alcance.

Propósitos de la secuencia
Utilizar la simulación para resolver situaciones probabilísticas.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	**Simulación** Definir qué es simulación y cuáles son las condiciones que se deben cumplir para realizar una simulación adecuada.	Programa 23
2	**Aplicando la simulación** Aplicar la simulación para conocer cómo se comporta una situación que no puede realizarse.	Programa 24
3	**Simulación y tiros libres** Simular una situación en la que se requiere un número grande de resultados así como la generación y uso de números aleatorios.	Aula de medios Simulación con el modelo de urna (1) (Hoja de cálculo) Interactivo

Respuestas.

a) $\frac{1}{3}$

b), c) y d) Las respuestas dependerán de los resultados que hayan obtenido en el experimento.

III. Consideren las condiciones del problema original:

Una caja de cereal puede contener un elefante de plástico o un león o una jirafa.

a) Si la empresa distribuyó de manera uniforme esos animales de plástico en las cajas, ¿cuál es la probabilidad clásica de que al comprar una caja de cereal, ésta contenga un elefante de plástico? ____________

b) A partir de los resultados de la simulación con el dado, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que el animal de plástico que me toque en la caja de cereal sea un elefante? ____________

c) ¿Y si se consideran los resultados de la simulación con la urna de canicas? ____________

d) ¿Cuál de estos valores de las probabilidades frecuenciales (incisos b y c) es más cercano al valor de la probabilidad clásica (inciso a)? ____________

Recuerden que:

*Para obtener la **probabilidad clásica** de un evento no se requiere de la realización de experimentos, como en la probabilidad frecuencial, sino de conocer dos datos:*

- *El número de todos los resultados posibles que se pueden dar en una situación de azar.*
- *El número de resultados favorables de un evento de esa situación.*

Se llama probabilidad clásica de un evento al número P(e) que se obtiene por medio del cociente:

$$P(e) = \frac{\text{Número de resultados favorables del evento}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

>>> A lo que llegamos

La **simulación** consiste en diseñar, para una situación aleatoria real (problema), una situación aleatoria cuyos eventos tienen la misma probabilidad clásica de ocurrir que los de la primera situación, con la ventaja de que en la simulación podemos observar los resultados y calcular los valores de la probabilidad frecuencial y utilizarlos para obtener información sobre el problema. Para poder realizar una simulación es posible utilizar algún material u objeto manipulable como urnas, dados, monedas, ruletas, tabla de números aleatorios, etcétera.

>>> Lo que aprendimos

1. En un hospital, dos bebés están a punto de nacer. Se quiere saber cuál es la probabilidad de los siguientes eventos:

A: *Los dos recién nacidos son niñas.*

B: *Los dos recién nacidos son niños.*

C: *Un recién nacido es niña y el otro niño.*

a)

b)

a) ¿Qué resultado de la moneda asociarías al nacimiento de un varón? __________ ¿Y al de una niña? __________

b) ¿De acuerdo con lo anterior qué interpretación darías al hecho de que al lanzar las dos monedas una cayera águila y la otra sol? __________

c) ¿Qué resultados de la urna de canicas representarían al nacimiento de un varón? __________ ¿Y al de una niña? __________

d) ¿Cuántas canicas es conveniente tomar en cada extracción? __________

e) Entre una extracción y otra, ¿será necesario regresar las canicas a la urna? __________ ¿Por qué? __________

APLICANDO LA SIMULACIÓN

SESIÓN 2

>>> Para empezar

El control de calidad de productos es un ejemplo de las áreas en que la simulación resulta de gran ayuda.

147

Sugerencia didáctica. Aclare a los estudiantes que en esta situación pueden ocurrir los siguientes eventos:

Los 2 bebés son

"Niño" y "niño".

"Niña" y "niña".

"Niño" y "niña".

"Niña" y "niño".

Ahora deben elegir de entre los materiales, cuál emplearían para simular la situación original.

Respuesta.
Con las monedas se puede simular la situación: cada moneda representaría un nacimiento, una de las caras de la moneda se asignaría a "niño" y la otra a "niña". Las canicas no sirven para simular esta situación porque hay 3 colores y en la situación sólo hay 2 resultados posibles ("niño" o "niña").

Posibles dificultades. Quizá para algunos alumnos las canicas no son un material que a primera vista logren descartar. Podría ocurrírseles asignar a las verdes "los dos recién nacidos son niñas", a las rojas "son niños" y a las amarillas "son un niño y una niña", pero sería una estrategia incorrecta. Si se hiciera un diagrama de árbol podrían contarse todos los resultados posibles de la situación original (**A** es para niña y **O** para niño): **AA, AO, OA, OO**.

Entonces, la probabilidad de que los 2 recién nacidos sean "niña" y "niña" es de $\frac{1}{4}$, la de que sean "niño" y "niño" es también de $\frac{1}{4}$, pero la de que sean "niño" y "niña" es de $\frac{1}{2}$.

Con las canicas la probabilidad de obtener cualquiera de los 3 colores es de $\frac{1}{3}$, por lo tanto con éstas la situación no puede simularse.

Propósito del programa. Mostrar y ejemplificar la utilización de simulaciones en diversas situaciones relacionadas con el control de calidad en las empresas e industrias.

Se transmite por la red satelital Edusat. Consultar la cartelera para saber horario y días de transmisión.

Sugerencia didáctica. Se espera que los alumnos hagan hipótesis sobre lo que podría pasar en esta situación y cómo lo estudiarían. Después de darles un tiempo para que, entre parejas, los alumnos comenten el problema y lleguen a un acuerdo, elija 3 ó 4 parejas y pídales que comenten y justifiquen algunas de sus respuestas ante el grupo. Permítales dar libremente sus opiniones y hagan entre todos un análisis para ver si lo que comentan sus compañeros es factible.

Propósito de la sesión. Aplicar la simulación para conocer cómo se comporta una situación que no puede realizarse.

Posibles respuestas.

a) Lo importante de esta pregunta es que los alumnos se den cuenta de que no es posible asegurar que en cada botella habrá 1 impureza. Si cada botella tuviera 1 impureza sería una distribución uniforme, pero la posibilidad de que eso ocurra es muy pequeña (aunque no imposible).

b) Que algunas botellas tengan más de 1 impureza y que otras no tengan ninguna es el escenario más probable.

c) Ambas posibilidades pueden ocurrir.

En el apartado *Manos a la obra* aprenderán que, en esta situación, para determinar la probabilidad de cada evento (0 impurezas, 1 impureza, etc.), se requiere simular varias veces la revisión de los lotes de 36 botellas.

Propósito de la actividad. Ahora se les presenta a los estudiantes una manera de simular la situación de las botellas y las impurezas. Se realiza lanzando dos dados (es una situación de azar); las parejas de resultados (como 2, 3) representan una impureza en la botella que tiene esas coordenadas en el tablero. Hay que realizar 36 lanzamientos con los dos dados para que las 36 impurezas queden repartidas en las botellas.

>>> Consideremos lo siguiente

Con 36 kg de vidrio líquido se fabrican 36 botellas. En el vidrio líquido hay 36 impurezas repartidas de manera aleatoria.

a) ¿Creen que cada botella tendrá una impureza? ____________

b) ¿Creen que haya botellas sin ninguna impureza y botellas con más de una impureza?

____

c) ¿Creen que haya más botellas con una impureza o más con dos impurezas? ________

Comenten sus respuestas con sus compañeros.

>>> Manos a la obra

I. Se puede simular la situación anterior con dos dados distinguibles, por ejemplo, uno azul y uno rojo.

Los 36 resultados posibles que hay al lanzar los dos dados representan las 36 botellas. En la siguiente cuadrícula se muestran esos 36 resultados posibles, cada uno de los cuales representa una botella del problema planteado. Por ejemplo, la celda (3, 4) representa a la botella 16.

Dado B

Dado A	1	2	3	4	5	6
1	Resultado posible 1, 1 Botella 1	Resultado posible 1, 2 Botella 2	Resultado posible 1, 3 Botella 3	Resultado posible 1, 4 Botella 4	Resultado posible 1, 5 Botella 5	Resultado posible 1, 6 Botella 6
2	Resultado posible 2, 1 Botella 7					
3				Resultado posible 3, 4 Botella 16 ● ●		
4			Resultado posible 4, 3 Botella 21 ●			
5						Resultado posible 5, 6 Botella 30
6	Resultado posible 6, 5 Botella 31					

De este modo:

- Si al lanzar los dos dados el resultado es, por ejemplo, (3, 4), se anota un punto en esa celda, lo que representa que la botella 21 contiene una impureza.

148

- Puede ocurrir que un mismo resultado (tiro) se obtenga (o salga) más de una vez, como se muestra en la cuadricula en la que la celda (3, 4) tiene dos puntos, lo que representa que la botella 16 contiene 2 impurezas.

  Es decir, en dos ocasiones, en los dados azul y rojo han caído 3 y 4 respectivamente.

- Lancen los dados 36 veces para determinar de qué manera están distribuidas las impurezas en las botellas.

Registren sus resultados en la siguiente cuadricula.

Dado B

Dado A	1	2	3	4	5	6
1	Resultado posible 1, 1 Botella 1	Resultado posible 1, 2 Botella 2	Resultado posible 1, 3 Botella 3	Resultado posible 1, 4 Botella 4	Resultado posible 1, 5 Botella 5	Resultado posible 1, 6 Botella 6
2	Resultado posible 2, 1 Botella 7					
3				Resultado posible 3, 4 Botella 16		
4			Resultado posible 4, 3 Botella 21			
5						Resultado posible 5, 6 Botella 30
6	Resultado posible 6, 5 Botella 31					

a) ¿Cuántas celdas no tienen punto? ____________

b) Las celdas que no tienen ningún punto marcado indican que esa botella:

- [ ] Tiene una impureza.
- [ ] Tiene dos impurezas.
- [ ] No tiene impureza.
- [ ] Tiene más de tres impurezas.

c) ¿Cuántas celdas tienen solamente un punto? ____________

d) ¿Es posible que en una botella se encuentren más de 5 impurezas? ____________

¿Por qué? ____

e) Según los resultados que obtuvieron, los cuales simulan una revisión de 36 botellas, ¿crees que, si realizas otra vez la simulación, serían los mismos? ____________

¿Por qué? ____

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos realicen el experimento para que puedan corroborar o modificar las hipótesis que dieron en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

Posibles respuestas. Estas respuestas dependerán de los resultados del experimento de cada equipo, sería conveniente que, si en alguno todas las botellas tuvieron impurezas, se mencione. Ese tipo de resultado no significa que la distribución sea uniforme, sino que uno de los posibles resultados en una situación de azar es que cada botella tenga una impureza.

II. Completen la siguiente tabla y después contesten las preguntas:

Al realizar la simulación	Lo que representa en el problema planteado
Total de celdas sin punto	Total de botellas sin impurezas
Total de celdas con un punto	Total de botellas con una impureza
Total de celdas con dos puntos	Total de botellas con dos impurezas
Total de celdas con tres puntos	Total de botellas con tres impurezas
Total de celdas con más de tres puntos	Total de botellas con más de tres impurezas

a) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que una botella no tenga impurezas?

____

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que una botella tenga solamente una impureza?

____

c) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que una botella tenga más de tres impurezas?

____

d) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que una botella tenga entre una y dos impurezas?

____

e) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que una botella tenga al menos dos impurezas?

____

Los valores de las probabilidades frecuenciales que obtuvieron en su equipo al simular la situación pueden interpretarse como los resultados de la revisión de una muestra de 36 botellas. De tal modo que si en el grupo se formaron 10 equipos y cada uno realizó la simulación, entonces podría decirse que hay 10 muestras diferentes del problema planteado.

Propósito de la actividad. Obtener el promedio de las probabilidades. Cada lote, es decir, cada uno de los experimentos que realizó cada equipo, es una muestra de lo que puede ocurrir.

Cuando se realizan controles de calidad de productos, se analizan varias muestras; luego se calculan los valores estadísticos (medias, medianas, desviaciones estándar, etc.) de cada una, y, a partir de esos valores, se obtienen datos que representan al producto que se está evaluando.

III. Completen la siguiente tabla con los valores de la probabilidad frecuencial que en cada equipo se obtuvo y calculen el promedio de esas probabilidades. Después de hacerlo, contesten las siguientes preguntas.

Probabilidad frecuencial de:	Valores de la probabilidad frecuencial por equipo										Promedio
	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4	Equipo 5	Equipo 6	Equipo 7	Equipo 8	Equipo 9	Equipo 10	
Botellas sin impurezas											
Botellas con una impureza											
Botellas con dos impurezas											
Botellas con tres impurezas											
Botellas con más de tres impurezas											

a) La tabla anterior muestra la probabilidad frecuencial promedio de cinco eventos que pueden ocurrir al revisar varios lotes de botellas. ¿Cuál de esos cinco eventos es más probable que ocurra? _____ ¿Por qué? ______________________

b) Supongan que no hay dados para realizar la simulación anterior, ¿cuál de los siguientes experimentos realizarían para simular la situación original? Márquenlo con una ✓.

- [x] Una bolsa con doce papelitos numerados del 1 al 6, de tal manera que habrá dos papelitos de cada número; se extrae un par de papelitos, se anotan los números y se regresan.
- [x] Dos bolsas cada una con seis papelitos numerados del 1 al 6; se extrae un papelito de cada bolsa, se anota el número y se regresan.
- [ ] Doce papelitos en una bolsa numerados del 1 al 12; se extrae un papelito, se anota el número y se regresa.
- [ ] Dos bolsas cada una con seis papelitos numerados del 1 al 6; se extrae un papelito de cada bolsa, se anota el número y no se regresan.

c) Según los resultados que obtuvieron, al reunir los de cada equipo, ¿creen que si realizan otra vez la simulación serían los mismos? _____ ¿Por qué? __________

____

SIMULACIÓN Y TIROS LIBRES

SESIÓN 3

>>> Consideremos lo siguiente

Un jugador de basquetbol va a lanzar tres tiros libres. La estadística indican que la probabilidad de que enceste un tiro es 0.5. Los resultados entre un tiro y otro son independientes.

¿Cuál es la probabilidad de que el jugador enceste en 20 intentos tres tiros libres seguidos?

Se puede responder esta pregunta haciendo una simulación:

De una caja que contiene diez papelitos iguales, numerados del 0 al 9, se extrae un papelito, se registra el número obtenido y se regresa a la caja. Se repite este proceso 20 veces. El resultado de cada extracción representa un acierto o un fallo del tiro libre.

Observen la siguiente tabla con los resultados de 20 extracciones, que representan los resultados de 20 tiros libres.

	Resultados																			
Número del papelito que extrae	1	9	2	2	3	9	5	0	3	4	0	5	7	5	6	2	8	7	1	3
Resultado del tiro libre A = acierto F = fallo	A	F	A	A	A	F	F	A	A	A	A	F	F	F	F	A	F	F	A	A
Serie de tres tiros libres acertados																				

a) ¿Qué números se utilizaron para indicar que el tiro libre fue encestado? __________

151

Sugerencia didáctica. Esta pregunta es importante, porque incluso cuando no se tiene el material con el cual se piensa que es más conveniente simular una situación (por ejemplo, los dados), se puede pensar en otro u otros materiales. En la secuencia 27 de **Matemáticas II** realizaron un experimento similar.

Respuestas.

- La primera opción es correcta porque los papelitos pueden funcionar como los dados: el primer papelito que se extraiga indicará el número de celda azul y el segundo papelito el número rojo.
- La segunda opción también es correcta. Funcionaría igual que la opción anterior: el papelito extraído de la primera bolsa sería como el primer número obtenido con el dado, y el papelito de la segunda bolsa sería el número obtenido al lanzar el dado por segunda vez.
- La tercera opción no es correcta: supongamos que se extraen los números (9, 12), ¿a qué celda en el tablero corresponde ese resultado? Así como está planteado dicho tablero, debe haber 2 papelitos por cada número del 1 al 6, uno indicaría el número rojo y el otro el azul.
- La cuarta opción también es incorrecta debido a que se realizan las extracciones sin regresar los papelitos a la bolsa. Esto querría decir que un mismo resultado no puede obtenerse más de una vez, es decir, que una misma botella no puede tener más de una impureza, por lo tanto sería incorrecto.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad. Valore si es necesario volver a revisar lo que hasta aquí se ha trabajado en la secuencia.

Propósito de la sesión en el aula de medios. Simular una situación en la que se requiere varios resultados así como generar y usar números de forma aleatoria.

Si se dispone de aula de medios, esta actividad puede realizarse en lugar de la sesión 3.

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos analicen la tabla y dé tiempo suficiente para que contesten las preguntas. Si no han entendido la mecánica de la simulación, explíquela en el pizarrón (especialmente cómo se cuentan las series de 3 tiros), ya que el reto al que ellos deben enfrentarse aquí es la obtención de la probabilidad de que el jugador enceste 3 tiros libres seguidos a partir de los resultados de la simulación; por esta razón, la simulación debe quedarles muy clara.

Respuesta.

a) 0, 1, 2, 3, 4

Propósito de la sesión. Simular una situación en la que se requiere un número grande de resultados así como la generación y uso de números aleatorios.

SECUENCIA 13

Respuesta.

b) 5, 6, 7, 8, 9

b) ¿Y para señalar que el tiro se falló? ______

c) La primera serie de tres tiros seguidos es: A F A

A	**F**	**A**	A	A	F	F	A	A	A	A	F	F	F	F	A	F	F	A	A

Primera serie de tiros libres seguidos

La segunda serie de tres tiros seguidos es: F A A

A	**F**	**A**	**A**	A	F	F	A	A	A	A	F	F	F	F	A	F	F	A	A

Segunda serie de tiros libres seguidos

La tercera serie de tres tiros seguidos es: A A A

A	F	**A**	**A**	**A**	F	F	A	A	A	A	F	F	F	F	A	F	F	A	A

Tercera serie de tiros libres seguidos

¿Cuántas series de tres tiros seguidos se obtendrían en total? 18

d) ¿Cuántas series de tres tiros seguidos serían si hubieran sido cinco tiros? 3

¿Y en seis tiros? 4

e) ¿Y en 10 tiros? 8

f) ¿Y en 20 tiros? 18

g) De acuerdo con la simulación de 20 tiros que se realizó, ¿cuántas series de tres tiros libres ha acertado el jugador? 3 Cuéntalos en la primera tabla.

Respuesta.

La probabilidad es de $\frac{3}{18}$ porque logró encestar 3 tiros en 3 series de las 18 que lanzó. También puede escribirse como $\frac{1}{6}$.

h) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que en 20 tiros el jugador enceste tres tiros libres seguidos? ______

3

Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros

>>> Manos a la obra

I. Realicen la simulación anterior. En su cuaderno, deberán elaborar una tabla como la anterior y anotar los resultados de 200 tiros libres. Luego, contesten las siguientes preguntas:

a) De acuerdo con la simulación que realizaron, ¿cuántas series de tres tiros libres hay en 200 tiros? ______

152

Propósito de la actividad. Que los alumnos realicen la simulación y obtengan un número relativamente grande de resultados con los que podrán hacer algunas conclusiones sobre la situación original.

Sugerencia didáctica. Plantee a los alumnos la pregunta a) con otras cantidades, por ejemplo, 1 000 tiros. También puede preguntarles cuántas series de 4 tiros habrá en 200 tiros.

Cuando terminen de contestar el inciso e), anote los resultados de cada equipo y compárenlos con los de la probabilidad clásica o teórica.

Otra opción es que, entre todos, obtengan el promedio de las probabilidades de los equipos. Una posibilidad más sería reunir los resultados de todos y obtener la probabilidad frecuencial en el grupo, pero hay que tener cuidado, este valor puede variar dependiendo de cómo se reúnan los resultados porque influye en el orden en el que se componen las series de 3 tiros. Por ejemplo, si en el equipo 1 los dos últimos resultados son **AA** y en el equipo 2, el primer resultado es **A**, al unirlos se forma una tercia de tiros anotados, mientras que si el primer resultado es **F**, no se forma.

Comente con los alumnos estas 3 opciones y explique que la última es la menos confiable por la cuestión que acaba de plantearse.

Respuesta.

a) 198, es decir, $n - 2$.

b) ¿Cuántas series de tres tiros libres seguidos ha acertado el jugador? ________

c) De acuerdo a los resultados obtenidos en su simulación ¿cuál es la probabilidad frecuencial de que, en 200 intentos, el jugador anote tres tiros libres de manera consecutiva? ______

d) Si consideramos que el jugador tiene una probabilidad de anotar de 0.5 en cada tiro, ¿cuál es la probabilidad clásica de que acierte los tres tiros? ________

e) Comparen sus respuestas. ¿Qué tan cercana es la probabilidad frecuencial que obtuvieron en el inciso c) con respecto a la probabilidad clásica del inciso d)?

____

f) ¿De qué otra manera se podría simular la situación que se presenta en el apartado *Consideremos lo siguiente*?

____

En la mayoría de los experimentos de simulación, para obtener resultados confiables se necesita realizar un número grande de repeticiones.

II. Realicen los siguientes dos experimentos. Los resultados que obtengan los utilizarán en la siguiente actividad.

a) De una urna que contiene cuatro canicas de colores diferentes, como la que se muestra a la derecha, se extrae una canica:

Observen su color y anoten en las líneas el número que le corresponde al color que sacaste, de acuerdo con el código que se presenta en la siguiente tabla.

Color de la canica	Número que anotas
Rojo	1
Azul	2
Verde	3
Amarillo	4

____
____
____
____

Luego, regresen la canica a la urna y realicen otra extracción.

Repitan el proceso hasta completar 50 extracciones.

b) Lancen un dado 50 veces.

Anoten cada número que cae en las siguientes celdas.

Resultados

153

Respuestas.

b) y c) La respuestas dependerán de los resultados que obtengan los alumnos en la simulación.

d) Sería 0.125, porque cada tiro tiene una probabilidad de 0.5; como son independientes, se multiplica $0.5 \times 0.5 \times 0.5$

e) Puede ocurrir que se obtengan valores menores, iguales o mayores que los de la probabilidad clásica.

f) Hay varias respuestas posibles, lo importante es que en ellas los alumnos hayan tenido presente que la probabilidad de ese jugador de anotar un tiro libre es de 0.5. Entonces, podría funcionar el lanzamiento de una moneda, un dado o una perinola (designando la mitad de los resultados posibles a "acierta" y la otra mitad a "falla"), la extracción de canicas de una urna en la que hubiera dos colores en igual número, entre otras.

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos generen una serie de números aleatorios mediante un experimento.

Materiales. Una urna que no sea transparente (puede ser una botella o caja en la que quepa la mano) y 4 canicas de los colores que se indican.

Puede sustituirse por una bolsa de plástico que no sea transparente y papelitos coloreados o bien, con el nombre del color escrito.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos si es posible obtener un 5 en este experimento y cómo. Es importante que ellos logren definir el espacio muestral, que en este caso es {1, 2, 3, 4}. Luego pídales que le digan cuál es el espacio muestral en el experimento del dado.

También puede preguntarles qué pasaría si después de extraer una canica ésta no se regresa a la urna. ¿Cambiarían las condiciones del experimento?, ¿seguiría siendo aleatorio?, ¿cuántas extracciones podrían realizarse?, ¿cuántos posibles ordenamientos de las extracciones habría? (Por ejemplo, rojo – azul – verde – amarillo, sería un posible ordenamiento). Se espera que los alumnos de tercero de secundaria sepan que, si no se regresan las canicas a la urna después de cada extracción, sigue siendo un experimento aleatorio, pero con distintas condiciones: sólo puede haber 4 extracciones y ningún color se puede repetir en cada experimento.

Propósito del interactivo. Proporcionar una herramienta con la cual los alumnos puedan simular experimentos.

Propósito de las preguntas. La intención es que los alumnos acepten como equivalentes los 3 tipos de simulación: la extracción de canicas con reemplazo (regresando las canicas después de cada extracción), el lanzamiento del dado y la extracción de papelitos numerados con reemplazo.

Los dos experimentos son equivalentes porque:

- En ambos casos existe igual probabilidad para cada uno de los resultados posibles, o sea, es igualmente probable obtener una canica roja que una azul, y es igualmente probable obtener un 5 que un 3 con los papelitos y con el dado.
- Tanto en la extracción de canicas como en la de papelitos es igualmente probable obtener un resultado que represente a un tiro que se "acierta" que obtener un resultado de "falla". En los papelitos obtener un número del 0 al 4 significa que el tiro se acertó, y del 5 al 9 que se falló. Como hay la misma cantidad de números (5) para cada resultado, es igualmente probable obtener un "acierta" o un "falla". Con el dado y con las canicas se puede hacer algo similar, es decir, definir cuáles resultados representan un tiro acertado y cuáles un tiro que se falló, siempre y cuando sean mitad y mitad.

III. Imaginen que, en lugar de utilizar los 10 papelitos para simular el lanzamiento del tiro libre, utilizan los resultados que obtuvieron con la urna de canicas y el dado en la actividad anterior.

a) ¿Cómo utilizarían los números obtenidos en la urna para señalar el resultado de los tres tiros libres? ______

b) En el caso de la lista obtenida con el dado, ¿cuándo se representaría un acierto y cuándo un fallo? ______

c) Elijan una de las dos listas. De acuerdo con la simulación que realizaron, ¿cuántas series de tres tiros libres ha conseguido el jugador? ______

d) ¿Cuántas series de tres tiros libres ha acertado el jugador? ______

e) ¿Cuál es la probabilidad que tiene el jugador de anotar tres tiros libres seguidos en 20 intentos? ______

>>> A lo que llegamos

Cuando un conjunto de números se genera al azar, se llama **conjunto de números aleatorios**. Esos conjuntos pueden estar formados por los dígitos (por ejemplo, cuando usamos los 10 papelitos); por los números del 1 al 4 (con las canicas de colores) y con los números del 1 al 6 (con el dado).

>>> Lo que aprendimos

1. Si la probabilidad de enceste o anotación del jugador de basquetbol es de 0.7:

a) ¿Qué números en los papelitos utilizarías para indicar que el tiro libre es encestado? ______

b) ¿Qué números utilizarías para señalar que se falló el tiro? ______

c) De acuerdo con la simulación que se realizó, ¿cuáles serían los nuevos resultados de las anotaciones? Completa la tabla.

	Resultados																			
Número del papelito que extrae	1	9	2	2	3	9	5	0	3	4	0	5	7	5	6	2	8	7	1	3
Resultado del tiro libre A = acierto F = fallo																				
Serie de tres tiros libres acertados																				

154

Respuestas.

a) Debe haber 2 resultados que representen "acierta" y 2 que representen "falla".

b) Igualmente, hay que definir cuáles resultados serán para "falla" y cuáles para "acierta". Como es igualmente probable que el jugador falle o acierte, debe haber 3 resultados para cada posibilidad.

c) En ambas listas se representan 50 tiros en los que habrá 48 series de 3.

d) y e) Las respuestas dependen de los resultados que obtengan los alumnos.

Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos la diferencia entre la probabilidad frecuencial y la clásica. La primera se obtiene a partir de la experimentación y por ello puede variar de un experimento a otro (como en este caso), y la segunda es la que se obtiene por el cálculo de la probabilidad de cada resultado sin llevar a cabo el experimento.

Propósito de la actividad. Que los alumnos realicen una simulación en la que los resultados posibles no son equiprobables.

Respuestas.

a) y b) Hay que hacer que la probabilidad de "acierta" sea 0.7, entonces, si se utilizan 10 papelitos con números, 7 deben representar un tiro encestado y 3 un fallo. Si se utilizaran 20 papelitos, 14 tendrían que representar un acierto y 6 un fallo.

c) El llenado de la tabla dependerá de cuáles números los alumnos designen como "falla" y cuáles como "acierta". Podrían decir que "falla" es del 0 al 2; o del 7 al 9; o el 3, 6 y 9, entre otras posibilidades.

d) ¿Cuántas series de tres tiros libres ha acertado el jugador? __________ Cuéntalos en la tabla anterior.

e) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que el jugador enceste tres tiros libres seguidos? __________

f) Si consideramos que el jugador tiene una probabilidad de anotar de 0.7 en cada tiro y que son lanzamientos independientes, ¿cuál es la probabilidad clásica de que anote los tres tiros? __________

g) Compara esta probabilidad clásica con la probabilidad frecuencial de que el jugador anote los tres tiros. ¿Por cuánto se aproxima la probabilidad calculada en el inciso e) a la probabilidad clásica? ____________________

2. Imagina que respondes a un examen de diez preguntas con falso o verdadero, pero sólo conoces las respuestas de cinco preguntas.

a) ¿Cómo simularías esta situación? Escríbela en tu cuaderno.

b) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen si respondes al azar las otras cinco preguntas? ______________________________

>>> Para saber más

Sobre cómo se realiza una simulación en el experimento de Buffon al encontrar una manera para aproximar el valor de *pi* (π), consulta:
http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/buffon.html
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].

Respuestas.

d) y e) Las respuestas dependen de los resultados que hayan obtenido en el experimento.

f) 0.343 porque se multiplica $0.7 \times 0.7 \times 0.7$

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos lo siguiente: ¿cambiarían las condiciones del experimentos si en vez de utilizar papelitos numerados del 0 al 9, se pusieran los números 0, 4, 25, 98, 111, 321, 546, 547, 800 y 899?, ¿cómo se podrían utilizar para esta simulación?

Los alumnos deben saber que no importa cuáles números representan un acierto y cuáles un fallo, sino que éstos tienen que estar en una proporción igual a la situación original.

Respuestas.

a) Si ya se conocen 5 respuestas, entonces hay que simular qué se contestaría en las otras 5. Una posibilidad es suponer que se contesten al azar habiendo igual probabilidad de poner “falso” o “verdadero”. Entonces podrían emplearse materiales como los sugeridos en esta sesión: papelitos que dijeran “respuesta correcta” y “respuesta incorrecta”, canicas de colores o un dado; la condición es que existan igual número de resultados para cada uno de los dos resultados posibles.

b) En este problema hay 32 resultados posibles: en 1 de esos resultados no se acierta ninguna de las preguntas, en 5 se acierta 1, en 10 se aciertan 2, en 10 se aciertan 3, en 5 se aciertan 4, y en 1 se aciertan todas. La probabilidad de no acertar en las 5 preguntas que se van a contestar al azar sería entonces de: $0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.03125$ o $\frac{1}{32}$.

Como aprobar significa obtener de 6 a 10 de calificación, el único caso en el que no se lograría es si no se acierta ninguna de las 5 preguntas que van a responderse al azar. Como ese resultado tiene una probabilidad de ocurrencia de $\frac{1}{32}$, la probabilidad de aprobar es el complemento de ese evento, es decir $\frac{31}{32}$.

Integrar al portafolios. Una vez que los alumnos resuelvan este problema, solicíteles una copia de sus respuestas y procedimientos.

PROPUESTAS DE EXÁMENES BIMESTRALES
BLOQUE 1 Y BLOQUE 2

A continuación se presenta una propuesta para evaluar los bloques 1 y 2 mediante exámenes que serán complementarios de la información que usted ha ido integrando en el portafolios del alumno.

Los exámenes tienen las siguientes características:

De cada secuencia se proponen entre uno y cinco reactivos, cada reactivo evalúa un aspecto del contenido que se trató en la secuencia.

Cada examen se arma de la siguiente manera:

Hay dos opciones para cada reactivo, cada una evalúa el mismo contenido y tiene el mismo nivel de dificultad. La intención de poner estas dos opciones es que usted pueda elegir una o la otra y armar así distintas versiones del examen según le convenga. Encontrará todos los reactivos respondidos para facilitarle la calificación.

Recomendaciones para la aplicación de los exámenes, su revisión y calificación:

Debido a la longitud de los exámenes, se sugiere aplicar cada uno en dos sesiones de clase, al final de cada bloque. Una vez aplicado, haga una revisión grupal de las soluciones de los reactivos para aclarar dudas y dar oportunidad a que cada alumno haga las correcciones pertinentes de los errores que hubiera cometido.

Se sugiere no asignar más del 50% de la calificación bimestral a los resultados de los exámenes, considere para el otro 50% las actividades que integró en el portafolios y otros aspectos que crea importantes (como la participación, el cumplimiento de tareas, etc.).

Propuesta de examen bimestral
Bloque 1

SECUENCIA 1. PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

Reactivo 1

1. Subraya el resultado de $(x - 9)^2$

Respuesta: c)

a) $x^2 - 9x + 81$

b) $x^2 - 18x - 81$

c) $x^2 - 18x + 81$

d) $x^2 - 81$

1'. Subraya el resultado de $(2x + 1)^2$

Respuesta: c)

a) $4x^2 + 2x + 1$

b) $4x^2 + 4x + 2$

c) $4x^2 + 4x + 1$

d) $4x^2 + 1$

Reactivo 2

2. Subraya la factorización que corresponde a $x^2 - 16$

Respuesta: d)

a) $(x - 8)\ (x + 2)$

b) $(x - 8)\ (x - 2)$

c) $(x - 4)\ (x - 4)$

d) $(x - 4)\ (x + 4)$

2'. Subraya la factorización que corresponde a $4x^2 - 9$

Respuesta: d)

a) $(4x - 3)\ (x + 3)$

b) $(4x - 3)\ (x - 3)$

c) $(2x - 3)\ (2x - 3)$

d) $(2x + 3)\ (2x - 3)$

Reactivo 3

Respuesta: b)

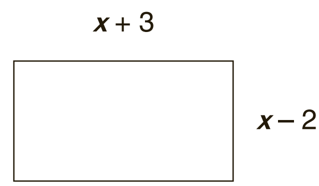
3. Subraya la expresión que representa el área del rectángulo.

a) $x^2 - 6$

b) $x^2 + x - 6$

c) $x^2 - 5x - 6$

d) $x^2 - x - 6$



Respuesta: b)

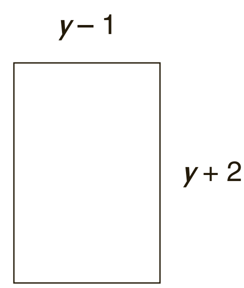
3'. Subraya la expresión representa el área del rectángulo.

a) $y^2 - 2$

b) $y^2 + y - 2$

c) $x^2 - 3x - 2$

d) $x^2 - x - 2$



Reactivo 4

Respuesta: a)

4. Subraya las expresiones que representan las medidas de los lados del rectángulo.

a) $(x + 6)\ (x - 1)$

b) $(x + 3)\ (x - 2)$

c) $(x - 3)\ (x - 2)$

d) $(x - 6)\ (x + 1)$

$$\boxed{A = x^2 + 5x - 6}$$

Respuesta: a)

4'. Subraya las expresiones que representan las medidas de los lados del rectángulo.

a) $(z - 12)\ (z + 2)$

b) $(z - 6)\ (z - 4)$

c) $(z - 6)\ (z + 4)$

d) $(z + 12)\ (z - 2)$

$$\boxed{A = z^2 - 10z - 24}$$

Reactivo 5

5. Une con una línea cada polinomio con su factorización.

Polinomio	Factorización
i) $x^2 - 16$	a) $(x + 8)\ (x - 2)$
ii) $x^2 - 16x$	b) $(x - 4)\ (x - 4)$
iii) $x^2 - 8x + 16$	c) $(x + 4)\ (x - 4)$
iv) $x^2 + 6x - 16$	d) $(x)\ (x - 16)$
	e) $(x - 8)\ (x - 2)$

Respuestas:

i) $\longrightarrow$ c)

ii) $\longrightarrow$ d)

iii) $\longrightarrow$ b)

iv) $\longrightarrow$ a)

5'. Une con una línea cada polinomio con su factorización.

Polinomio	Factorización
i) $x^2 - 9$	a) $(x + 9)\ (x - 1)$
ii) $x^2 - 9x$	b) $(x - 3)\ (x - 3)$
iii) $x^2 - 6x + 9$	c) $(x + 3)\ (x - 3)$
iv) $x^2 + 8x - 9$	d) $(x)\ (x - 9)$
	e) $(x - 9)\ (x - 1)$

Respuestas:

i) $\longrightarrow$ c)

ii) $\longrightarrow$ d)

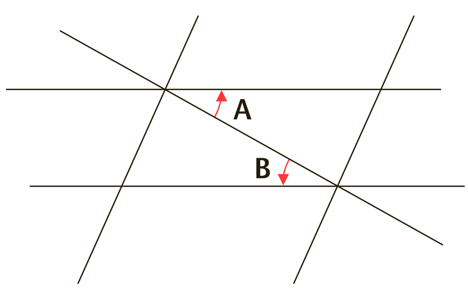
iii) $\longrightarrow$ b)

iv) $\longrightarrow$ a)

SECUENCIA 2. TRIÁNGULOS CONGRUENTES Y CUADRILÁTEROS

Reactivo 1

1. En la siguiente figura hay un paralelogramo y una diagonal. En él se han marcado con las letras **A** y **B** dos ángulos iguales. De las siguientes razones, ¿cuál es una justificación de que los ángulos **A** y **B** sean iguales?



a) Son opuestos por el vértice.

b) Son alternos internos.

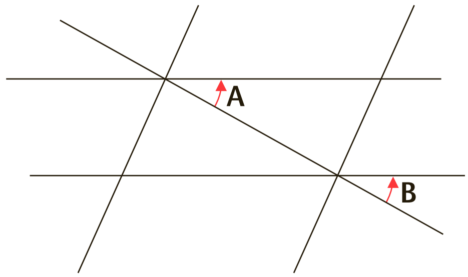
c) Son alternos externos.

d) Son correspondientes.

Respuesta: b)

Respuesta: d)

1'. En la siguiente figura hay un paralelogramo y una diagonal. En él se han marcado con las letras **A** y **B** dos ángulos iguales. De las siguientes razones, ¿cuál es una justificación de que los ángulos **A** y **B** son iguales?



a) Son opuestos por el vértice.

b) Son alternos internos.

c) Son alternos externos.

d) Son correspondientes.

Reactivo 2

Respuesta:

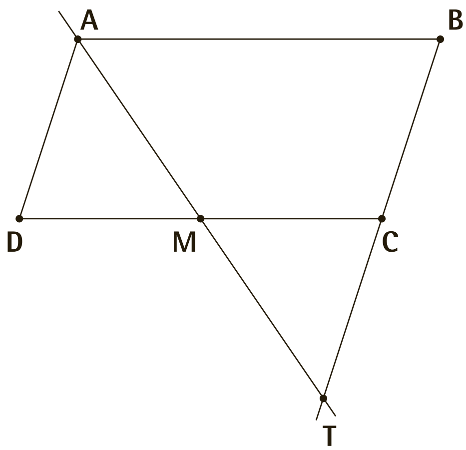
El lado **MD** es igual al lado **MC** pues **M** es el punto medio de **DC**.

∡**AMD** es igual a ∡**TMC** pues son opuestos por el vértice.

∡**ADM** es igual a ∡**MCT** pues son alternos internos entre paralelas.

Entonces, por el criterio ALA los triángulos **AMD** y **TMC** son congruentes.

2. En el paralelogramo con vértices **ABCD** se ha denotado con M al punto medio del lado **DC**. Se ha prolongado el lado **BC** hasta que se interseque con la recta que pasa por $\overline{AM}$ y al punto de intersección se le ha llamado **T**.



Completa la siguiente prueba de que los triángulos **AMD** y **TMC** son congruentes.

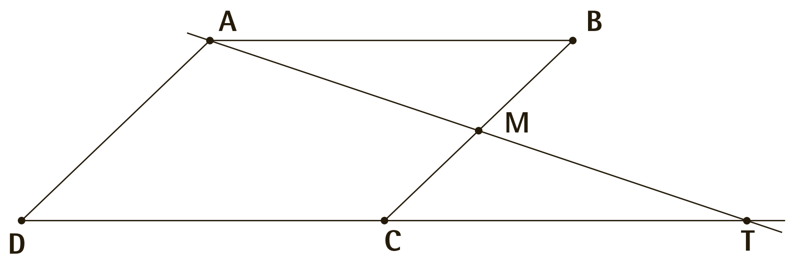
*El lado **MD** es igual al lado* __________ *pues **M** es el punto medio de* $\overline{DC}$.

*El ángulo **AMD** es igual al ángulo* __________ *pues son opuestos por el vértice.*

*El ángulo **ADM** es igual al ángulo* __________ *pues son alternos internos entre paralelas.*

Entonces, por el criterio __________ *los triángulos **AMD** y **TMC** son congruentes.*

2'. En el paralelogramo con vértices **ABCD** se ha denotado con **M** al punto medio del lado **BC**. Se ha prolongado el lado **DC** hasta que se interseque con la recta que pasa por $\overline{\mathbf{AM}}$; al punto de intersección se le ha llamado **T**.



Completa la siguiente prueba de que los triángulos **AMB** y **TMC** son congruentes.

*El lado **MD** es igual al lado* __________ *pues **M** es el punto medio de* $\overline{\mathbf{BC}}$ *.*

*El ángulo **AMB** es igual al ángulo* __________ *pues son opuestos por el vértice.*

*El ángulo **ABM** es igual al ángulo* __________ *pues son alternos internos entre paralelas.*

Entonces, por el criterio de __________ *los triángulos **AMB** y **TMC** son congruentes.*

Respuestas:

El lado **MB** es igual al lado **MC** pues **M** es el punto medio de **BC**.

∡**AMB** es igual a ∡**TMC** pues son opuestos por el vértice.

∡**ABM** es igual a ∡**MCT** pues son alternos internos entre paralelas.

Entonces, por el criterio de ALA los triángulos **AMB** y **TMC** son congruentes.

Reactivo 3

3. Decide cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.

a) Si las diagonales de un cuadrilátero son iguales, entonces el cuadrilátero debe ser un rectángulo.

b) Si las diagonales de un cuadrilátero son iguales y se intersecan en el punto medio, entonces el cuadrilátero debe ser un rectángulo.

c) Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, entonces el cuadrilátero debe ser un rectángulo.

d) Si las diagonales son perpendiculares y se intersecan en su punto medio, entonces el cuadrilátero debe ser un rectángulo.

Respuesta: b)

3'. Decide cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.

a) Si las diagonales de un cuadrilátero son iguales, entonces el cuadrilátero debe ser un rombo.

b) Si las diagonales de un cuadrilátero son iguales y se intersecan en el punto medio, entonces el cuadrilátero debe ser un rombo.

c) Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, entonces el cuadrilátero debe ser un rombo.

d) Si las diagonales son perpendiculares y se intersecan en su punto medio, entonces el cuadrilátero debe ser un rombo.

Respuesta: d)

SECUENCIA 3. ENTRE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

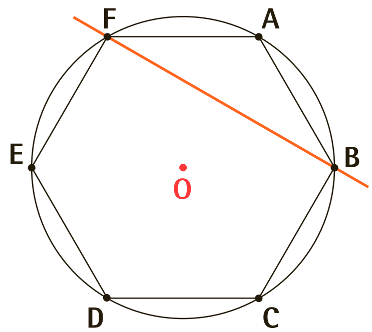
Respuestas:

a) 30°

b) El triángulo **BOF** es isósceles con ángulos iguales ∡**BFO** y ∡**FBO**. ∡**BOF** mide 120°. Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, entonces la suma de los dos ángulos iguales es 60°. De aquí de obtiene que ∡**FBO** mide 30°.

Reactivo 1

1. En la circunferencia de centro **O** se inscribió el hexágono regular **ABCDEF** y se trazó la recta secante que pasa por los vértices **B** y **F**. Sin utilizar transportador, calcula la medida de ∡**FBO**.



a) ∡**FBO** mide ________ grados.

b) Escribe el procedimiento que utilizaste para calcular la medida de ∡**FBO**

____

____

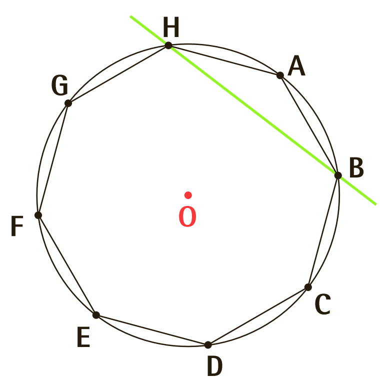
____

Respuestas:

a) 45°

b) El triángulo **BOH** es isósceles con ángulos iguales ∡**BHO** y ∡**HBO**. ∡**BOH** mide 90°. Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, entonces la suma de los dos ángulos iguales es 90°. De aquí de obtiene que ∡**HBO** mide 45°.

1'. En la circunferencia de centro **O** se inscribió el octágono regular **ABCDEFGH** y se trazó la recta secante que pasa por los vértices **B** y **H**. Sin utilizar transportador, calcula la medida de ∡**HBO**.



a) ∡**HBO** mide ________ grados.

b) Escribe el procedimiento que utilizaste para calcular la medida de ∡**HBO**

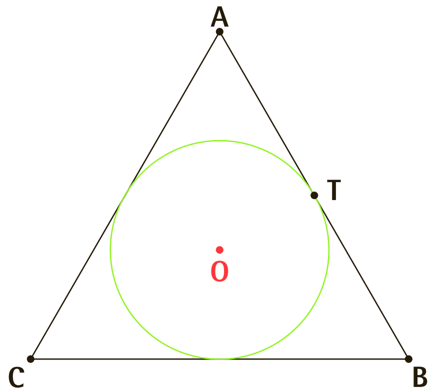
____

____

____

Reactivo 2

2. Sea **ABC** un triángulo equilátero y **T** el punto de tangencia de su incírculo con el lado **AB**. Se sabe que ∡**OAT** mide 30°.



a) ¿Cuánto mide ∡**AOT**? ________

b) Escribe el procedimiento que utilizaste para calcular la medida de ∡**AOT**

____

____

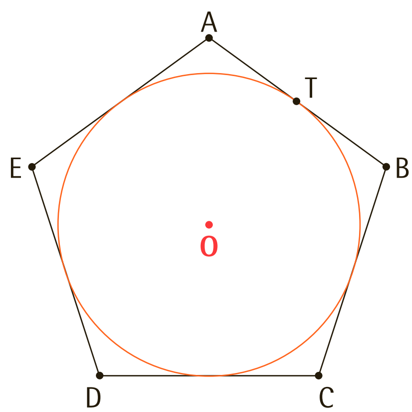
____

Respuestas:

a) 60°

b) El triángulo **TOA** es rectángulo con ∡**OTA** = 90°. Como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, ∡**AOT** mide 60°.

2'. Sea **ABCDE** un pentágono regular y **T** el punto de tangencia de su círculo inscrito con el lado **AB**. Se sabe que ∡**OAT** mide 54°.



a) ¿Cuánto mide ∡**AOT**? ________

b) Escribe el procedimiento que utilizaste para calcular la medida de ∡**AOT**

____

____

____

Respuestas:

a) 36°

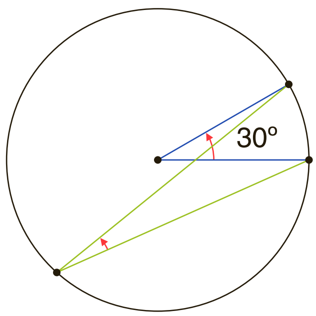
b) El triángulo **TOA** es rectángulo con ∡**OTA** = 90°. Como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, ∡**AOT** mide 36°.

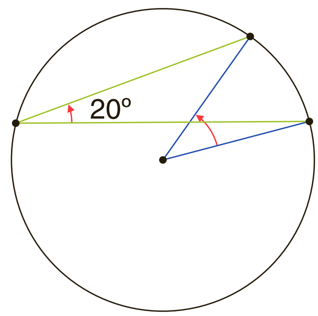
SECUENCIA 4. ÁNGULOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

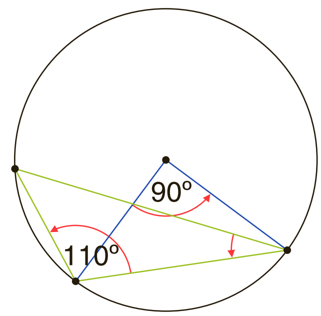
Respuestas: 15°, 40° y 25°

Reactivo 1

1. Sin utilizar transportador, determina la medida de los ángulos señalados en rojo.

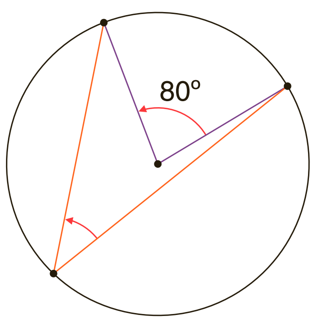


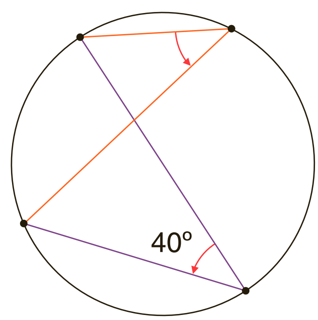


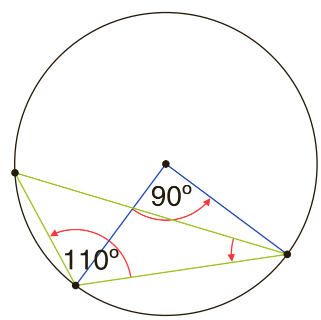


Respuestas: 40°, 40° y 25°

1'. Sin utilizar transportador, determina la medida de los ángulo señalados en rojo.





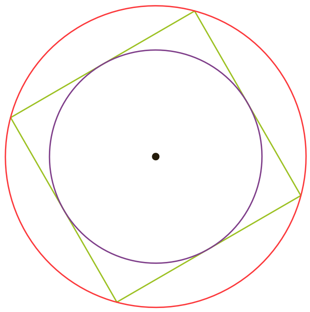


SECUENCIA 5. PROBLEMAS CON CURVAS

Reactivo 1

Respuesta: 12.5879 cm^2.

1. El cuadrado de la figura mide 4 cm de lado y la circunferencia mayor tiene radio igual a 2.83 cm.



¿Cuánto mide el área de la corona? (considera $\pi = 3.14$) ________

Escribe el procedimiento que utilizaste para calcular el área de la corona.

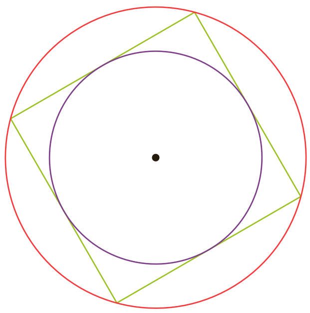
____

____

____

Respuesta: 50.3517 cm^2.

1'. El cuadrado de la figura mide 8 cm de lado y la circunferencia mayor tiene radio igual a 5.66 cm.



¿Cuánto mide el área de la corona? (considera $\pi = 3.14$) ________

Escribe el procedimiento que utilizaste para calcular el área de la corona.

____

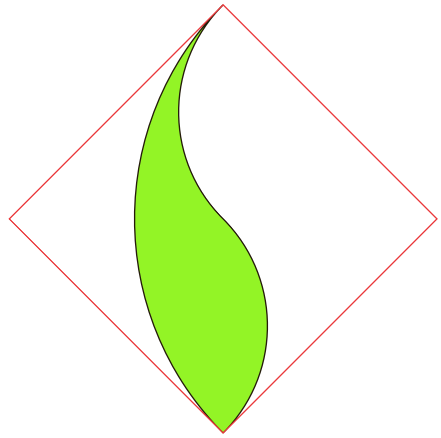
____

____

Reactivo 2

Respuesta: $4\pi - 8 = 4.56$ cm^2.

2. El cuadrado de la figura mide 4 cm de lado. Los tres arcos son parte de tres circunferencias.



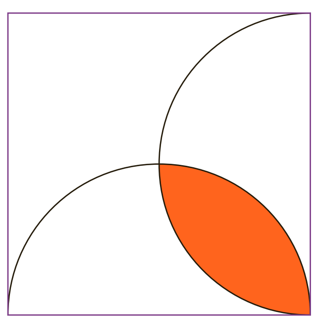
¿Cuánto mide el área de la figura sombreada? (considera $\pi = 3.14$).

____

Escribe el procedimiento que utilizaste para calcular el área de la figura sombreada. _______________

Respuesta: $2\pi - 4 = 2.28$ cm^2.

2'. El cuadrado de la figura mide 4 cm de lado. Los dos arcos son parte de dos circunferencias.



¿Cuánto mide el área de la figura sombreada? (considera $\pi = 3.14$).

____

Escribe el procedimiento que utilizaste para calcular el área de la figura sombreada. _______________

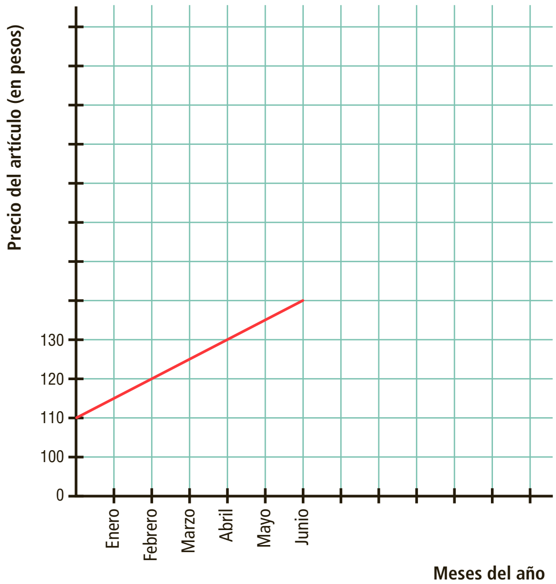
SECUENCIA 6. LA RAZÓN DE CAMBIO

Reactivo 1

1. La siguiente gráfica muestra los cambios en el precio de un artículo durante los primeros meses del año.

a) ¿Cuál es el incremento del artículo por mes?

b) ¿Cuál es la razón de cambio del artículo?



Respuestas:

a) 5 pesos.

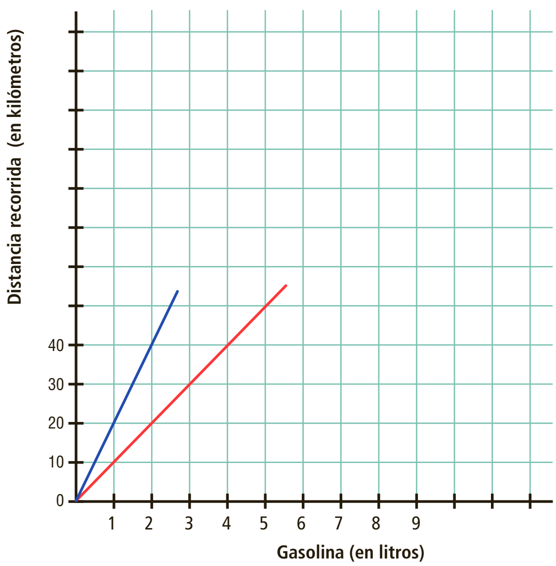
b) 5

1'. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por dos automóviles y la cantidad de gasolina que consumieron.

a) ¿Cuál es la razón de cambio del automóvil rojo?

b) ¿Cuál es la razón de cambio del automóvil azul?

c) ¿Qué automóvil tuvo un mejor rendimiento?



Respuestas:

a) 10

b) 20

c) El automóvil azul.

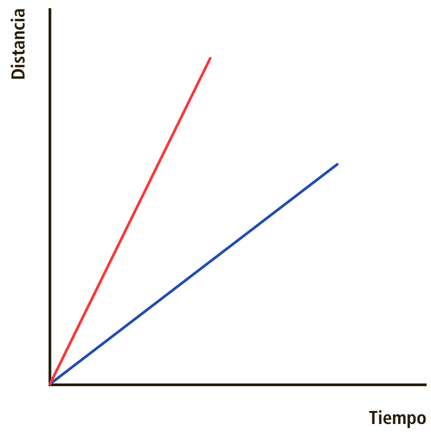
Reactivo 2

Respuestas:

a) El rojo.

b) Los alumnos podrían contestar algo como: porque la pendiente de la recta roja es mayor que la azul.

2. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por dos automóviles que iban a velocidad constante, y el tiempo que tardaron en recorrerla.



a) ¿Que automóvil tuvo una mayor razón de cambio? ________

b) Justifica tu respuesta ________

Respuesta: 5

2'. La expresión algebraica asociada a dos cantidades es $y = 5x + 1$.

¿Cuál es la razón de cambio asociada a esas dos cantidades? ________

SECUENCIA 7. DISEÑO DE EXPERIMENTOS Y ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Para la evaluación de la secuencia 7 no se proponen reactivos en el examen, debido a que los temas matemáticos que se abordan en ella no son susceptibles de valorarse con el tipo de preguntas de opción múltiple que sugerimos normalmente. Para evaluar esta secuencia utilice las actividades que se integran al portafolio.

Propuesta de examen bimestral
Bloque 2

SECUENCIA 8. ECUACIONES NO LINEALES

Reactivo 1

Respuesta: a)

1. Subraya el problema que puede resolverse con la ecuación $x^2 - 9 = 16$.

a) El cuadrado de un número menos 9 es igual a 16.

b) Un número menos 9 elevado al cuadrado es igual a 16.

c) A un número le resto 9, lo elevo al cuadrado y obtengo 16.

d) Resto 9 a un número, lo elevo al cuadrado y obtengo 16.

Respuesta: a)

1'. Subraya el problema que puede resolverse con la ecuación $16 - x^2 = 9$.

a) 16 menos el cuadrado de un número es igual a 9.

b) El cuadrado de un número menos 16 es igual a 9.

c) A un número le resto 16, lo elevo al cuadrado y obtengo 9.

d) Un número menos 4 elevado al cuadrado es igual a 9.

Reactivo 2

Respuesta: c)

2. Ana pensó un número y lo elevó al cuadrado, al resultado le sumó 9 y obtuvo 25. ¿Qué números pudo haber pensado Ana? Subraya la opción correcta.

a) 5 y –5

b) 5 y 4

c) 4 y –4

d) 3 y –3

Respuesta: c)

2'. Luis pensó un número y lo elevó al cuadrado, al resultado le restó 9 y obtuvo 16. ¿Qué números pudo haber pensado Luis? Subraya la opción correcta.

a) 4 y –4

b) 4 y 3

c) 5 y –5

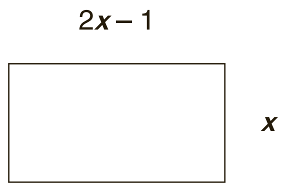
d) 3 y –3

Reactivo 3

3. El área del rectángulo es 120 u². Subraya la ecuación que hay que resolver para saber cuántas unidades mide su altura.

Respuesta: d)

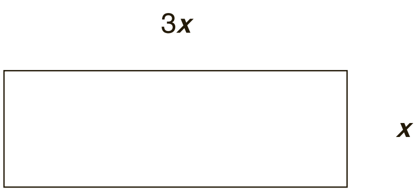
a) $3x - 1 = 120$
b) $2x^2 - 1 = 120$
c) $x^2 = 120$
d) $2x^2 - x = 120$



3'. El área de rectángulo es 75 u². Subraya la ecuación que hay que resolver para saber cuántas unidades mide su altura.

Respuesta: d)

a) $4x = 75$
b) $8x = 75$
c) $4x^2 = 75$
d) $3x^2 = 75$

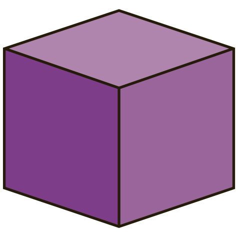


Reactivo 4

4. El volumen del cubo es 27 cm³. El área de una de sus caras es:

Respuesta: b)

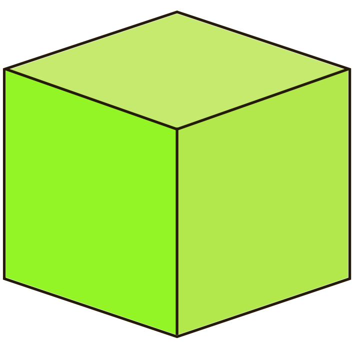
a) 3 cm²
b) 9 cm²
c) 27 cm²
d) 54 cm²



4'. El volumen del cubo es 64 cm³. El área de una de sus caras es:

Respuesta: b)

a) 4 cm²
b) 16 cm²
c) 18 cm²
d) 54 cm²



SECUENCIA 9. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR FACTORIZACIÓN

Reactivo 1

Respuesta: a)

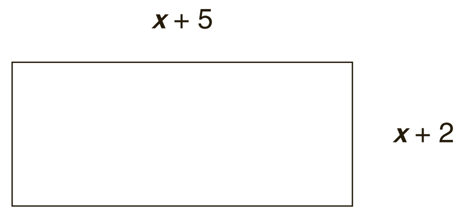
1. El área del rectángulo es 54 cm². Subraya la ecuación que se tiene que resolver para encontrar la medida en centímetros de sus lados.

a) $x^2 + 7x + 10 = 54$

b) $x^2 + 7x + 10 = 0$

c) $x^2 + 10 = 54$

d) $x^2 - 44 = 0$



Respuesta: a)

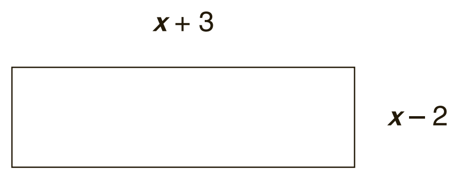
1'. El área del rectángulo es 36 cm². Subraya la ecuación que se tiene que resolver para encontrar la medida en centímetros de sus lados.

a) $x^2 + x - 6 = 36$

b) $x^2 - 5x - 6 = 36$

c) $x^2 - 6 = 36$

d) $x^2 - 42 = 0$



Reactivo 2

Respuesta:

$(x - 5)(x - 3) = 0$

$x_1 = 5,\ x_2 = 3$

2. Resuelve la ecuación factorizando.

$x^2 - 8x + 15 = 0$

Respuesta:

$(x - 6)(x - 2) = 0$

$x_1 = 6,\ x_2 = 2$

2'. Resuelve la ecuación factorizando.

$x^2 - 8x + 12 = 0$

Reactivo 3

Respuesta:

$x^2 - 3x - 70 = 0$

$(x - 10)(x + 7) = 0$

$x_1 = 10,\ x_2 = -7$

3. Resuelve la ecuación factorizando.

$x^2 - 3x = 70$

Respuesta:

$x^2 - 2x - 35 = 0$

$(x - 7)(x + 5) = 0$

$x_1 = 7,\ x_2 = -5$

3'. Resuelve la ecuación factorizando.

$x^2 - 2x = 35$

Reactivo 4

4. Completa la siguiente tabla

Soluciones de la ecuación	Ecuación factorizada	Ecuación en su forma general
$x_1 = 0$, $x_2 = 4$		
$x_1 =$ ______, $x_2 =$ ______	$(x - 2)(x + 3) = 0$	
$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______		$x^2 + 6x + 9 = 0$
$x_1 =$ ______, $x_2 =$ ______		$x^2 - 49 = 0$

4'. Completa la siguiente tabla.

Soluciones de la ecuación	Ecuación factorizada	Ecuación en su forma general
$x_1 = 0$, $x_2 = -3$		
$x_1 =$ ______ , $x_2 =$ ______	$(x - 7)(x + 10) = 0$	
$x_1 =$ ______ , $x_2 =$ ______		$x^2 - 2x - 48 = 0$
$x_1 =$ ______ , $x_2 =$ ______		$x^2 + 4x - 32 = 0$

4. Respuesta:

Soluciones de la ecuación	Ecuación factorizada	Ecuación en su forma general
$x_1 = 0$, $x_2 = 4$	$(x)(x - 4) = 0$	$x^2 - 4x = 0$
$x_1 = 2$, $x_2 = -3$	$(x - 2)(x + 3) = 0$	$x^2 + x - 6 = 0$
$x_1 = -3$, $x_2 = -3$	$(x + 3)(x + 3) = 0$	$x^2 + 6x + 9 = 0$
$x_1 = 7$, $x_2 = -7$	$(x - 7)(x + 7) = 0$	$x^2 - 49 = 0$

4'. Respuesta:

Soluciones de la ecuación	Ecuación factorizada	Ecuación en su forma general
$x_1 = 0$, $x_2 = -3$	$(x)(x + 3) = 0$	$x^2 + 3x = 0$
$x_1 = 7$, $x_2 = -10$	$(x - 7)(x + 10) = 0$	$x^2 + 3x - 70 = 0$
$x_1 = 8$, $x_2 = -6$	$(x - 8)(x + 6) = 0$	$x^2 - 2x - 48 = 0$
$x_1 = 4$, $x_2 = -8$	$(x - 4)(x + 8) = 0$	$x^2 + 4x - 32 = 0$

SECUENCIA 10. FIGURAS SEMEJANTES

Reactivo 1

Respuesta: inciso c)

1. De las siguientes afirmaciones:

I. Tienen ángulos correspondientes proporcionales.

II. Tienen ángulos correspondientes iguales.

III. Las medidas de los lados de uno de los polígonos son proporcionales a las medidas de los lados del otro.

IV. Las medidas de los lados de uno de los polígonos son iguales a las medidas de los lados del otro.

¿Cuáles son las dos condiciones para garantizar que dos polígonos sean semejantes:

a) I y III b) I y IV c) II y III d) II y IV

Respuestas: ángulos correspondientes iguales y las medidas de los lados de uno de los polígonos son proporcionales a las medidas de los lados del otro.

1'. ¿Cuáles son las dos condiciones para garantizar que dos polígonos sean semejantes?

Tienen ángulos correspondientes ______________________

Las medidas de los lados de uno de los polígonos son ____________ *a las medidas de los lados del otro.*

Reactivo 2.

Respuesta: c)

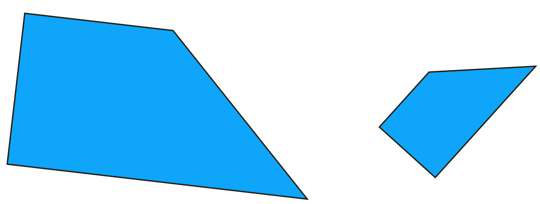
2. ¿Cuál es la razón de semejanza del trapecio grande respecto al pequeño?

a) $\frac{1}{5}$

b) 0.5

c) 2

d) 3



Respuesta: d)

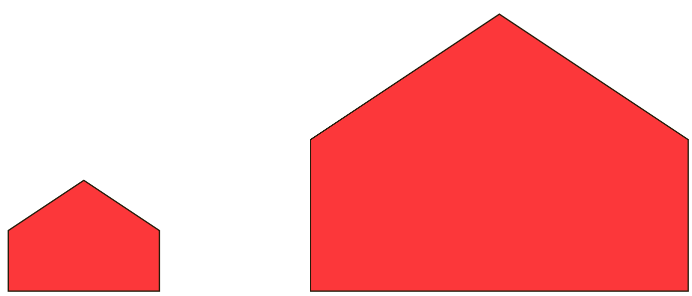
2'. ¿Cuál es la razón de semejanza del polígono pequeño con respecto al grande?

a) $\frac{1}{2}$

b) 2.5

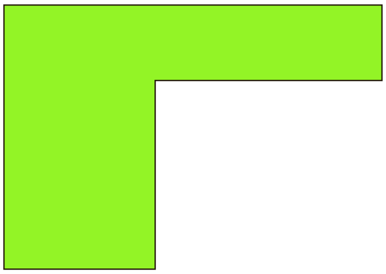
c) $\frac{5}{2}$

d) $\frac{2}{5}$



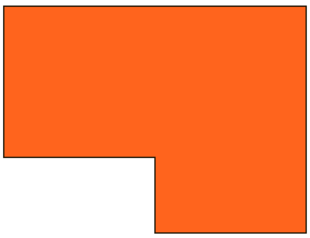
Reactivo 3

3. Traza un polígono semejante al siguiente de tal manera que que la razón de semejanza de este polígono con respecto al que traces sea de $\frac{2}{7}$.



Respuesta: la medida de los lados del polígono que tracen debe ser mayor.

3'. Traza un polígono semejante al siguiente de tal manera que la razón de semejanza de este polígono con respecto al que traces sea de $\frac{2}{3}$.



Respuesta: la medida de los lados del polígono que tracen debe ser mayor.

Reactivo 4.

4. Escribe en cada enunciado si es verdadero (V) o falso (F)

a) Todos los rectángulos son semejantes ______

b) Todos los hexágonos regulares son semejantes ______

c) Todos los pentágonos son semejantes ______

d) Algunos triángulos rectángulos son semejantes ______

Respuestas:

a) F

b) V

c) F

d) V

4'. Escribe en cada enunciado si es verdadero (V) o falso (F)

a) Algunos rectángulos son semejantes ______

b) Todos los triángulos isósceles son semejantes ______

c) Todos los cuadrados son semejantes ______

d) Todos los octágonos regulares son semejantes ______

Respuestas:

a) V

b) F

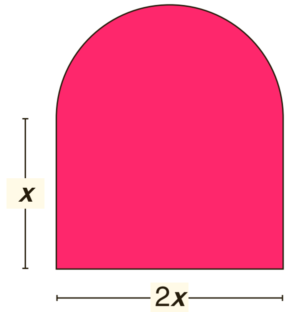
c) V

d) V

Reactivo 5

Respuesta: $12x + 3\pi x = 21.42x$

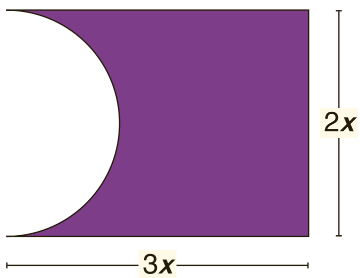
5. Considera la siguiente figura:



Se traza una figura semejante a la anterior de tal manera que el lado que mide x, en la nueva figura mide $3x$. ¿Cuál es el perímetro de la nueva figura? (considera $\pi = 3.14$). ______________________

Respuesta: $4x + \frac{\pi}{2}x = 5.57x$

5'. Considera la siguiente figura:



Se traza una figura semejante a la anterior de tal manera que el lado que mide $2x$, en la nueva figura mide x. ¿Cuál es el perímetro de la nueva figura? (considera $\pi = 3.14$). ______________________

SECUENCIA 11. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Reactivo 1

Respuesta: II, III y V.

1. Considera las siguientes afirmaciones. Dos triángulos son semejantes si:

I. Son triángulos isósceles

II. Tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados proporcionales

III. Son triángulos equiláteros

IV. Tienen igual un ángulo y un lado

V. Sus lados correspondientes son proporcionales

¿Cuáles de las afirmaciones anteriores son verdaderas? ____________

1'. Considera las siguientes afirmaciones. Dos triángulos son semejantes si:

I. Dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos del otro triángulo.

II. Dos lados de un triángulo son iguales a dos lados del otro triángulo.

III. Tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados proporcionales

IV. Sus ángulos correspondientes son iguales

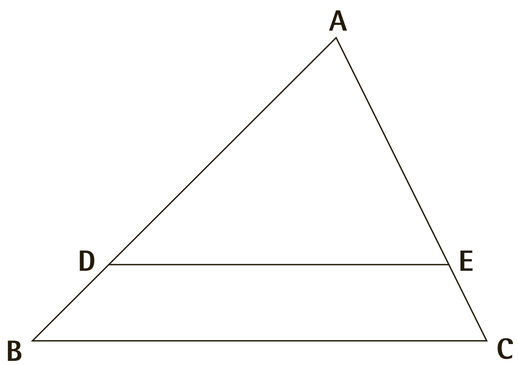
V. Tienen igual un ángulo y un lado

¿Cuáles de las afirmaciones anteriores son verdaderas? ______________

Respuesta: I, III y IV.

Reactivo 2

2. Se sabe que el segmento **DE** es paralelo al segmento **BC**.



¿Por qué podemos afirmar que el triángulo **ABC** es semejante al triángulo **ADE**? ______________________________

____

Respuesta: los ángulos correspondientes son iguales (comparten un ángulo y los otros dos ángulos son ángulos correspondientes entre paralelas).

2'. ¿Cuál criterio de semejanza de triángulos permite afirmar que todos los triángulos equiláteros son semejantes? ______________________________

____

Respuesta: el criterio de ángulos correspondientes iguales. Todos los triángulos equiláteros tienen tres ángulos de 60°.

Reactivo 3

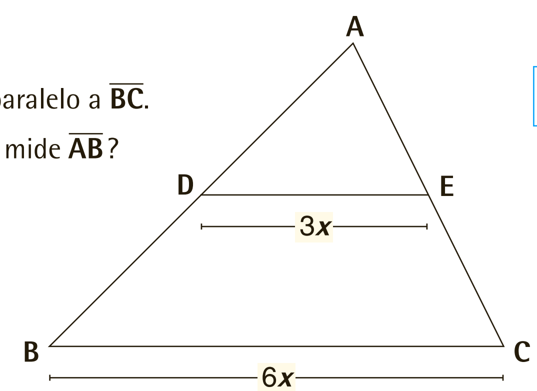
3. En la siguiente figura, $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$. Si $\overline{AD}$ mide 2.82 cm, ¿cuánto mide $\overline{AB}$?

   a) 1.41 cm

   b) 1.41x

   c) 5.64 cm

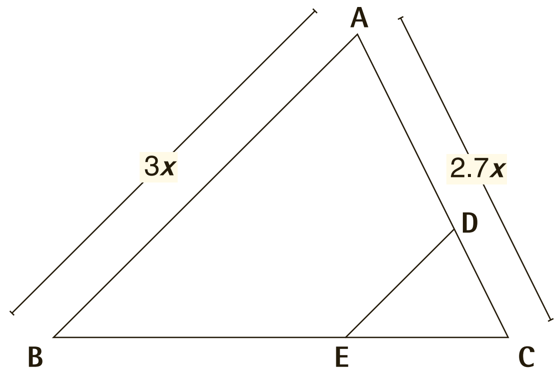
   d) 5.64x



Respuesta: c)

Respuesta: b)

3'. En la siguiente figura, $\overline{DE}$ mide x y es paralelo a $\overline{AB}$.



¿Cuánto mide $\overline{DC}$?

a) 0.9 cm

b) $0.9x$

c) $1.35x$

d) $8.1x$

Reactivo 4

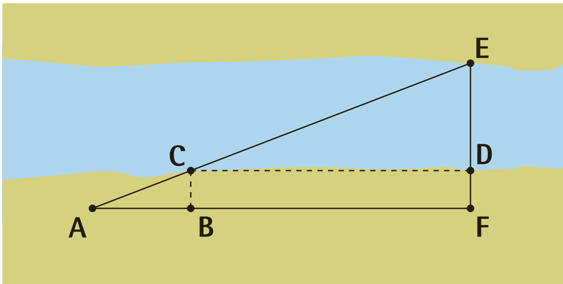
Respuesta: 9.6 m.

4. Un niño que mide 1.5 m proyecta una sombra de 0.5 m. A la misma hora, un árbol proyecta una sombra de 3.2 m, ¿cuál es la altura del árbol?

____

Respuesta: 22.5 m.

4'. En el siguiente diagrama, $\overline{EF}$ y $\overline{CB}$ son perpendiculares a la orilla del río, y $\overline{CD}$ es paralelo a $\overline{BF}$.



Si $\overline{AB}$ = 15 m, $\overline{AF}$ = 60 m y $\overline{CB}$ = 7.5 m, ¿cuánto mide el ancho del río?

____

SECUENCIA 12. ÍNDICES

Reactivo 1

1. La siguiente tabla muestra el número de bibliotecas públicas en operación en la República Mexicana de 2003 a 2006. Completa la tabla tomando como año de referencia o base el 2003.

Año	Número de bibliotecas	Índice (en porcentaje)	Variación
2003	6 610		
2004	6 810		
2005	7 010		
2006	7 210		

Fuente: *Sexto informe de Gobierno 2006.* Anexo estadístico.

a) ¿Qué significaría en esta situación el hecho de que un índice fuera negativo?

b) En 2005, la población en la República Mexicana era de 103 263 388 personas. ¿Cuántos habitantes por biblioteca hubo en 2005?

Respuestas:

a) Que el número de bibliotecas disminuyó (o que hay menos bibliotecas) con respecto al número de bibliotecas que había en el año base.

b) $\frac{103\ 263\ 388}{7\ 010} = 14\ 730.868$

1'. La siguiente tabla muestra el número de alumnos en miles que ingresaron al nivel superior durante cuatro periodos consecutivos. Completa la tabla tomando el periodo 1997-1998 como referencia o base.

Periodo	Número de alumnos (en miles)	Índice (en porcentaje)	Variación
1997-1998	1 727		
1998-1999	1 838		
1999-2000	1 963		
2000-2001	2 048		

Fuente: *Estadísticas Básicas*, SEP.

a) ¿Qué significaría en esta situación el hecho de que un índice fuera negativo?

b) De acuerdo con el número de alumnos que se han inscrito durante estos ciclos escolares y con las variaciones que han encontrado entre cada ciclo, ¿qué número de alumnos calculan que estuvieron inscritos en el ciclo 2001-2002?

Respuestas:

a) Que el número de alumnos de nuevo ingreso disminuyó con respecto al número de alumnos de nuevo ingreso en el periodo base o de referencia.

b) De acuerdo con la columna de variación aumentará un 24%, aproximadamente, con respecto al ciclo 1997-1998. Es decir que serán alrededor de 2 150 000 alumnos.

Respuesta: (tabla secuencia 12, reactivo 1).

Año	Número de bibliotecas	Índice (en porcentaje)	Variación
2003	6 610	100	0%
2004	6 810	103.0257	3.0257%
2005	7 010	106.0514	6.0514%
2006	7 210	109.0771	9.0771%

Respuesta: (tabla secuencia 12, reactivo 1').

Periodo	Número de alumnos (en miles)	Índice (en porcentaje)	Variación
1997-1998	1 727	100	0%
1998-1999	1 838	106.4273	6.4273%
1999-2000	1 963	113.6653	13.6653%
2000-2001	2 048	118.5871	18.5871%

Respuesta: la tercera opción.

En este experimento los diez papelitos simulan las paradas que hace la camioneta, y cada extracción representa a uno de los pasajeros. Por ejemplo, cuando se saca el primer papelito y sale 6, significa que una de las cinco personas baja en la parada 6. Se debe regresar el papelito ya que cualquiera de las otras cuatro personas podría bajar también en la parada 6.

SECUENCIA 13. SIMULACIÓN

Reactivo 1

1. Considera el siguiente problema:

Una camioneta de transporte colectivo realiza un recorrido en el que hay 10 paradas fijas. Si al salir de la terminal se han subido cuatro personas desconocidas entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que dos personas bajen en una misma parada?

Marca con una ✓ cuál de los siguientes experimentos usarías para simular el problema anterior.

- ☐ En una bolsa se ponen cuatro papelitos numerados del 1 al 4. En otra bolsa, se ponen diez papelitos numerados del 1 al 10. Se extrae un papelito de cada bolsa, se anotan los números y se regresa cada uno a su bolsa. Se hacen cuatro extracciones.
- ☐ En una bolsa se ponen diez papelitos numerados del 1 al 10. Se extrae un papelito, se anota el número y el papelito no se regresa a la bolsa. Se hacen cuatro extracciones.
- ☐ En una bolsa se ponen diez papelitos numerados del 1 al 10. Se extrae un papelito, se anota el número y se regresa a la bolsa. Se hacen cuatro extracciones.
- ☐ En una bolsa se ponen cuatro papelitos numerados del 1 al 4. Se extrae un papelito, se anota el número y se regresa a la bolsa. Se hacen cuatro extracciones.

1'. Considera el siguiente problema:

En la fábrica de focos A, se sabe que la producción tiene un 20% de focos defectuosos; mientras que la de la fábrica B tiene un 25%. Si se junta el mismo número de focos de cada fábrica y se escoge uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el foco escogido sea de la fábrica A y no tenga defecto?

Marca con una ✓ cuál de los siguientes experimentos realizarías para simular el problema anterior.

- ☐ Una bolsa con 200 canicas: 20 rojas, 25 azules y 155 amarillas; se extrae una canica, se anota el color y se regresa la canica a la bolsa.
- ☐ Una bolsa con 200 canicas: 100 rojas y 100 azules, 20 de las canicas rojas y 25 de las azules están marcadas con una "d"; se extrae una canica, se anota el color y si tiene o no la letra "d"; luego se regresa la canica a la bolsa.
- ☐ Dos bolsas de canicas: la primera tiene 20 canicas azules y 80 rojas, y la segunda bolsa tiene 25 canicas azules y 75 canicas rojas; se extrae una canica de cada bolsa, se anota el color y se regresan.
- ☐ Dos bolsas de canicas: la primera tiene 100 canicas rojas, 20 están marcadas con una "d", y la segunda bolsa tiene 100 canicas azules y 25 están marcadas con una "d"; se extrae una canica de cada bolsa, se anota el color de cada una y si tiene o no la letra "d"; luego se regresan las canicas a la bolsa.

Respuesta: la segunda opción.

Cada conjunto de 20 canicas representa los focos de una fábrica y las canicas marcadas con la letra "d" representan a los focos defectuosos.

Bibliografía

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, 23 agosto 2003 [recuperado el 3 de abril de 2008 de http://www.inegi.gob.mx].

SEP. *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*. México, 2000.

- *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*. México, 2000.

- 24 septiembre 2007 [recuperado el 3 de abril de 2008 de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/index.htm].

SEP/ILCE. *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (Emat). Educación Secundaria*. México, 2000.

- *Geometría dinámica. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (Emat). Educación Secundaria*. México, 2000.

- *Biología. Enseñanza de las Ciencias a través de Modelos Matemáticos (Ecamm). Educación Secundaria.* México, 2000.

MATEMÁTICAS III

Libro para el maestro

se imprimió por encargo de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos,
en los talleres de ,
el mes de de 2008.
El tiraje fue de ejemplares.