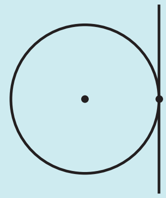
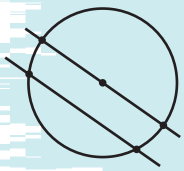
>>> A lo que llegamos

En el plano, una recta puede intersecar a una circunferencia en un punto, intersecarla en dos puntos o no intersecarla.

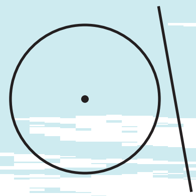
Las rectas que intersecan a la circunferencia en un solo punto se llaman **rectas tangentes** a la circunferencia. Al punto en el que la tangente interseca a la circunferencia se llama **punto de tangencia**. La distancia que hay del centro a la recta tangente es igual al radio.





Las rectas que intersecan en dos puntos a la circunferencia se llaman **rectas secantes**. La distancia del centro de la circunferencia a la recta secante es menor que el radio.

Las rectas que no intersecan a la circunferencia se llaman **rectas exteriores**. La distancia del centro de la circunferencia a la recta exterior es mayor que el radio.

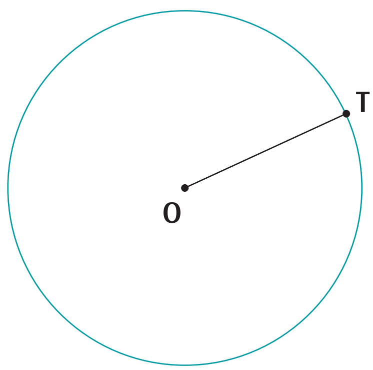


TRAZOS DE TANGENTES

SESIÓN 2

>>> Consideremos lo siguiente

Tracen una recta perpendicular al segmento **OT** por el punto **T**.



¿La recta que trazaron es exterior, tangente o secante a la circunferencia? __________

Justifiquen su respuesta. ____________________________________

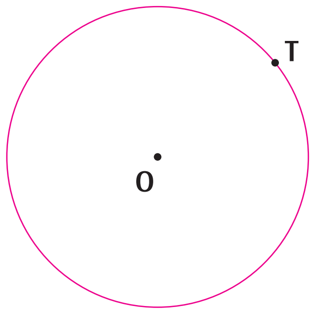
____

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Traza una recta secante a la circunferencia que pase por el punto **T** y que no pase por **O**.



a) Llama **S** al otro punto en el que la secante corte a la circunferencia y une los puntos para formar el triángulo **OTS**. Este triángulo es isósceles, ¿por qué?

____

b) Marca con rojo los ángulos iguales del triángulo **OTS**, ¿los ángulos que marcaste miden 90°? __________

c) ¿La recta secante que trazaste es perpendicular a $\overline{OT}$? ______ . ¿Por qué? ________

____

d) Traza otras rectas secantes a la circunferencia por **T**. ¿Alguna de las rectas que trazaste es perpendicular a $\overline{OT}$? ______

e) ¿Crees que se pueda trazar una recta secante por el punto **T** de manera que forme un ángulo de 90° con $\overline{OT}$? ______

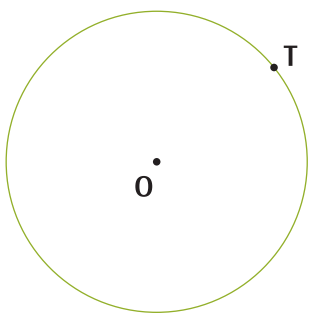
Justifica tu respuesta ______________________________

____

Recuerda que:

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo suman 180°.

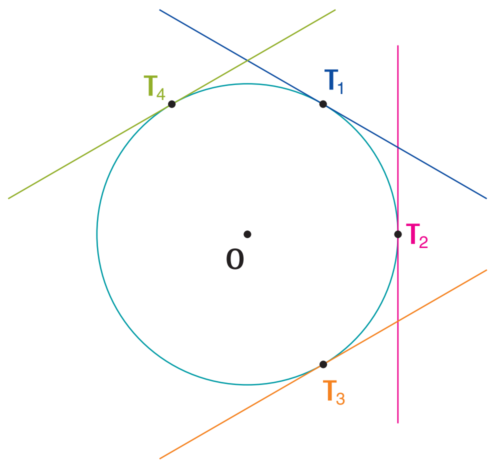
II. Traza una recta exterior a la circunferencia que pase por el punto **T**.



¿Pudiste trazar la recta? ______ . ¿Por qué? ______________________________

____

III. En la circunferencia se trazaron cuatro rectas tangentes.



Traza los radios OT_1, OT_2, OT_3 y OT_4. Mide con tu transportador el ángulo que forma cada tangente con el radio por el punto de tangencia.

a) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_1 y el radio OT_1?

____

b) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_2 y el radio OT_2?

____

c) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_3 y el radio OT_3?

____

d) ¿Cuánto miden los ángulos formados por la recta tangente en T_4 y el radio OT_4?

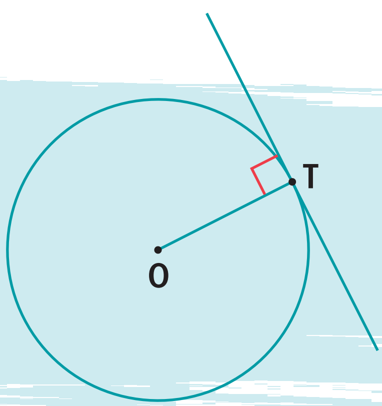
____

Esta propiedad que observaste con estas rectas tangentes se cumple para cualquier recta tangente.

Comparen sus respuestas. Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen su respuesta y su justificación.

>>> A lo que llegamos

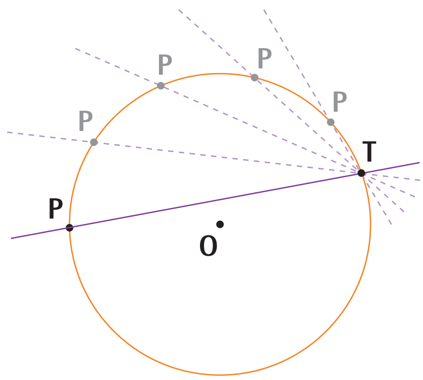
Sea **T** un punto sobre una circunferencia de centro **O**. La **recta perpendicular** al radio **OT** por el punto **T** es la **recta tangente** a la circunferencia por el punto **T**.



>>> Lo que aprendimos

1. En la circunferencia se trazó la secante **TP**.

La recta secante se fija en el punto **T** y se gira de manera que el punto de corte **P** se vaya acercando a **T**.



a) ¿Qué pasa con la recta secante cuando el punto **P** coincide con el punto **T**?

____

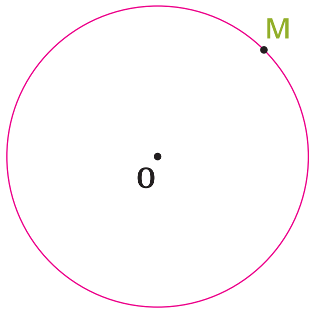
Justifica tu respuesta. _______________

____

b) ¿Qué pasa con la medida del ángulo entre el radio y la recta secante?

____

2. Traza una recta tangente a la circunferencia por el punto **M**.



Describe tu procedimiento. _______________

____

____

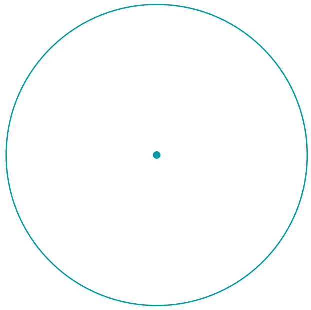
Justifica que la recta que obtuviste con ese procedimiento es una recta tangente.

____

____

____

3. Traza un cuadrado que inscriba al círculo dado. Es decir, que cada uno de sus lados sea una recta tangente de la circunferencia.



Si el radio del círculo mide 2 cm, ¿cuánto mide el lado del cuadrado? ____________

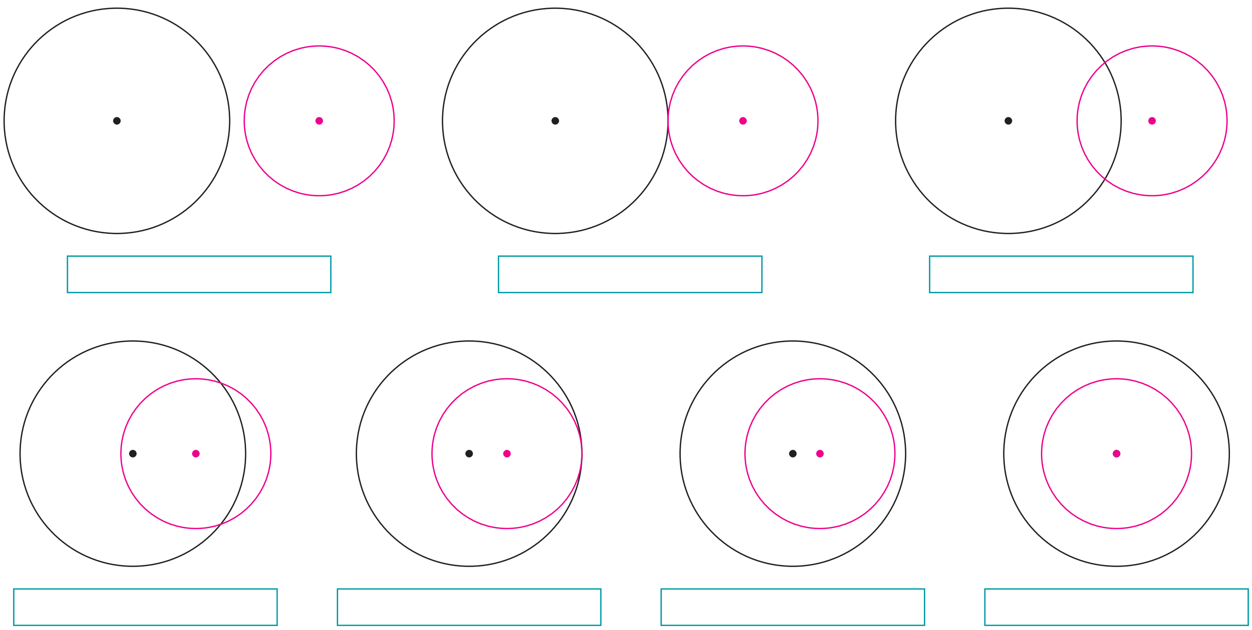
ENTRE CIRCUNFERENCIAS

SESIÓN 3

>>> Para empezar

I. En la siguiente sucesión de imágenes, la circunferencia pequeña se va acercando a la circunferencia grande.

a) Observa las posiciones sucesivas que adquieren las dos circunferencias.



b) De los siguientes nombres, elije el que corresponda a cada una de las posiciones de las circunferencias y anótalo en el recuadro.

1 Circunferencias tangentes externas
2 Circunferencias ajenas internas
3 Circunferencias secantes
4 Circunferencias concéntricas
5 Circunferencias ajenas externas
6 Circunferencias tangentes internas

Comparen sus respuestas.

II. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias concéntricas? ____________

b) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias ajenas? ____________

c) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias tangentes? ____________

d) ¿Cuántos puntos en común tienen dos circunferencias secantes? ____________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Qué diferencia hay entre circunferencias ajenas externas y circunferencias ajenas internas? ¿Qué diferencia hay entre circunferencias tangentes externas y circunferencias tangentes internas?

>>> A lo que llegamos

Dos circunferencias pueden ser:

Ajenas, cuando no tienen puntos en común. Estas circunferencias pueden ser **externas** o **internas**. Un caso particular de éstas son las **circunferencias concéntricas** cuya característica es que tienen el mismo centro.

Tangentes, cuando tienen un solo punto en común. Estas circunferencias pueden ser **externas** o **internas**.

Secantes, cuando tienen dos puntos en común.

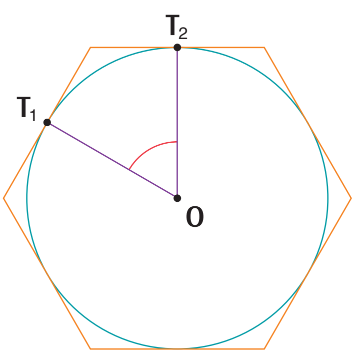
SESIÓN 4

ALGUNOS PROBLEMAS

>>> Lo que aprendimos

Resuelve los problemas de esta sesión sin utilizar transportador.

1. La circunferencia de centro **O** está inscrita en un hexágono regular. T_1 y T_2 son puntos de tangencia.



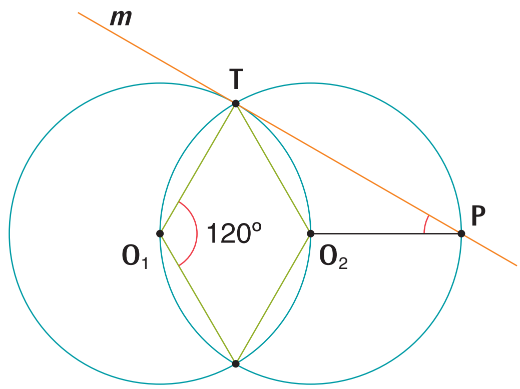
a) ¿Cuánto miden los ángulos internos de un hexágono regular? __________

b) ¿Cuánto miden los ángulos formados por una tangente y el radio trazado al punto de tangencia? ____________

c) ¿Cuánto suman los ángulos internos de un cuadrilátero? ____________

d) ¿Cuánto mide $\measuredangle T_1 O T_2$? ____________

2. Las circunferencias con centros $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$ tienen radios iguales y cada una pasa por el centro de la otra. La recta ***m*** es tangente en **T** a la circunferencia con centro $\mathbf{O_1}$ y es secante a la circunferencia con centro en $\mathbf{O_2}$. Además, los puntos $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$ y **P** son colineales.



¿Qué tipo de triángulo es el $\mathbf{PO_1T}$? ____________

¿Cuánto mide el ángulo $\mathbf{TO_1P}$? ____________

¿Cuánto mide $\measuredangle\mathbf{TPO_2}$? ____________

Justifica tu respuesta. ____

____

____

3. Sean $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ circunferencias con centros $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$, respectivamente, tangentes en **T**. Traza la recta tangente a la circunferencia $\mathbf{C_1}$ por **T** y la tangente a $\mathbf{C_2}$ por **T**.

Toma en cuenta que en las circunferencias tangentes se cumple que la recta determinada por los centros pasa por el punto de tangencia de las circunferencias.

¿Qué tienen en común las rectas tangentes que trazaste? ____________________

Justifica tu respuesta. ____

____

____

Ahora sabes que una recta y una circunferencia pueden tener distintas posiciones entre sí. Además conociste algunas propiedades que permiten resolver diversos problemas.

>>> Para saber más

Sobre la construcción de una recta tangente a una circunferencia y de circunferencias tangentes, consulta:
http://www.educacionplastica.net/tangen.htm
Ruta 1: Construcción paso a paso
Ruta 2: Ejercicios para practicar la construcción
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].

SECUENCIA 4

Ángulos en una circunferencia

En esta secuencia determinarás la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.

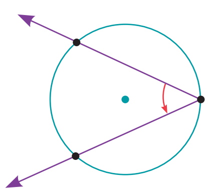
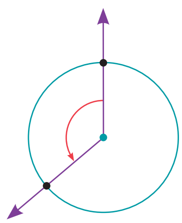
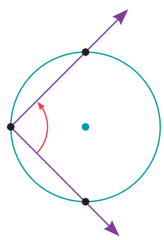
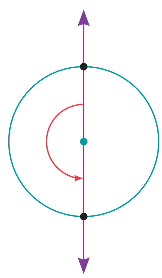
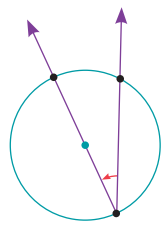
SESIÓN 1

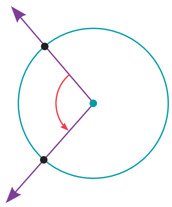
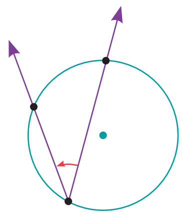
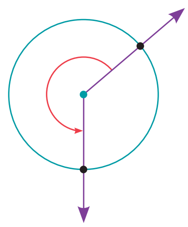
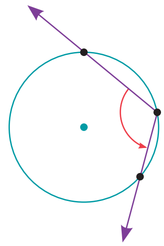
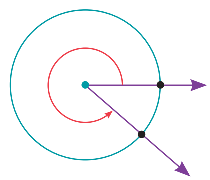
DOS ÁNGULOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

>>> Para empezar

I. Un ángulo en una circunferencia se clasifica según su vértice esté sobre la circunferencia o coincida con el centro de la circunferencia. En el primer caso, se trata de *ángulos inscritos*; en el segundo, de *ángulos centrales*.

Anota en cada ángulo "ángulo central" o "ángulo inscrito" segun corresponda.

Comparen sus respuestas.

II. Dibuja los ángulos que se piden o explica por qué no es posible dibujarlos.

a) Un ángulo central tal que uno de sus lados sea una tangente.

b) Un ángulo inscrito tal que uno de sus lados sea un diámetro.

c) Un ángulo central que mida 90°.

d) Un ángulo inscrito tal que su vértice esté fuera de la circunferencia.

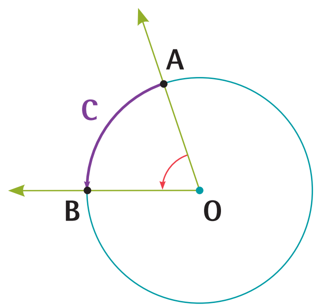
Comparen sus dibujos y verifiquen que cumplen con las condiciones pedidas.

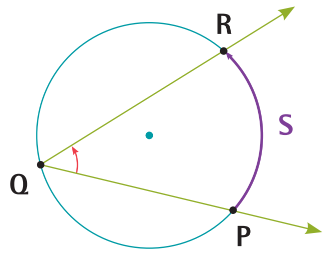
SESIÓN 2

RELACIONES A MEDIAS

>>> Para empezar

Los lados de cualquier ángulo en una circunferencia, inscrito o central, determinan un arco en la circunferencia. En estas circunferencias el arco determinado por los ángulos dados está marcado con morado. Se dice que los arcos son *subtendidos* por los ángulos que los determinan.





El arco **C** es subtendido por el ∡**AOB**; el arco **S** es subtendido por el ∡**PQR**.

En cada circunferencia marquen con azul el arco que subtienden los ángulos centrales y con rosa el arco que subtienden los ángulos inscritos.

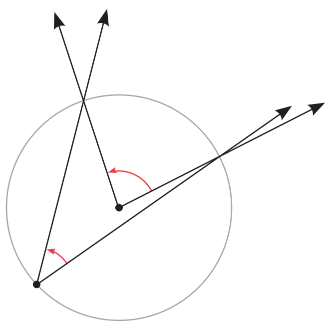


Figura 1

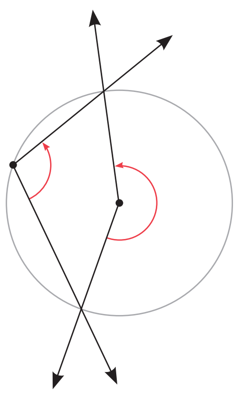


Figura 2

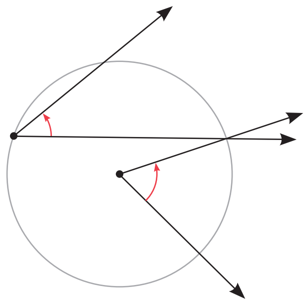


Figura 3

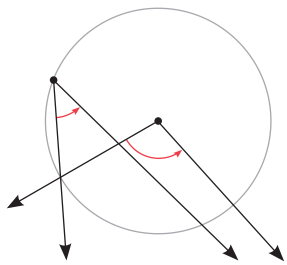


Figura 4

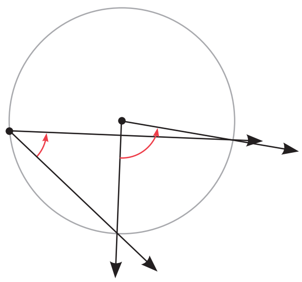


Figura 5

¿En qué circunferencias se cumple que el ángulo central subtiende el mismo arco que el ángulo inscrito? ____

>>> Consideremos lo siguiente

Midan con su transportador los ángulos centrales y los ángulos inscritos y anoten los datos obtenidos.

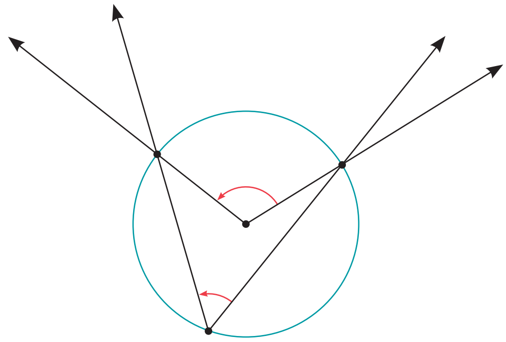


Figura 6

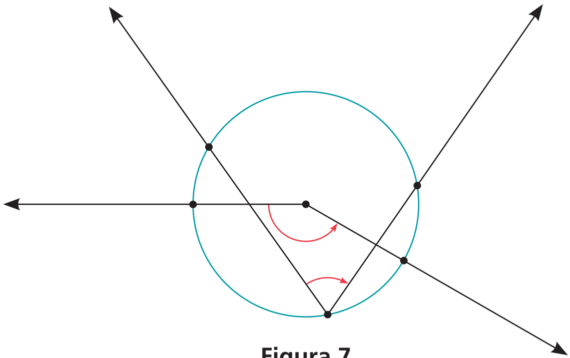


Figura 7

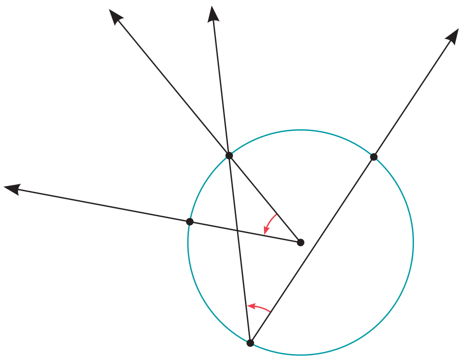


Figura 8

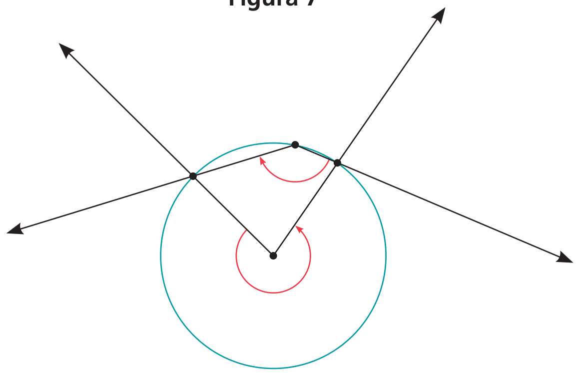


Figura 9

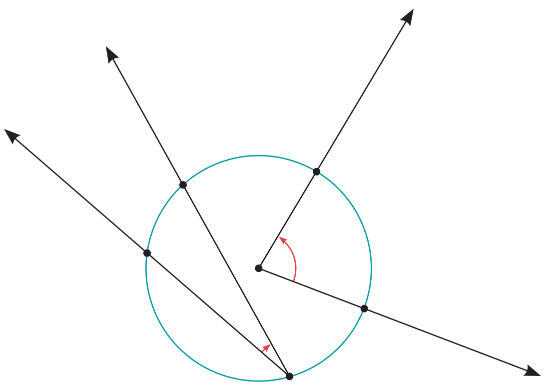


Figura 10

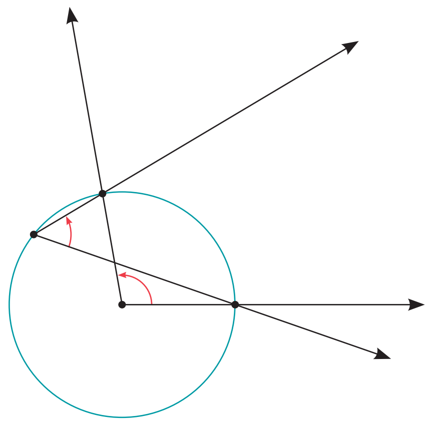


Figura 11

a) ¿En cuáles de estas figuras se cumple que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central? __________ , __________ y __________

b) Según los ángulos anteriores, ¿qué condición cumplen el ángulo inscrito y el central para que la medida del primero sea la mitad de la medida del segundo?

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Marquen los arcos subtendidos por los ángulos inscrito y central en cada uno de las figuras del apartado *Consideremos lo siguiente*.

a) ¿En cuáles de las figuras los ángulos inscrito y central subtienden el mismo arco?

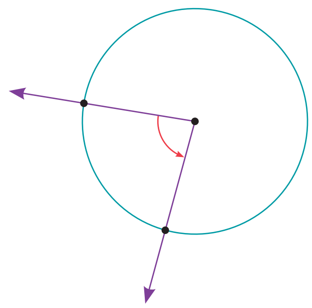
____

b) En cada una de las figuras que anotaron en el inciso anterior, ¿qué relación encuentran entre las medidas de los ángulos inscritos y centrales? _______________

____

____

II. En la siguiente circunferencia se dibujó un ángulo central de 84°. Dibujen dos ángulos inscritos que subtiendan el mismo arco que el ángulo central dado.



a) Con su transportador, midan los ángulos inscritos que dibujaron. ¿Cuánto miden?

____

b) ¿Qué relación hay entre la medida de cada ángulo inscrito dibujado y la medida del ángulo dado? _______________

____

____

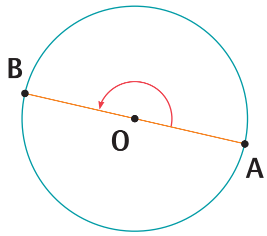
c) ¿Creen que se cumpla la misma relación para cualquier otro ángulo inscrito que subtienda el mismo arco que el ángulo central dado? _______________

Comparen sus respuestas. Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

A partir de los ejemplos trabajados, se puede suponer que un ángulo inscrito y uno central cumplen con la siguiente relación: cuando el ángulo inscrito y el ángulo central subtienden el mismo arco, la medida del primero es la mitad de la medida del segundo.

III. Tracen en la circunferencia un ángulo inscrito de tal manera que sus lados pasen por los extremos del diámetro **AB**.



a) ¿El ∡**AOB** es central o inscrito? ____________ ¿Por qué? ____________

b) ¿Cuánto mide el ∡**AOB**? ____________

c) ¿Cuánto mide el ángulo inscrito que trazaron? ____________

Tracen tres ángulos inscritos de manera que sus lados pasen por los puntos **A** y **B**, y que los vértices no coincidan con **A** o con **B**.

d) ¿Los ángulos que trazaron miden lo mismo? ______. ¿Cuánto miden? ______

e) ¿Será posible trazar un ángulo inscrito que sus lados pasen por los extremos del diámetro y que su medida sea menor que 90°?

Justifiquen sus respuestas. ____________

Comparen y comenten sus respuestas.

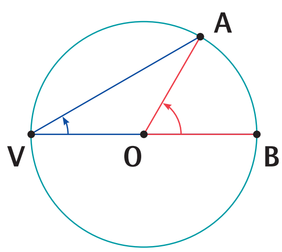
SESIÓN 3

PROBEMOS QUE UNO DE LOS ÁNGULOS ES LA MITAD DEL OTRO

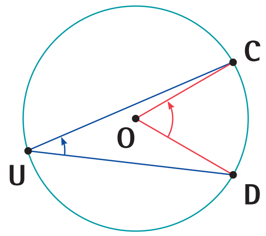
>>> Para empezar

En la sesión 2 se afirmó que *cuando un ángulo inscrito y uno central subienden el mismo arco, la medida del primero es la mitad de la medida del segundo*, a partir de comprobar que la relación se cumplía en varios ejemplos. Sin embargo, aunque la relación se cumple en los ejemplos vistos no se puede garantizar que se cumpla siempre. En esta sesión probarás que esta relación se cumple para cualquier pareja de ángulos central e inscrito que subtiendan el mismo arco.

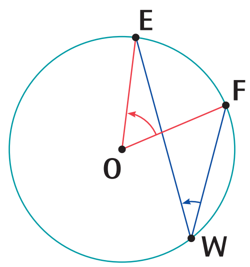
Un ángulo inscrito y un ángulo central que subtienden el mismo arco pueden correspon-der a tres casos diferentes:



Caso I



Caso II



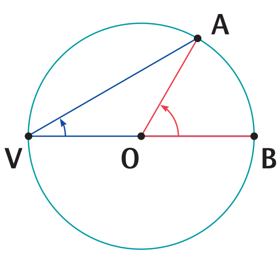
Caso III

Comenten en qué se distingue cada caso.

>>> Manos a la obra

I. Caso I. Observa que $\overline{VB}$, además de ser un lado del ángulo inscrito, es un diámetro de la circunferencia. Otra característica es que el lado **OB** está sobre el lado **VB**.

Elije una de las opciones para completar el siguiente texto y justifica tu elección.



Caso I

*El ∡**BOA** es un ángulo* ________________ . *El ∡**BVA** es un ángulo* ________________ .
(central / inscrito) (central / inscrito)

*El △**VOA** es* ________________ *porque* ________________________________
(isósceles / equilátero)

de ahí que los ángulos ____________ *y* ____________ *sean iguales.*

*∡**AOV** + ∡**BOA** =* ____________ *porque* ________________________________
(90° / 180°)

*∡**AOV** + ∡**OVA** + ∡**VAO** =* ____________ *porque* ________________________________
(180° / 360°)

*Comparando las dos igualdades anteriores se observa que ∡**BOA** =* ______________
(∡AOV + ∡OVA / ∡OVA + ∡VAO)

*ya que ∡**AOV** + ∡**BOA** = ∡**AOV** + ∡**OVA** + ∡**VAO** porque* ________________ .

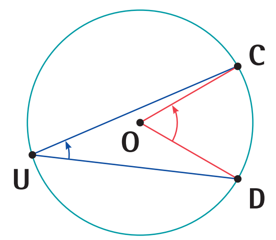
*De esta igualdad se obtiene que el ∡**BOA** es* ________________ *del ∡**BVA**.*
(el doble / la mitad)

*Lo que se puede escribir como: La medida del ángulo central **BOA** es el doble de la medida del ángulo **BVA**.*

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Para completar el texto fue importante tomar en cuenta que uno de los lados del ángulo inscrito es también diámetro de la circunferencia y que un lado del ángulo central también está sobre el diámetro? ¿Por qué?

II. Caso II. Se observa que ninguno de los lados del ángulo inscrito es diámetro de la circunferencia, por esta razón se debe dar una justificación de que en este caso también se cumple la relación entre las medidas de los ángulos inscrito y central que subtienden el mismo arco.



Caso II

Traza el diámetro determinado por $\overline{\mathbf{OU}}$ y denota el otro extremo del diámetro con **X**.

a) El diámetro **UX** dividió a los ángulos dados en dos ángulos cada uno. Expresa cada ángulo señalado como suma de los ángulos que formaste al trazar $\overline{\mathbf{UX}}$.

∡**DOC** = ____________________

∡**DUC** = ____________________

b) Observa que al trazar el diámetro **UX** de la pareja de ángulos del caso II, se formaron dos parejas de ángulos como la del caso I. Utiliza el resultado obtenido en el caso I para responder:

¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos **XUC** y **XOC**? ____________

¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos **DUX** y **DOX**? ____________

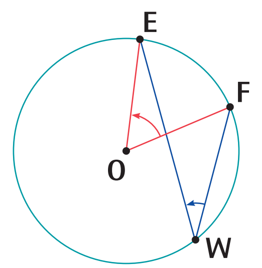
c) Utiliza tus respuestas al inciso anterior y formula una justificación de que la medida del ∡**DUC** es la mitad de la medida del ∡**DOC**? ______________________________

____

____

Comparen sus justificaciones.

III. Da una justificación de que para el **caso III** también se cumple la relación entre las medidas de un ángulo inscrito y uno central que subtienden el mismo arco.



Caso III

Traza el diámetro determinado por $\overline{\mathbf{WO}}$ y denota el otro extremo del diámetro con **Y**. Al trazar $\overline{\mathbf{WY}}$, se identifican dos nuevas parejas de ángulos que, cada una, satisface el caso I

a) La primera pareja consta de los ángulos **FWY** y **FOY**, la segunda de los ángulos **EWY** y **EOY**.

Expresa cada ángulo original como la diferencia de dos de los nuevos.

∡**FWE** = ______________________________

∡**FOE** = ______________________________

b) Utiliza el resultado obtenido del caso I para responder:

¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos **FWY** y **FOY**? ____________

¿Qué relación hay entre las medidas de **EWY** y **EOY**? ____________________

c) Da una justificación de que la medida del ∡**FWE** es la mitad de la medida del ∡**FOE**.

____

____

____

Comparen sus justificaciones.

>>> A lo que llegamos

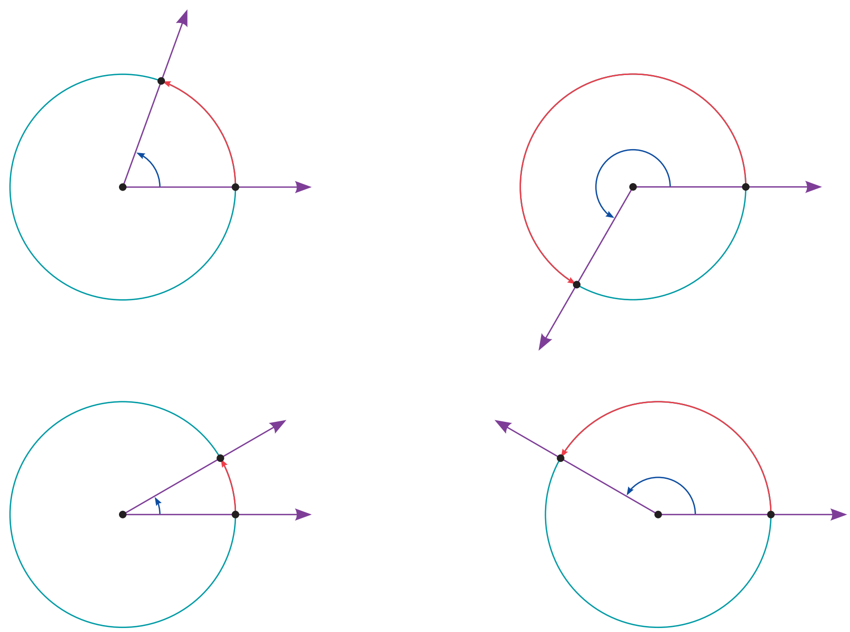
Cualquier pareja de ángulos inscrito y central cae en alguno de los casos examinados, así que la justificación que se mostró en esta sesión garantiza que la relación "la medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco", se cumple siempre que los ángulos inscrito y central subtiendan el mismo arco.

SESIÓN 4

PROBLEMAS DE MEDIDA

>>> Lo que aprendimos

1. Sin utilizar transportador dibujen en cada circunferencia un ángulo inscrito de manera que su medida sea la mitad de la medida del ángulo central dado.

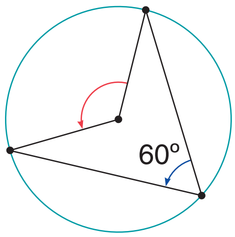


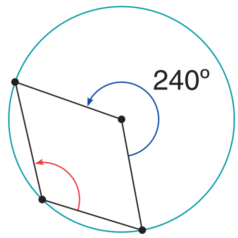
2. Dibujen una semicircunferencia y llamen a sus extremos **C** y **D**. Elijan un punto P sobre la semicircunferencia que no pertenezca al diámetro.

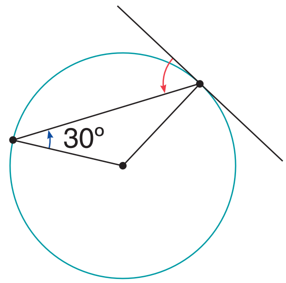
¿El △**CDP** es un triángulo rectángulo? ______________ ¿Por qué? __________________

____

3. Sin usar transportador, determinen y anoten la medida de cada uno de los ángulos marcados en rojo.

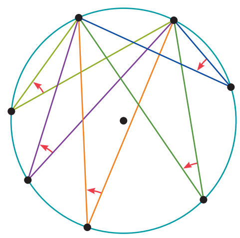






Comparen y justifiquen sus respuestas.

4. En la circunferencia se trazaron ángulos inscritos que subtienden el mismo arco que un ángulo central de 50°.



a) ¿Cuánto miden los ángulos inscritos? ______________

b) ¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco? ________

Comparen y justifiquen sus respuestas.

La relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco, permite resolver múltiples problemas.

>>> Para saber más

Sobre ángulos en una circunferencia, consulten:
http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/capaz_d3/index.html
Ruta 1: Ángulos centrales
Ruta 2: Ángulos inscritos
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Eduación y Ciencia. España.

Problemas con curvas

En esta secuencia determinarás la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, de área de sectores circulares y de coronas.

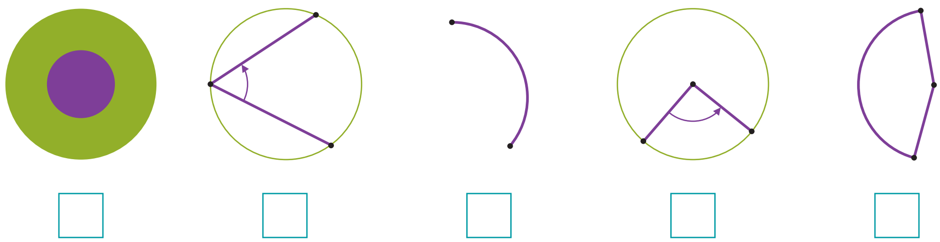
SESIÓN 1

SÓLO UNA PARTE

>>> Para empezar

Relacionen cada figura con su nombre.

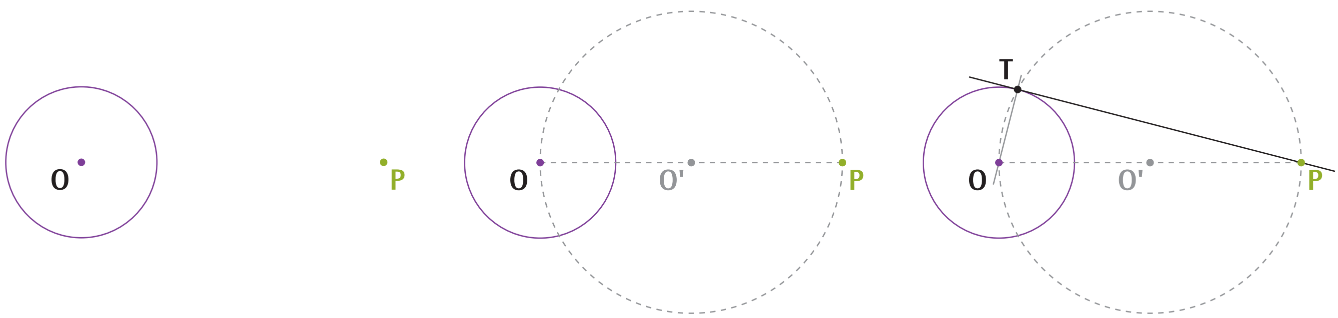
1. **Ángulo central**
2. **Sector circular**
3. **Corona**
4. **Ángulo inscrito**
5. **Arco**



Recuerden que para calcular el área y el perímetro de un círculo se utiliza el número π (Pi). Para realizar cálculos pueden tomar una aproximación a dos decimales para el valor de π, por ejemplo 3.14.

>>> Lo que aprendimos

1. En el siguiente esquema se muestra una forma de trazar con exactitud una recta tangente a la circunferencia de centro **O** desde el punto **P**. La recta tangente está determinada por el segmento **PT**.



Paso 1 **Paso 2** **Paso 3**

a) Describe el procedimiento para trazar la recta **PT**. ____________________

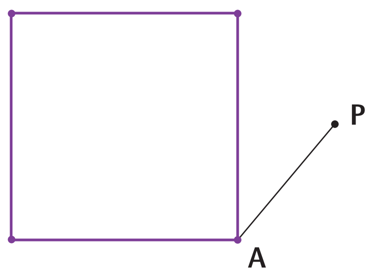
____

b) Justifica que la recta determinada por $\overline{\mathbf{PT}}$ es tangente a la circunferencia.

____

____

2. En el esquema siguiente el lado del cuadrado mide 3 cm. El punto **P** se mueve manteniendo una distancia de 2 cm con respecto al vértice **A**.



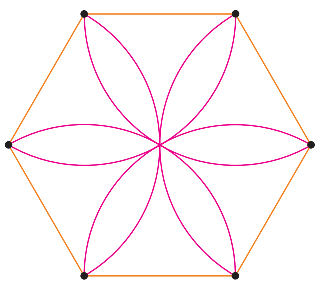
a) ¿Qué figura determina el punto **P**? ______________________

b) ¿Cuánto mide el perímetro de dicha figura? __________

c) Toma en cuenta sólo la parte de la figura que es externa al cuadrado, ¿cuánto mide el área de esa parte de la figura? __________

d) Considera un hexágono regular de 2 m de lado en lugar de un cuadrado, ¿cuánto mediría el área de la figura que determina el punto **P** fuera del hexágono? __________

3. En el siguiente dibujo el hexágono regular mide de lado 2 cm y de apotema 1.73 cm. Reprodúcelo en tu cuaderno.

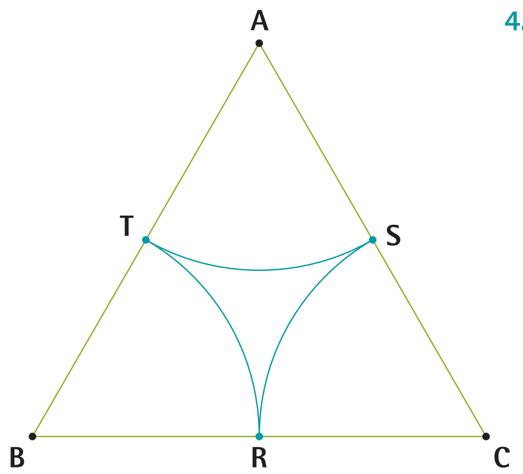


Recuerda que:

Un hexágono regular se puede dividir en 6 triángulos equiláteros congruentes.

a) ¿Cuánto mide el perímetro de la flor? __________

b) ¿Cuánto mide el área de la flor? __________



4. En el triángulo equilátero **ABC** de lado 6 cm se trazaron tres arcos con centro en sus vértices y radio la mitad de su lado, como se muestra en la figura. La altura del triángulo mide 5.19 cm.

a) ¿Cuánto mide el perímetro de la región determinada por los tres arcos? ________

b) ¿Cuánto mide el área del triángulo **ABC**? ________

c) ¿Cuánto mide el área del sector circular **BTR**? ________

d) ¿Cuánto mide el área de la región determinada por los tres arcos? ________

SESIÓN 2

LO QUE RESTA

>>> Lo que aprendimos

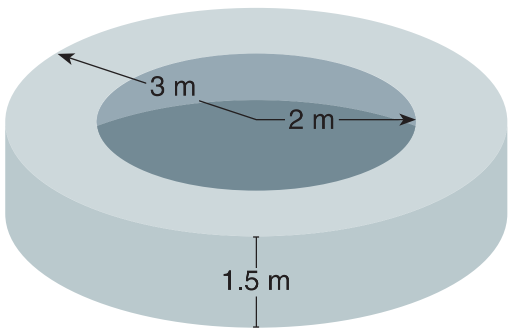
1. Dibuja dos circunferencias concéntricas cuyos radios midan 1 cm y 3 cm respectivamente.

a) ¿Cuánto mide el área que encierra la circunferencia de radio 1 cm? ________

b) ¿Cuánto mide el área que encierra la circunferencia de radio 3 cm? ________

c) ¿Cuánto mide el área de la región comprendida entre las dos circunferencias? ________

2. En el siguiente dibujo se muestra el esquema de una fuente y sus dimensiones.



a) ¿Cuánto mide el área de la cara lateral de la fuente?

____

b) ¿Cuánto mide el área de la cara superior de la fuente?

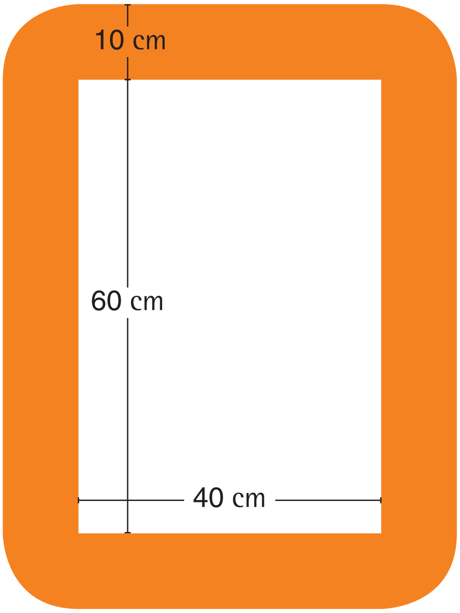
____

DE TODO UN POCO

SESIÓN 3

>>> Lo que aprendimos

1. Calcula el área de la figura anaranjada.



2. Un perro está atado a una cadena que le permite un alcance máximo de 2 m. La cadena está unida a una argolla que se desplaza en una barra en forma de **L**, cuyos segmentos miden 2 m y 4 m.

a) Dibuja la barra en la que se desplaza la argolla; puedes utilizar una escala de metros a centímetros. Dibuja el contorno de la región en la que puede desplazarse el perro.

b) ¿Cuál es el área de la región en la que puede desplazarse el perro?

____

>>> Para saber más

Sobre el cálculo de áreas y perímetros de figuras formadas por arcos y rectas, consulta, en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Hernández Garcíadiego, Carlos. "Áreas de sectores circulares" en *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

La razón de cambio

En esta secuencia estudiarás las razones de cambio de dos conjuntos de cantidades que están en una relación de proporcionalidad directa.

SESIÓN 1

EL INCREMENTO

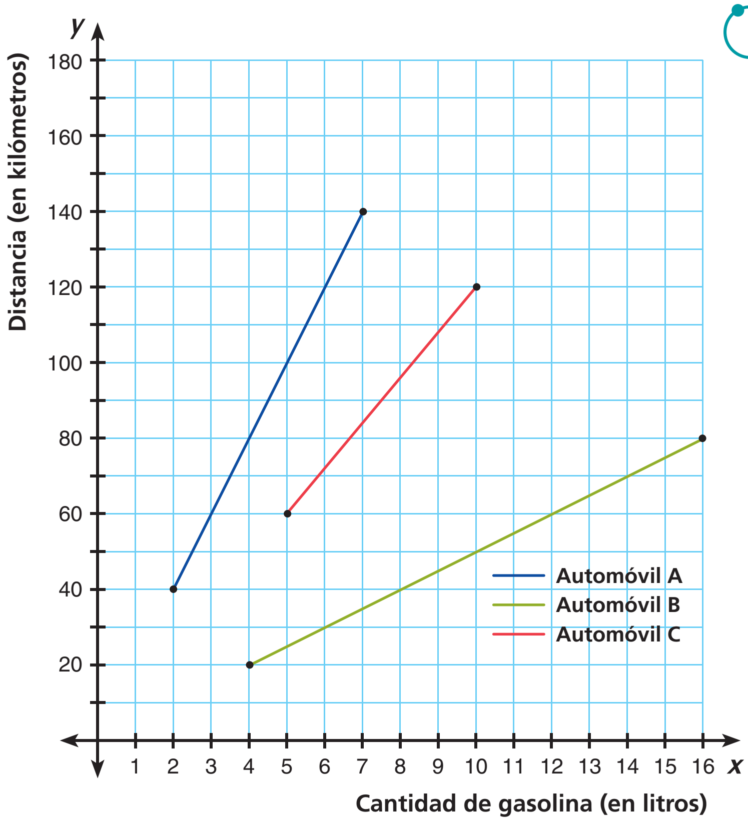
>>> Para empezar

En primero y segundo grado has representado de diferentes maneras las relaciones funcionales: una tabla, una expresión algebraica, una gráfica o, incluso, un enunciado; cada una de estas representaciones da diferente información.

Por ejemplo, en la secuencia 20 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste que la gráfica de la expresión $y = 3x + 2$ es una línea recta con pendiente igual a 3. En esta secuencia continuarás el estudio de la pendiente de una recta.

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente gráfica describe la relación entre la distancia recorrida y la cantidad de gasolina consumida por tres automóviles. El consumo de gasolina de cada automóvil es constante.



Recuerda que:

El rendimiento de un automóvil es la cantidad de kilómetros que recorre con un litro de gasolina.

Si el rendimiento de un automóvil es constante, la distancia recorrida y la cantidad de gasolina que se consume son cantidades directamente proporcionales.

De acuerdo con la información de la gráfica:

a) ¿Cuántos kilómetros recorre el automóvil C con 13 ℓ de gasolina? ____________

b) Si el automóvil C recorriera 204 km, ¿cuántos litros de gasolina consumiría? _______

c) ¿Cuántos kilómetros recorre el automóvil A con un litro de gasolina? ____________

d) ¿Qué distancia recorre cada automóvil con tres litros de gasolina?

Automóvil A: ____________ Automóvil B: ____________ Automóvil C: ____________

Comparen sus respuestas, contesten y comenten:

a) Por cada litro de gasolina que consume cada automóvil, ¿cuántos kilómetros recorre?

Automóvil A: ____________ Automóvil B: ____________ Automóvil C: ____________

b) ¿Qué automóvil tuvo un mejor rendimiento? ____________

>>> Manos a la obra

I. Responde lo que se te pide a ontinuación.

a) Completa las siguientes tablas para encontrar la distancia recorrida por el automóvil A y por el automóvil C a partir de la cantidad de gasolina consumida.

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
5	100
6	
7	
8	
9	
10	200

Automóvil A

Cantidad de gasolina (en litros)	Distancia recorrida (en kilómetros)
5	60
6	
7	
8	
9	
10	120

Automóvil C

b) Completa la siguiente tabla considerando las distancias recorridas del quinto litro al décimo litro de gasolina consumida:

	Distancia recorrida	Cantidad de gasolina consumida	Cociente de la cantidad de kilómetros recorridos entre la cantidad de gasolina consumida
Automóvil A			
Automóvil C			

c) Completa la siguiente tabla considerando las distancias recorridas del quinto litro al séptimo litro de gasolina consumida:

	Distancia recorrida	Cantidad de gasolina consumida	Cociente de la cantidad de kilómetros recorridos entre la cantidad de gasolina consumida
Automóvil A			
Automóvil C			

Comparen sus respuestas y contesten:

a) ¿Cómo son los cocientes que encontraron en las tablas anteriores para el automóvil A, distintos o iguales? _____

b) ¿Cómo son los cocientes que encontraron en las tablas anteriores para el automóvil C, distintos o iguales? _____

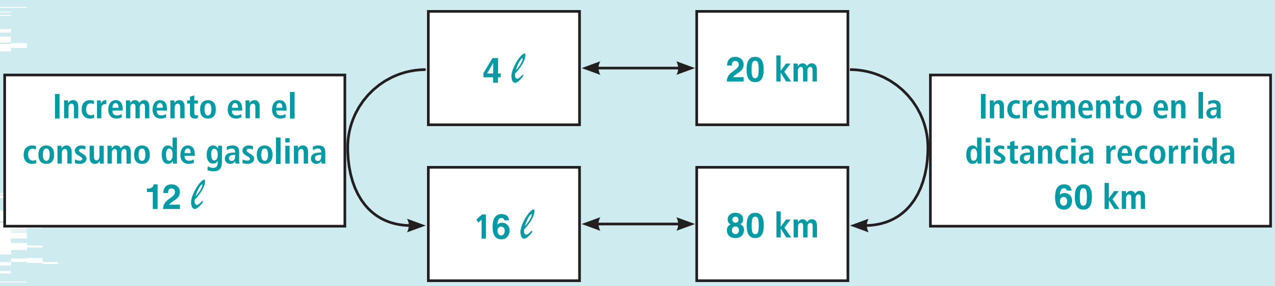
c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar la distancia recorrida por el automóvil A, a partir de la cantidad de gasolina que consumió? _____

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar la distancia recorrida por el automóvil C, a partir de la cantidad de gasolina que consumió? _____

>>> A lo que llegamos

Cuando dos conjuntos de cantidades están relacionadas entre sí, se puede estudiar el cambio o incremento de una cantidad respecto al cambio o incremento de la otra.

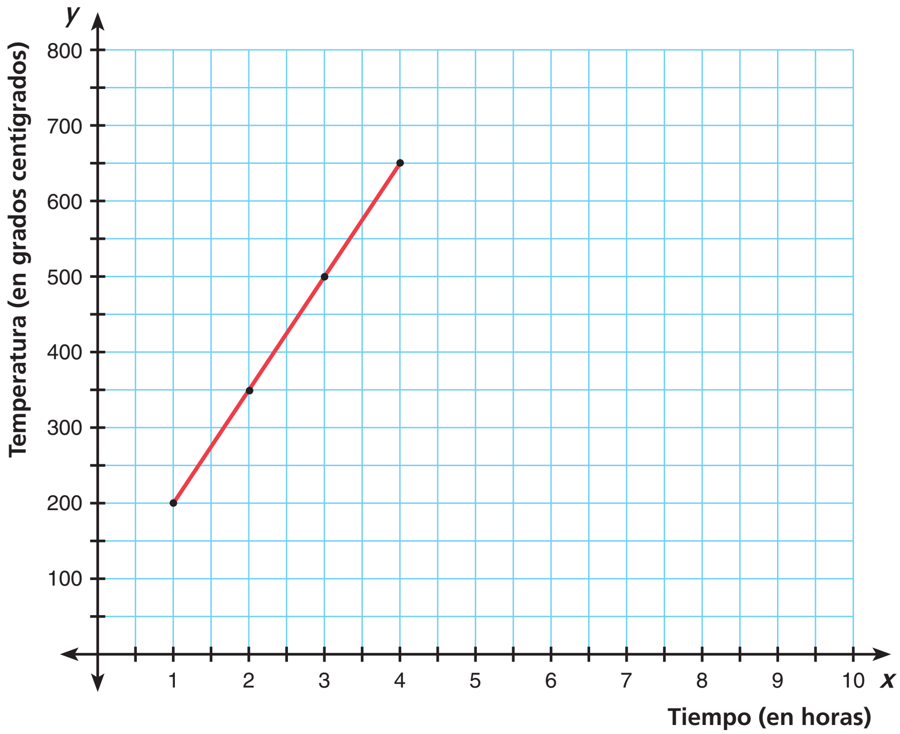
En este caso, la distancia recorrida está relacionada de manera directamente proporcional a la cantidad de gasolina consumida. Los incrementos de estas cantidades se pueden comparar. Por ejemplo, para el automóvil B, un incremento de 60 km recorridos corresponde a un incremento de 12 ℓ de gasolina consumidos.



Al cociente que se obtiene al dividir el incremento de un cantidad entre el incremento correspondiente a la otra se le llama razón de cambio.

En el ejemplo, la razón de cambio entre la distancia recorrida (60 km) y la cantidad de gasolina consumida (12 ℓ) es: $\frac{60}{12} = 5$, que resulta ser el rendimiento del automóvil B.

II. Una barra de acero se calienta en un horno de alta temperatura. La siguiente gráfica muestra los resultados de variación de la temperatura de la barra respecto al tiempo de calentamiento.



a) Con la información de la gráfica anterior completa la siguiente tabla:

	Incremento del tiempo (en horas)	Incremento en la temperatura (en °C)	Razón de cambio de la temperatura entre el tiempo
De la primera a la cuarta hora	3	450	
De la primera a la tercera hora			150
De la primera a la segunda hora	1		
De la segunda a la tercera hora		150	
De la tercera a la cuarta hora	1		

b) ¿Cómo son las razones de cambio de la tabla anterior, iguales o diferentes?

____

Explica por qué.

____

c) ¿Qué temperatura tenía la barra de acero cuando se introdujo al horno? ________

d) ¿Cuál será la temperatura de la barra de acero en la séptima hora? ____________

Comparen sus resultados y contesten:

¿Cuál es el incremento de la temperatura de la barra en cada hora? __________

>>> A lo que llegamos

Cuando la gráfica asociada a la relación entre dos conjuntos de cantidades son puntos que están sobre una línea recta, la **razón de cambio** es **constante**.

En el problema anterior, la razón de cambio de la temperatura en cada hora es 150, sin importar el intervalo de tiempo en que se calculen los incrementos.

SESIÓN 2

PENDIENTE Y RAZÓN DE CAMBIO

>>> Para empezar

En la secuencia 2 **¿Cómo se mueven las cosas?** de tu libro de **Ciencias II**, aprendiste que, en general, la rapidez y la velocidad proporcionan distintas informaciones sobre el movimiento de un objeto. Sin embargo, cuando el objeto se mueve en una línea recta y lo hace en un sólo sentido, la rapidez y la magnitud de la velocidad coinciden.

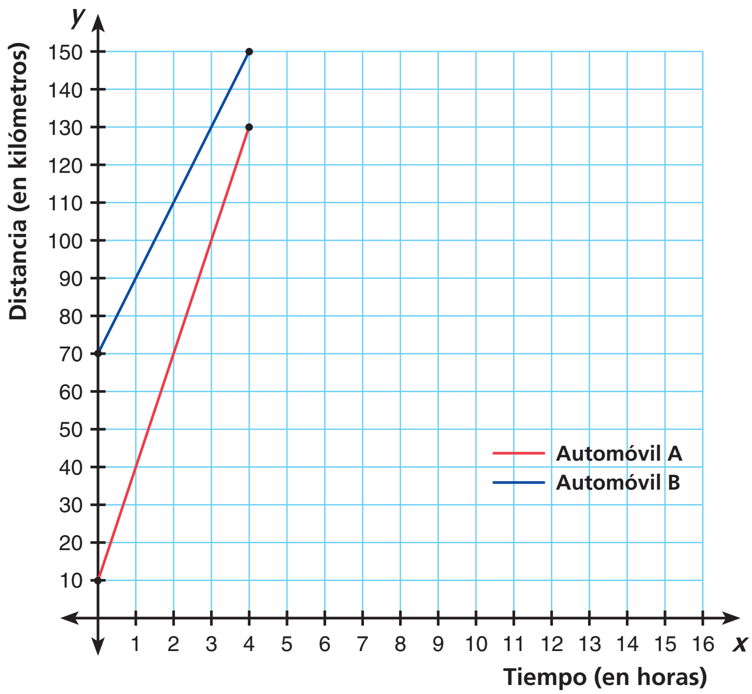
Conexión con Ciencias II

Secuencia 2: ¿Cómo se mueven las cosas?

En esta sesión estudiarás el movimiento de dos automóviles al ir sobre una línea recta en un mismo sentido. A lo largo de la sesión, nos referiremos al cociente de la distancia recorrida entre el tiempo empleado en recorrerla como velocidad.

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente gráfica muestra las posiciones en las que, en determinados tiempos, se encontraban dos automóviles. Cada automóvil mantuvo una velocidad constante. Además, salieron de lugares diferentes.



De la segunda hora a la séptima hora:

a) Para el automóvil A, ¿cuál es la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo? ______________

b) ¿A que velocidad fue el automóvil A? ______________

c) Para el automóvil B, ¿cuál es la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo? ______________

d) ¿A que velocidad fue el automóvil B? ______________

e) ¿Qué automóvil fue a mayor velocidad? ______________

Recuerda que:

Cuando un automóvil va a velocidad constante, la gráfica asociada a la relación distancia-tiempo es una línea recta.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Responde lo que se te pide a continuación.

a) Completa las siguientes tablas para encontrar las posiciones de los automóviles en los instantes indicados de tiempo.

Automóvil A	
Tiempo transcurrido (en horas)	**Distancia a la que se encuentra el automóvil (en kilómetros)**
1	40
2	
3	
4	
5	

Automóvil B	
Tiempo transcurrido (en horas)	**Distancia a la que se encuentra el automóvil (en kilómetros)**
1	90
2	
3	
4	
5	

b) Con la información de la tabla del automóvil A, completa la siguiente tabla para encontrar la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo.

	Incremento del tiempo (en horas)	Incremento de la distancia recorrida (en kilómetros)	Razón de cambio del automóvil A (distancia-tiempo)
De la segunda a la tercera hora	1		
De la segunda a la cuarta hora	2		
De la tercera a la cuarta hora			

Automóvil A

c) ¿A qué velocidad va el automóvil A? ______

d) ¿En qué kilómetro inició su recorrido el automóvil A? ______

e) Si y es la distancia recorrida por el automóvil A en el tiempo x, ¿cuál la expresión algebraica que permite calcular y a partir de x? Subráyala.

- $y = 30x$
- $y = 30x + 10$
- $y = 30x + 70$

f) Con la información de la tabla del automóvil B, completa la siguiente tabla para encontrar la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo.

	Incremento del tiempo (en horas)	**Incremento de la distancia recorrida (en kilómetros)**	**Razón de cambio del automóvil B (distancia-tiempo)**
De la primera a la segunda hora	1		
De la primera a la tercera hora			
De la primera a la cuarta hora	3		

Automóvil B

g) ¿A qué velocidad va el automóvil B? ______

h) ¿En qué kilómetro inicio su recorrido el automóvil B? ______

i) Si y es la distancia recorrida por el automóvil B en el tiempo x, ¿cuál es la expresión algebraica que permite calcular y a partir de x? Subráyala.

- $y = 20x$
- $y = 20x + 10$
- $y = 20x + 70$

Recuerda que:
La pendiente de una recta
$y = mx + b$
es el número m.

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cómo se comparan la pendiente de la recta y la razón de cambio (distancia-tiempo) asociadas al automóvil A?

b) ¿Cómo se comparan la pendiente de la recta y la razón de cambio (distancia-tiempo) asociadas al automóvil B?

>>> A lo que llegamos

Cuando la relación entre dos cantidades tenga por gráfica una línea recta, la razón de cambio es igual a la pendiente de la recta.

Por ejemplo, si un automóvil E va a velocidad constante de 40 km/h y parte del kilómetro 15 de la carretera, entonces la expresión algebraica asociada a la distancia que recorre el automóvil a partir del tiempo es $y = 40x + 15$; la pendiente de esta recta es 40 y la razón de cambio (distancia-tiempo) es también 40.

II. a) Si un automóvil C se desplaza a mayor velocidad que el automóvil A, ¿cómo es la razón de cambio del automóvil C respecto a la del automóvil A, mayor o menor?

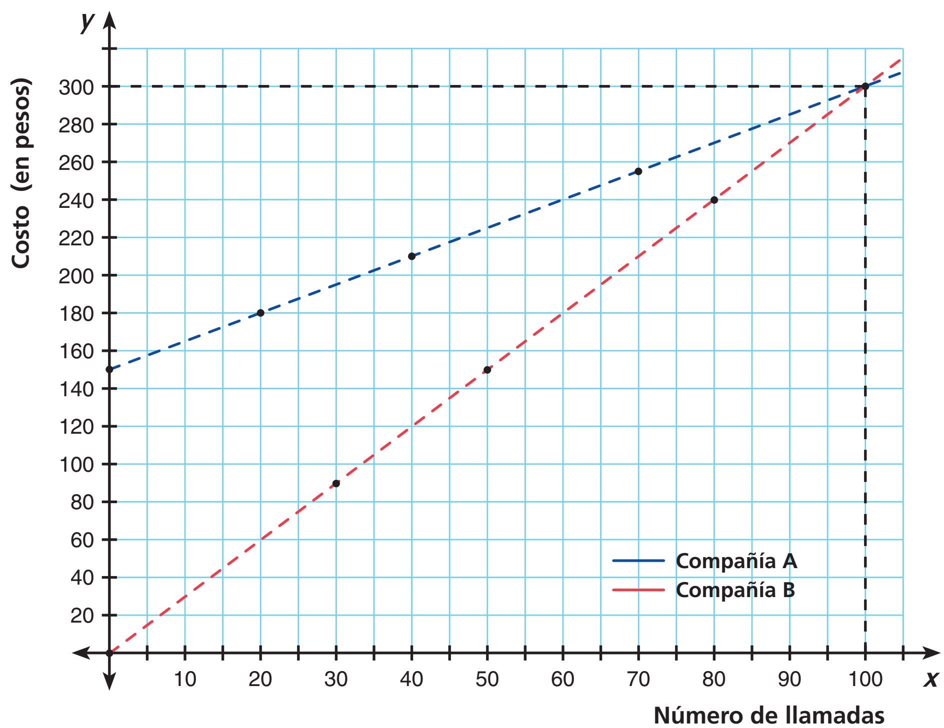
____

b) Si la razón de cambio de un automóvil D es mayor que del automóvil B, ¿qué automóvil se desplaza a mayor velocidad? ________________________

>>> Lo que aprendimos

La siguiente gráfica muestra el costo del servicio telefónico de dos compañías.

Costo del servicio telefónico



a) ¿Cuál es la razón de cambio (aumento en el costo por llamada) en la compañía A? ______________

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a la compañía A? ______________

c) ¿Cuál es la razón de cambio (aumento en el costo por llamada) en la compañía B? ______________

d) ¿Cuál es la pendiente de la recta asociada a la compañía B? ______________

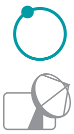
e) ¿Por qué el costo de las 100 primeras llamadas telefónicas es el mismo en las dos compañías? ______________

f) ¿Cuál de las dos compañías tiene una tarifa más económica si se hacen menos de 100 llamadas? __________ ¿y si se hacen más de 100? __________

SESIÓN 3

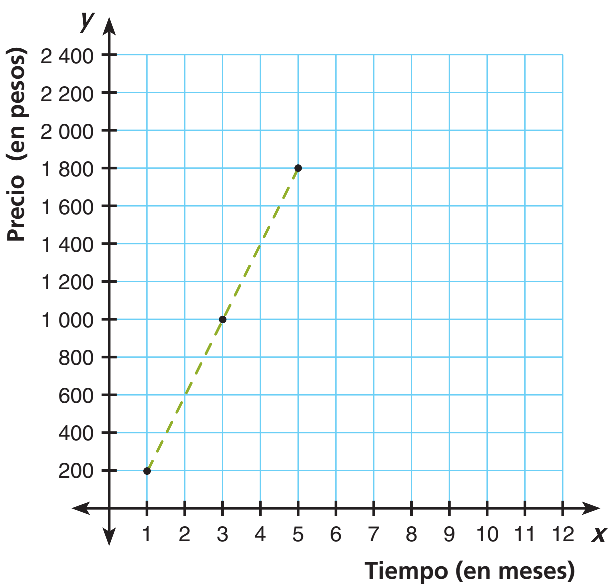
ALGUNAS RAZONES DE CAMBIO IMPORTANTES

>>> Lo que aprendimos



1. La siguiente gráfica muestra los cambios en el precio de un artículo durante los primeros meses del año.

Variación del precio de un artículo



a) Suponiendo que el aumento en el precio del artículo es el mismo cada mes, completa la siguiente tabla.

	Incremento del tiempo (en meses)	Incremento del precio (en pesos)	Cociente del incremento del precio entre el tiempo
Del primero al tercer mes			
Del primero al cuarto mes			
Del tercero al sexto mes			
Del primero al segundo mes			
Del segundo al tercer mes			
Del tercero al cuarto mes			

b) ¿Cómo son los cocientes de la tabla anterior, iguales o diferentes? ____________

Explica por qué sucede así ____

c) Si el primer mes corresponde a enero, ¿cuál es el precio del artículo en marzo?

____

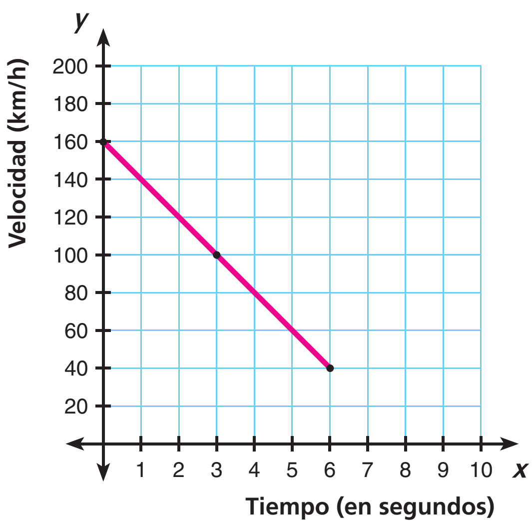
d) Si el incremento fue el mismo cada mes, ¿cuál será el precio del artículo en diciembre?

____

Comparen sus resultados y contesten:

¿Cuál es el incremento mensual del precio del artículo? __________

2. La siguiente gráfica muestra la relación entre la velocidad de un automóvil y el tiempo que transcurre hasta estar en alto total.



Recuerda que:

La ordenada al origen de una recta es la ordenada del punto en que la recta interseca al eje y.

Recuerda que:

La pendiente de una línea recta puede ser un número con signo positivo o negativo y que la razón de cambio es igual a la pendiente de la recta.

a) ¿Cuál es la ordenada al origen de la recta anterior? ______________

b) Si y es la velocidad del automóvil en el tiempo x, ¿cuál es la expresión algebraica asociada a esta situación? Subráyala.

- $y = -180x$
- $y = -20x + 160$
- $y = -180x + 20$

c) Completa la siguiente tabla para verificar que la expresión algebraica que elegiste es la correcta.

Tiempo (en segundos) x	Distancia (en metros) y
1	140
2	
3	
4	
5	

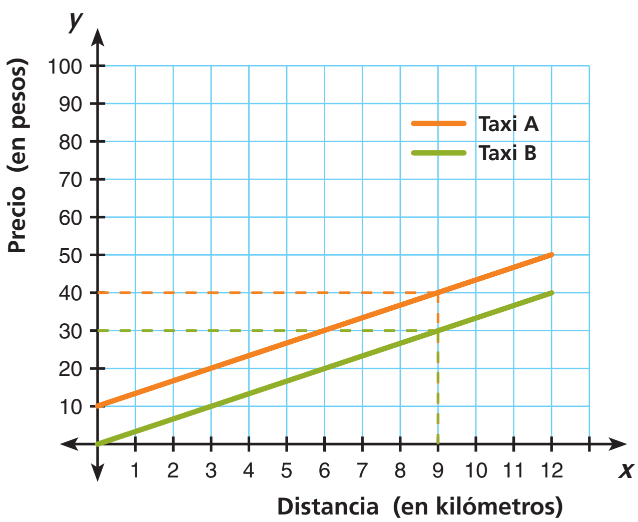
d) A medida que va transcurriendo el tiempo, ¿la velocidad del automóvil aumenta o disminuye? ______________________

e) ¿Cómo es la pendiente de la recta anterior, positiva o negativa? ________________

f) ¿Cuál es la razón de cambio (velocidad-tiempo) del problema anterior? _________

La razón de cambio puede ser un número con signo positivo o negativo.

3. La siguiente gráfica muestra el costo de un viaje en dos taxis en dos ciudades distintas.



a) ¿Cuál es el costo en el taxi A por cada kilómetro recorrido? ___________

b) ¿Cuál es la razón de cambio del taxi A? ___________

c) ¿Cuál es el costo en el taxi B por cada kilómetro recorrido? ___________

d) ¿Cuál es la razón de cambio (precio-distancia) del taxi B? ___________

e) ¿Qué taxi cobró más? ___________

f) ¿Por qué cobró más un taxi que otro? ___________

g) ¿Cómo se ref eja lo anterior respecto a la razón de cambio (precio-distancia) de cada taxi? ___________

>>> Para saber más

Sobre la pendiente de una recta como razón de cambio, consulta:
http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Funcion_afin/index.htm
Ruta: Índice → características
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Diseño de experimentos y estudios estadísticos

En esta secuencia aprenderás que, para obtener información confiable en un experimento o estudio estadístico, es conveniente reflexionar sobre los procedimientos y herramientas que se utilizaran para recopilar, organizar y representar los datos que se obtengan en cada etapa que conforma al experimento o estudio en cuestion.

SESIÓN 1

DISEÑO DE UN ESTUDIO ESTADÍSTICO ¿QUÉ MATERIA TE GUSTA MÁS?

>>> Para empezar

Los estudios estadísticos nos permiten investigar sobre diversas situaciones o fenómenos.

Por medio de un estudio estadístico adecuado, lo mismo podemos conocer los efectos que provoca una determinada sustancia en los seres vivos, que el comportamiento del mercado ante un determinado producto o servicio así como, conocer las preferencias de un determinado grupo o sector.

Una fase importante del estudio, dado que es el inicio, es determinar cuál es la pregunta o el problema que se quiere estudiar y la manera en que se obtendrán los datos.

>>> Consideremos lo siguiente

Lee cuidadosamente las preguntas que aparecen en las siguientes encuestas y contéstalas:

Encuesta A

- Asignatura o materia que te gusta más y por qué

____

____

- Asignatura o materia que te gusta menos y por qué

____

____

Encuesta B

- Asignatura o materia que te resulta más fácil. Anota tu última calificación en esa materia

_________________________ __________

- Asignatura o materia que te resulta más difícil. Anota tu última calificación en esa materia

_________________________ __________

a) ¿Cuál de las encuestas anteriores utilizarías para obtener datos con los que puedas analizar los siguientes temas? Anota A o B en cada tema para indicar que es la encuesta A o la encuesta B, según consideres.

Temas

☐ Nivel de aprovechamiento y desempeño de los estudiantes.

☐ Intereses e inquietudes de los estudiantes en su escuela.

☐ Hábitos de estudio de los estudiantes de secundaria.

☐ Preferencia acerca de las materias que cursan los estudiantes.

Encuesta A

Encuesta B

Justifica tu respuesta. ____

____

____

b) De acuerdo con lo que anotaste en el inciso anterior, si se pretende estudiar los intereses e inquietudes de los estudiantes, ¿será suficiente con los datos que se obtengan de las dos preguntas de la encuesta que elegiste? __________ ¿Por qué?

____

____

c) ¿Qué tipo de respuestas se pueden obtener al realizar la encuesta B? Anota algunos ejemplos de posibles respuestas. ____

____

____

d) Si se quiere recopilar datos para investigar sobre los hábitos de estudio de los estudiantes de secundaria, ¿qué otras preguntas consideras sería necesario incluir en la encuesta? ____

____

____

¿Por qué es importante hacer las preguntas que sugieres? ____________________

____

____

e) Si el tema que se pretende estudiar comprende intereses e inquietudes de los estudiantes. ¿Cuáles esperas que sean los de tus compañeros? ____________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En un grupo realizaron las dos encuestas anteriores; los datos que obtuvieron los organizaron en tablas y presentaron en gráficas.

a) ¿Cuál de las siguientes tablas corresponde a datos que se pudieron obtener al aplicar la encuesta A? Marquen con una ✓ y justifiquen su respuesta.

Recuerden que:

En general, los datos que se obtienen en un estudio o experimento pueden ser de dos tipos, cualitativos *(por ejemplo, el color de cabello, ojos o piel) o* cuantitativos *(por ejemplo, la edad, el peso y la estatura de una persona).*

En ambos casos se pueden organizar en tablas *de* frecuencia absoluta, relativa *o* porcentaje. *Cuando el conjunto de datos es cuantitativo y grande se puede organizar en tablas de datos agrupados en intervalos.*

☐ ______________________________

____

Asignatura: matemáticas				
Calificación	Más fácil		Más difícil	
	Conteo	Frecuencia	Conteo	Frecuencia
5	I	1	III	3
6	II	2	IIIII	5
7	I	1	II	2
8	II	2		0
9	III	3	I	1
10	IIII	4	II	2

☐ ______________________________

____

La materia que más me gusta: educación física		
Porque	Frecuencia	Porcentaje
hacemos ejercicio	2	33
salimos a jugar	3	50
no hacen examen	1	16

b) Las siguientes gráficas fueron elaboradas por diferentes alumnos para mostrar los datos que obtuvieron al aplicar la encuesta B. ¿Cuál gráfica muestra adecuadamente los datos que pudieron obtenerse al aplicar dicha encuesta? Marquen con una ✓ en el recuadro correspondiente y justifiquen su respuesta.

Recuerden que:

Una gráfica de barras *se utiliza para presentar y comparar frecuencias con que ocurre una cualidad o atributo.*

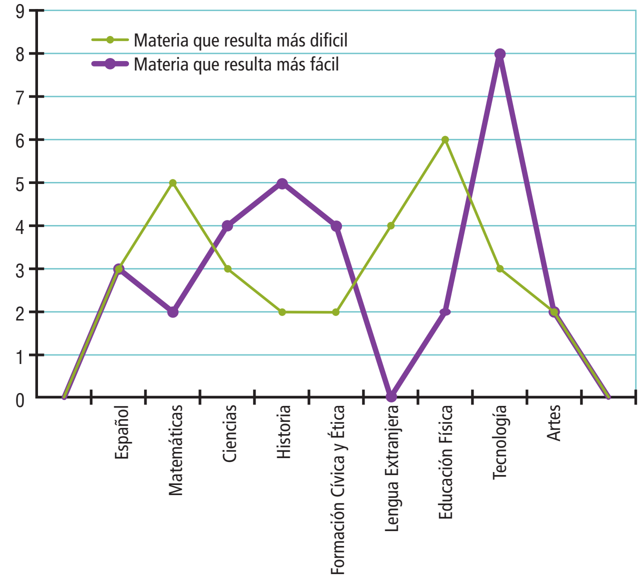
Una gráfica circular sirve *para comparar qué fracción de un todo es cada parte.*

Un histograma presenta datos agrupados en intervalos; cuando éstos son iguales, la altura de cada barra indica su frecuencia.

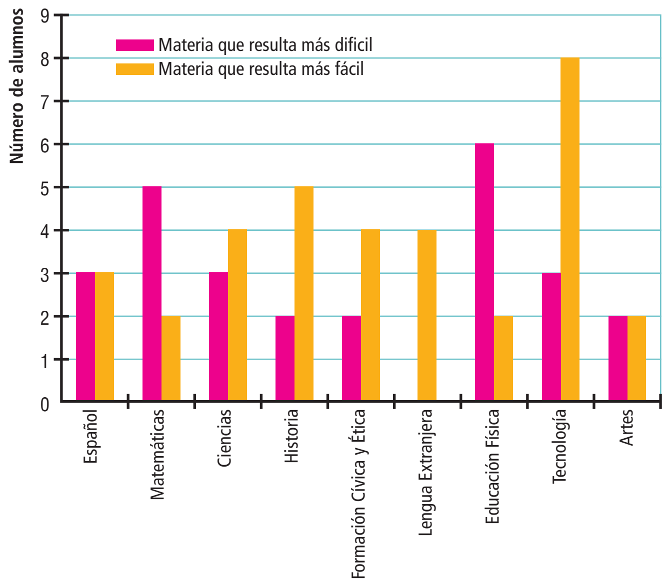
Un polígono de frecuencias *también muestra la frecuencia absoluta, relativa o porcentaje de datos agrupados.*

Una gráfica de línea *presenta las variaciones en el tiempo.*

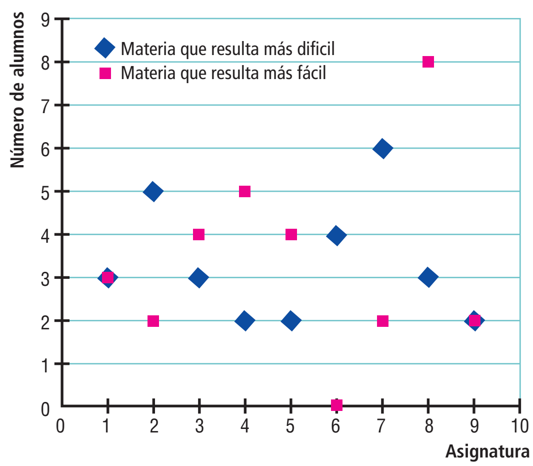
Resultados de la encuesta



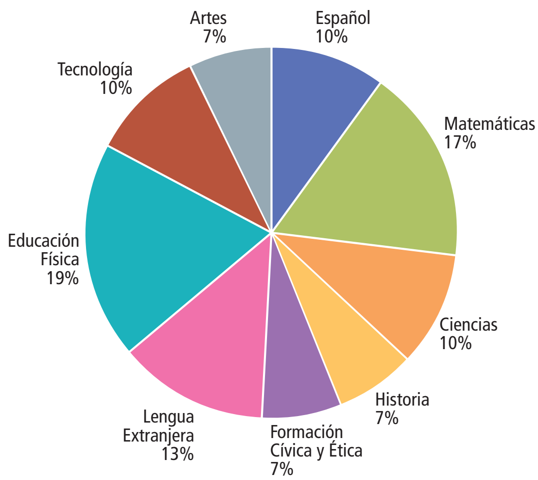
Resultados de la encuesta



Resultados de la encuesta



Resultados de la encuesta



c) De acuerdo con la gráfica que consideran muestra correctamente los resultados de la encuesta B, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Señalen con una "V" en el recuadro.

- ☐ La segunda materia más difícil para los alumnos es matemáticas.
- ☐ La materia más fácil es educación física.
- ☐ Ningún alumno consideró que la materia de lengua extranjera es más fácil.
- ☐ La materia que más alumnos eligen como la más fácil es tecnología.

II. Organícense en equipos y cada uno seleccione una de las dos encuestas que aparecen en el apartado *Consideremos lo siguiente*. Pidan a todos sus compañeros que les contesten.

a) Clasifiquen las respuestas que obtuvieron para cada pregunta y registren sus resultados en una tabla; para ello deberán acordar cuáles y cuántas columnas y renglones deberá tener, así como cuáles son los encabezados y títulos adecuados. Utilicen el siguiente espacio para elaborarla.

b) ¿Qué tipo de gráfica es la que mejor describe los datos que registraron en la tabla? ¿Cuáles son los ejes y qué escala utilizarán? ¿Cuál es el título más apropiado? Trácenla en el siguiente espacio.

c) Escriban una conclusión sobre los resultados obtenidos en su encuesta y preséntenla a su grupo. ____

____

____

>>> A lo que llegamos

La realización de un estudio considera diferentes fases.

Fase 1: definición del estudio o experimento. ¿Qué es lo que se quiere investigar y analizar? ¿Qué se espera encontrar?

Fase 2: obtención de datos. ¿Cómo se obtendrán los datos para analizar? ¿A quiénes se les preguntará? ¿Qué tipo de pregunta es más conveniente hacer?

Una manera de obtener datos para realizar un estudio estadístico es por medio de la aplicación de una encuesta.

Fase 3: organización y análisis de los datos. ¿Qué tipo de datos se obtendrán? ¿Cómo es conveniente ordenar y clasificar los datos? ¿Qué tipo de tabla o gráfica es conveniente para mostrar y analizar los datos obtenidos?

Fase 4 : presentación de conclusiones o reportes. ¿Cuáles son los resultados que se obtuvieron al realizar el análisis? Los resultados obtenidos, ¿afirman o contradicen lo que se esperaba encontrar?

Cuando se quiere estudiar una situación o fenómeno en una población muy grande, sólo se encuesta a una parte de ella; a ese subgrupo se le llama muestra. Si así se hiciera habría que buscar que la muestra conserve las mismas características de la población.

UN JUEGO DE LETRAS. OTRO ESTUDIO ESTADÍSTICO

SESIÓN 2

>>> Consideremos lo siguiente

En las diferentes lenguas que se hablan en el mundo prevalece más el uso de unas letras que otras.

¿Saben qué letras se utilizan con mayor frecuencia en el idioma español? ¿Creen que son las mismas que las que se utilizan más en inglés? Y en una lengua indígena, por ejemplo, el zapoteco, ¿qué letras serán las que con mayor frecuencia se utilizan?

>>> Manos a la obra

I. Reunidos en equipos, lean los siguientes tres textos y después cada equipo seleccione uno de ellos para realizar lo que se pide en los incisos.

Texto I

Cuento del tonto que comió pollo

Había una vez tres hermanos, el mayor y el segundo estaban bien y el tercero era un tonto, tenían un pollo pero siempre que hablaban de matar el pollo decían que no le iban a dar ningún pedazo al tonto por tonto, llegó el día que mataron al pollo y los hermanos que estaban bien ya tenían un plan para no darle nada al tonto, lo prepararon y lo dejaron listo para meterlo al horno y llamaron al tonto y ya reunidos los tres le dijeron al tonto, el que sueñe un bonito sueño se come el pollo, bueno dijo el tonto; metieron el pollo dentro del horno y se fueron a dormir, pasó un buen rato y cuando los dos hermanos ya estaban bien dormidos, el tonto se levantó y fue a la cocina y se comió el pollo, terminó y se fue a dormir. Al otro día temprano se levantaron y el mayor dijo: vamos a hablar del sueño que tuvimos anoche, yo voy a empezar, dijo, pues yo anoche fui a la Gloria y vi al Señor, sí dijo el otro hermano, yo vi cuando te ibas volando, me agarré de la manga de tu camisa y nos fuimos los dos, sí contestó el tonto, yo vi cuando se iban y como pensé que ya no iban a regresar fui a la cocina y me comí el pollo, sólo quedaron dos huesitos para que chupen.

Cuento escrito por: Joaquín Martínez Mendoza, 11 años, Juchitán de Zaragoza, Oaxaca. Tomado del libro *Las narraciones de niñas y niños indígenas*. Vol. II. México: SEP, Libros del Rincón, 2001.

Texto II

"Didxa guca zti guida gudo beere"

Chona bichi ca´be chupa la´ nu xpíaní ne tabí guidxa la´ napa ca´be ti beeré ná cabe xhimodo goo ca´be lameé ne ná cabe la´quizudidí cati nda guidxa biú ti dxí bíti cá lame má chindú cá lame xuqui rabí cá be guidxa tula´guindií xcanda ti bacaanda o má xicarú ngue goo lá mé Gulu ca´be beeré que xuqui ne guta guxii cá be ná ca´be chíchite ca´be guidxa gudídi ti xíigabá má nixiaxi cá be biazaá guidxa gudo beeré que ne guta guxií bira guela´zti dzí viaza ca´be ne guíidxicá be guidxa na luugolá que ná lá gunie xcandá guyaa ranú díuxhi bícábí ztobí que ná la ca´biá lí má zeú que gunda lú manga ztí gamixha lú na guídzxa ná lá cá biá la tú ma xeetu que lá sacaza ma quí zabíí gueta tu yende cá xha beére ne guda huá ca lña biana chupánda dixta guini pá gotó.

Cuento escrito por: Joaquín Martínez Mendoza, 11 años, Juchitán de Zaragoza, Oaxaca. Tomado del libro *Las narraciones de niñas y niños indígenas*. Vol. II. México: SEP, Libros del Rincón, 2001.

Texto III

The Canterville Ghost

Mr Hiram B. Otis was a rich American from New York. He had come to live and work in England, but he did not want to live in London. He did not want live in the city. He wanted to live in the countryside outside London. Canterville Chase was a large and very old house near London. Lord Canterville, the owner, wanted to sell it. So Mr Hiram B. Otis visited Lord Canterville.

'I do not live in Canterville Chase,' Lord Canterville said to Mr Otis. 'I do not want to live there. The house has a ghost-The Canterville Ghost.'

'I come from Ameica,' said Mr Otis. 'America is a modern country. I don't believe in ghosts. Have you seen this Canterville Ghost?'

'No,' said Lord Canterville, 'but I have heard it at night.'

'I don't believe in ghosts,' Mr Otis said again. 'No one has found a ghost. No one has put a ghost in a museum. And you haven´t seen this ghost either.'

'But several members of my family have seen it,' said Lord Canterville. 'My aunt saw the ghost. She was so frightened that she was ill for the rest of her life. Also, the servants have seen it so they will not stay in the house at night. Only the housekeeper, Mrs Umney, lives in Caterville Chase. Mrs Umney lives there alone.'

'I want to buy the house,' said Mr Otis. 'I'll buy the ghost as well. Will you sell Canterville Chase? Will you sell the ghost?'

'Yes, I will,' said Lord Canterville. 'But, please remember, I told you about the ghost before you bought the house.'

Tomado de Wilde, Oscar, *The Canterville Ghost and Other Stories*/Oscar Wilde; Stephen Colbourn; ilus. Annabel Large. México: SEP/Macmillan, 2002.