3er Grado Volumen I

MATEMÁTICAS III

TELEsecundaria

Matemáticas III. Volumen I, fue elaborado en la Coordinación de Informática Educativa del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE), de acuerdo con el convenio de colaboración entre la Subsecretaría de Educación Básica y el ILCE.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
Josefina Vázquez Mota

SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN BÁSICA
José Fernando González Sánchez

Dirección General de Materiales Educativos
María Edith Bernáldez Reyes

Dirección de Desarrollo e Innovación de Materiales Educativos

Subdirección de Desarrollo e Innovación de Materiales Educativos para la Educación Secundaria

Dirección Editorial

INSTITUTO LATINOAMERICANO DE LA COMUNICACIÓN EDUCATIVA

Dirección General
Manuel Quintero Quintero

Coordinación de Informática Educativa
Felipe Bracho Carpizo

Dirección Académica General
Enna Carvajal Cantillo

Coordinación Académica
Armando Solares Rojas

Asesoría académica
María Teresa Rojano Ceballos (DME-Cinvestav)
Judith Kalman Landman (DIE-Cinvestav)

Autores
Araceli Castillo Macías, Rafael Durán Ponce,
Silvia García Peña, José Cruz García Zagal,
Olga Leticia López Escudero, Jesús Rodríguez Viorato

Apoyo técnico y pedagógico
María Catalina Ortega Núñez

Revisores académicos externos
David Francisco Block Sevilla, Carlos Bosch Giral,
Luis Alberto Briseño Aguirre

Diseño de actividades tecnológicas
Mauricio Héctor Cano Pineda, Emilio Domínguez Bravo
Deyanira Monroy Zariñán

Coordinación editorial
Sandra Hussein Domínguez

Servicios editoriales
Dirección de arte:
Rocío Mireles Gavito

Diseño:
Zona gráfica

Diagramación:
Bruno Contreras, Víctor Vilchis

Iconografía:
Cynthia Valdespino

Ilustración:
Curro Gómez, Victor Eduardo Sandoval,
Gabriela Podestá, Juan Pablo Romo

Fotografía:
Cynthia Valdespino, Fernando Villafán

Primera edición, 2008 (ciclo escolar 2008-2009)

ISBN 978-968-01-1703-1 (obra completa)
ISBN 978-968-01-1704-8 (volumen I)

Impreso en México

Índice

Bloque 1

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
1. Productos notables y factorización. **[12-31]** Efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas tales como: $(x + a)^2$; $(x + a)(x + b)$; $(x + a)(x - a)$. Factorizar expresiones algebraicas tales como: $x^2 + 2ax + a^2$; $ax^2 + bx$; $x^2 + bx + c$; $x^2 + a^2$.	1.1 A formar cuadrados	Programa 1		
	1.2 El cuadrado de una diferencia		Interactivo	
	1.3 La diferencia de dos cuadrados			
	1.4 A formar rectángulos	Programa 2		
	1.5 Un caso especial de factorización			
2. Triángulos congruentes y cuadriláteros. **[32-39]** Aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros.	2.1 Lados opuestos iguales			La diagonal de un paralelogramo (Geometría dinámica)
	2.2 Puntos medios	Programa 3	Interactivo	Cómo verificar la congruencia de las figuras (Geometría dinámica)
3. Entre rectas y circunferencias. **[40-47]** Determinar mediante construcciones las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias. Caracterizar la recta secante y la tangente a una circunferencia.	3.1 Puntos en común			
	3.2 Trazos de tangentes	Programa 4	Interactivo	Tangentes (Geometría dinámica)
	3.3 Entre circunferencias		Interactivo	
	3.4 Algunos problemas	Programa 5		
4. Ángulos en una circunferencia. **[48-57]** Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.	4.1 Dos ángulos de una circunferencia			Ángulos inscritos en una circunferencia (Geometría dinámica)
	4.2 Relaciones a medias			
	4.3 Probemos que uno de los ángulos es la mitad del otro	Programa 6	Interactivo	
	4.4 Problemas de medida	Programa 7		
5. Problemas con curvas. **[58-61]** Calcular la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.	5.1 Sólo una parte	Programa 8	Interactivo	
	5.2 Lo que resta			
	5.3 De todo un poco			
6. La razón de cambio. **[62-73]** Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.	6.1 El incremento			¿Sabes que es una razón? (Hoja de cálculo)
	6.2 Pendiente y razón de cambio	Programa 9	Interactivo	
	6.3 Algunas razones de cambio importantes	Programa 10		
7. Diseño de experimentos y estudios estadísticos. **[74-87]** Diseñar un estudio o experimento a partir de datos obtenidos de diversas fuentes y elegir la forma de organización y representación tabular o gráfica más adecuada para presentar la información.	7.1 Diseño de un estudio estadístico. ¿Qué materia te gusta más?	Programa 11	Interactivo	
	7.2 Un juego de letras. Otro estudio estadístico			
	7.3 ¿Qué cantidad de agua consumen diariamente los alumnos de tercer grado?	Programa 12		
EVALUACIÓN				

Bloque 2

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
8. Ecuaciones no lineales. **[90-99]** Utilizar ecuaciones no lineales para modelar situaciones y resolverlas utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	8.1 El número secreto	Programa 13		Ecuaciones con más de una solución I (Calculadora)
	8.2 Cubos, cuadrados y aristas			
	8.3 Menú de problemas	Programa 14	Interactivo	
9. Resolución de ecuaciones por factorización. **[100-111]** Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	9.1 ¿Cuánto miden los lados?	Programa 15		
	9.2 Los factores de cero		Interactivo	
	9.3 El adorno	Programa 16		
	9.4 Apliquemos lo aprendido			
10. Figuras semejantes. **[112 - 117]** Construir figuras semejantes y comparar las medidas de los ángulos y de los lados.	10.1 Un corazón muy especial	Programa 17	Interactivo	
	10.2 Aplicaciones de la semejanza	Programa 18	Interactivo	
11. Semejanza de triángulos. **[118- 127]** Determinar los criterios de semejanza de triángulos. Aplicar los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos. Aplicar la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles.	11.1 Explorando la semejanza de triángulos	Programa 19		
	11.2 Criterios de semejanza de triángulos I			Idea de triángulos semejantes (Geometría dinámica)
	11.3 Criterios de semejanza de triángulos II			
	11.4 Cálculo de distancias	Programa 20	Interactivo	
12. Índices. **[128-143]** Interpretar y utilizar índices para explicar el comportamiento de diversas situaciones.	12.1 El Índice Nacional de Precios al Consumidor	Programa 21		
	12.2 Índices en la escuela			
	12.3 ¿Quién es el pelotero más valioso?	Programa 22		
	12.4 Más sobre índices		Interactivo	
13. Simulación. **[144 -155]** Utilizar la simulación para resolver situaciones probabilísticas.	13.1 Simulación	Programa 23		
	13.2 Aplicando la simulación			
	13.3 Simulación y tiros libres	Programa 24	Interactivo	Simulación con el modelo de urna (1) (Hoja de cálculo)
EVALUACIÓN				

Bloque 3

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
14. Relaciones funcionales en otras disciplinas. Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica.	14.1 El área de la imagen	Programa 25	Interactivo	
	14.2 El corral de los conejos			
	14.3 El medio litro de leche	Programa 26		
15. Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general. Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la fórmula general.	15.1 La fórmula general	Programa 27		
	15.2 El beisbolista		Interactivo	
	15.3 Cuántas soluciones tiene una ecuación	Programa 28		
	15.4 La razón dorada			
16. Teorema de Tales. Determinar el teorema de Tales mediante construcciones con segmentos. Aplicar el teorema de Tales en diversos problemas geométricos.	16.1 La culpa es de las paralelas	Programa 29	Interactivo	Teorema de Tales (Geometría dinámica)
	16.2 Proporcionalidad vs paralelismo	Programa 30		Recíproco del teorema de Tales (Geometría dinámica)
	16.3 Ahí está el teorema de Tales			
17. Figuras homotéticas. Determinar los resultados de una homotecia cuando la razón es igual, menor o mayor que 1 o que −1. Determinar las propiedades que permanecen invariantes al aplicar una homotecia a una figura. Comprobar que una composición de homotecias con el mismo centro es igual al producto de las razones.	17.1 Especialmente semejantes	Programa 31	Interactivo	La homotecia como aplicación del teorema de Tales (Geometría dinámica)
	17.2 Depende de la razón	Programa 32		
18. Gráficas de relaciones. Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos.	18.1 Plano inclinado	Programa 33	Interactivo	
	18.2 La ley de Boyle	Programa 34		
	18.3 La caja			
19. Algunas características de gráficas no lineales. Establecer la relación que existe entre la forma y la posición de la curva de funciones no lineales y los valores de las literales de las expresiones algebraicas que definen a estas funciones.	19.1 ¡Abiertas y más abiertas!	Programa 35	Interactivo	Funciones cuadráticas (Hoja de cálculo)
	19.2 ¡Para arriba y para abajo!		Interactivo	
	19.3 Las desplazadas		Interactivo	
	19.4 ¡Ahí les van unas cúbicas!	Programa 36	Interactivo	
	19.5 ¡Ahí les van unas hipérbolas!		Interactivo	
	19.6 Efectos especiales		Interactivo	
20. Gráficas por pedazos. Interpretar y elaborar gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	20.1 Las albercas	Programa 37	Interactivo	
	20.2 Diversos problemas			
EVALUACIÓN				

Bloque 4

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
21. Diferencias en sucesiones. Determinar una expresión general cuadrática para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de diferencias.	21.1 Números figurados	Programa 38	Interactivo	
	21.2 Las diferencias en expresiones algebraicas			
	21.3 El método de diferencias	Programa 39		
	21.4 Apliquemos lo aprendido			
22. Teorema de Pitágoras. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.	22.1 ¿Qué es el teorema de Pitágoras?	Programa 40	Interactivo	Teorema de Pitágoras (Geometría dinámica)
	22.2 Aplicaciones del teorema de Pitágoras I	Programa 41		
	22.3 Aplicaciones del teorema de Pitágoras II			
23. Razones trigonométricas. Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.	23.1 La competencia	Programa 42	Interactivo	Ángulo de elevación y depresión (Hoja de cálculo)
	23.2 Cosenos y senos			
	23.3 30°, 45° y 60°	Programa 43		
	23.4 A resolver problemas		Interactivo	
24. La exponencial y la lineal. Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial de diversas situaciones.	24.1 Crecimiento de poblaciones	Programa 44	Interactivo	
	24.2 Interés compuesto			
	24.3 Gráfica de la exponencial	Programa 45		
	24.4 La depreciación de las cosas			
25. Representación de la información. Analizar la relación entre datos de distinta naturaleza, pero referidos a un mismo fenómeno o estudio que se presenta en representaciones diferentes, para producir nueva información.	25.1 Muchos datos	Programa 46	Interactivo	
	25.2 De importancia social			
EVALUACIÓN				

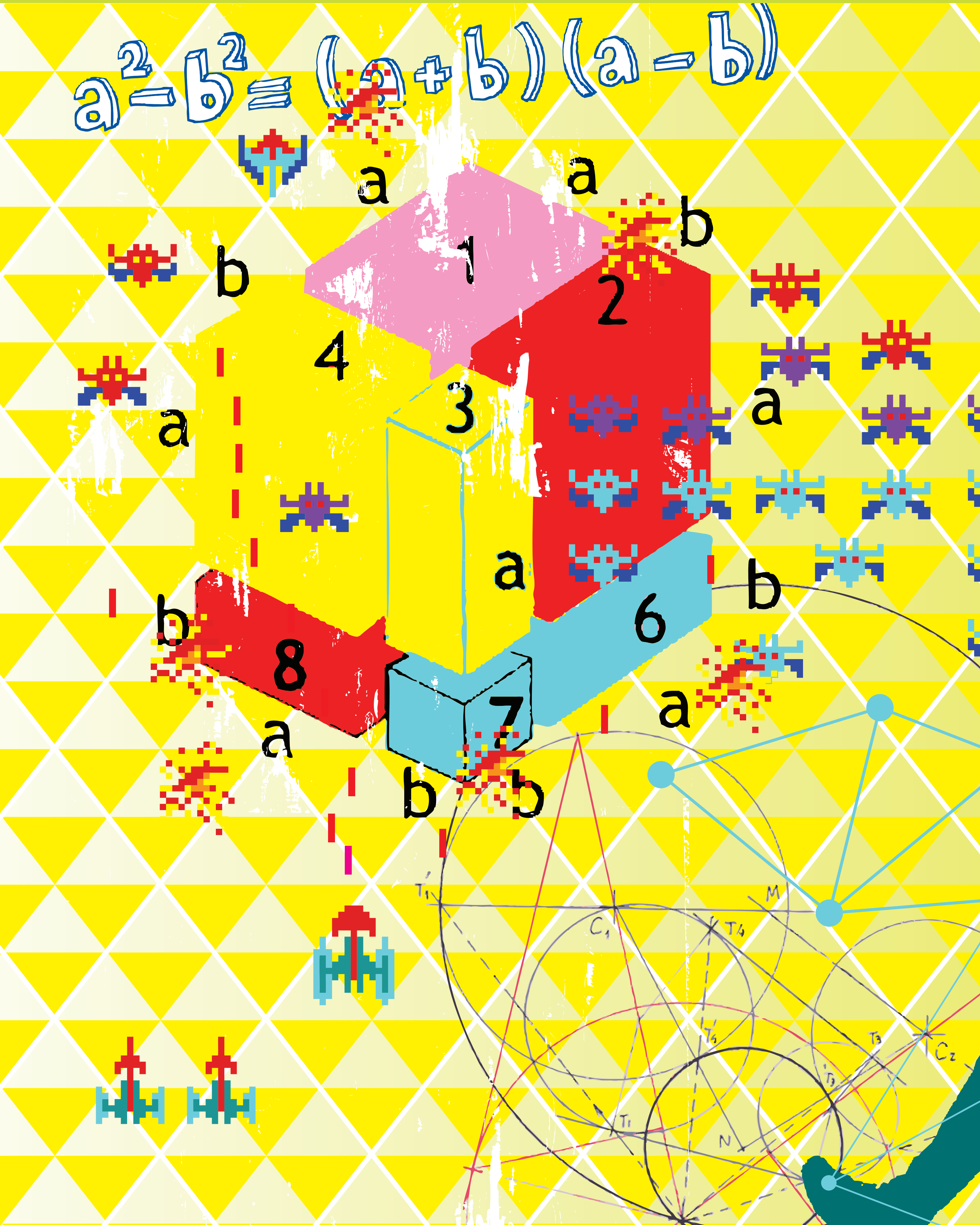
Bloque 5

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
26. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Dado un problema, determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se puede resolver, y viceversa, proponer una situación que se modele con una de esas representaciones.	26.1 Los discípulos de Pitágoras	Programa 47		
	26.2 Ecuaciones y geometría		Interactivo	
27. Conos y cilindros. Anticipar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras. Construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Determinar la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera cono recto.	27.1 Sólidos de revolución	Programa 48		
	27.2 Cilindros	Programa 49		
	27.3 Conos		Interactivo	
	27.4 Secciones de corte			
28. Volumen del cono y del cilindro. Construir las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.	28.1 Tinacos de agua	Programa 50	Interactivo	
	28.2 Conos de papel	Programa 51		
29. Estimar volúmenes. Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos. Calcular datos desconocidos dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.	29.1 Problemas prácticos	Programa 52	Interactivo	
30. Gráfica caja-brazo. Interpretar, elaborar y utilizar gráficas de cajabrazos de un conjunto de datos para analizar su distribución a partir de la mediana o de la media de dos o más poblaciones.	30.1 Interpretación de datos	Programa 53	Interactivo	
	30.2 Construcción de la gráfica caja-brazos			
	30.3 Comparación de datos mediante la gráfica de caja-brazos	Programa 54		
EVALUACIÓN				

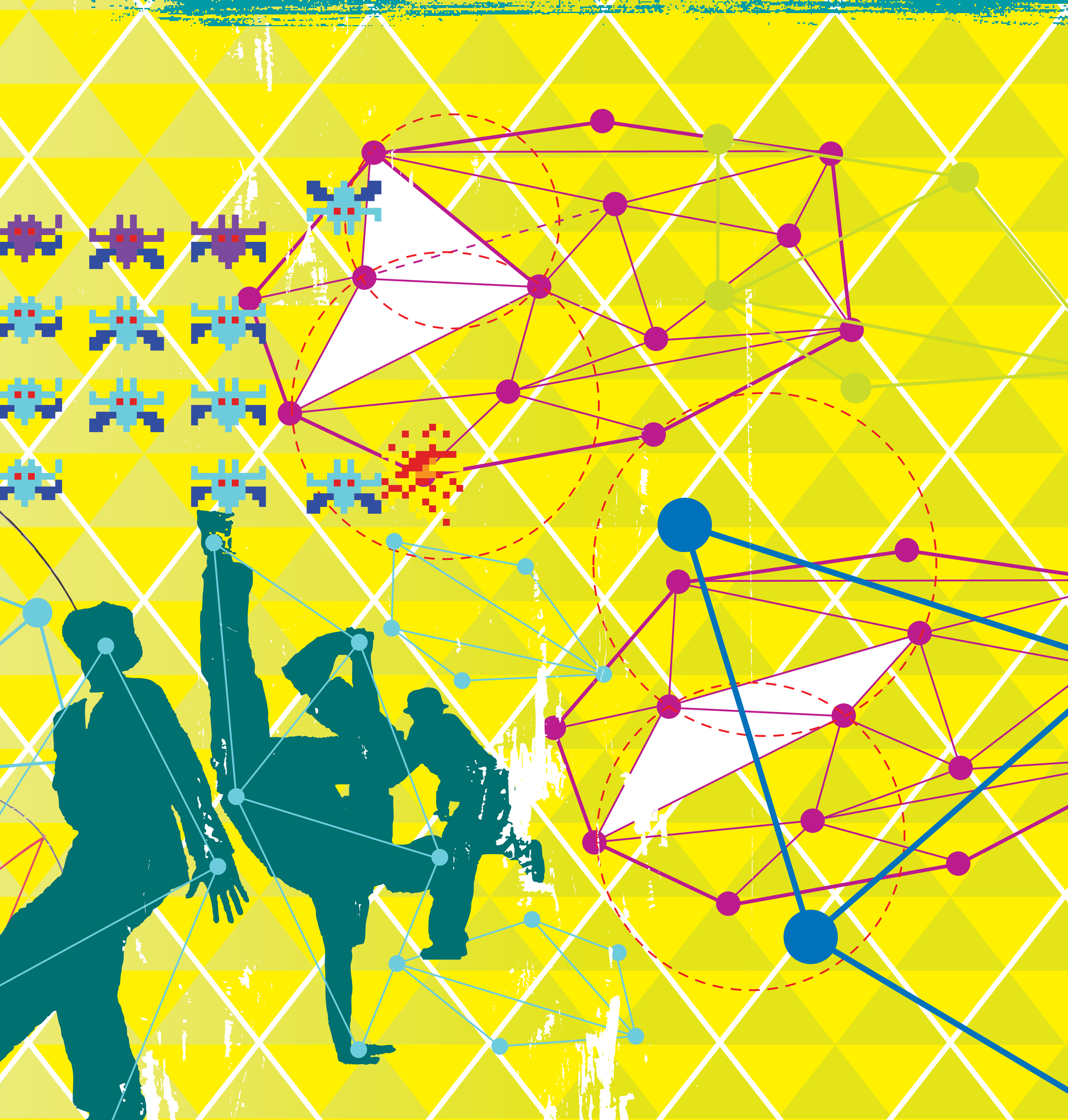
EJE 1:	Sentido numérico y pensamiento algebraico
EJE 2:	Forma, espacio y medida
EJE 3:	Manejo de la información

Clave de logos

	Trabajo individual		Sitios de Internet
	En parejas		Bibliotecas Escolares y de Aula
	En equipos		Programa de Televisión
	Todo el grupo		Interactivo
	Conexión con otras asignaturas		Audiotexto
	Glosario		Aula de Medios
	Consulta otros materiales		Otros Textos
	CD de recursos		


$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
a
a
b
b
1
2
4
3
a
a
a
b
6
b
8
7
a
a
b
b

BLOQUE 1



Productos notables y factorización

En esta secuencia descubrirás procedimientos simplificados para efectuar multiplicaciones con expresiones algebraicas y para encontrar los factores que dan lugar a un producto algebraico determinado.

SESIÓN 1

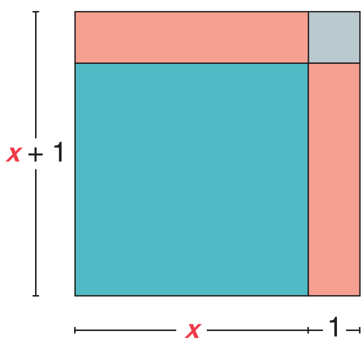
A FORMAR CUADRADOS

>>> Para empezar

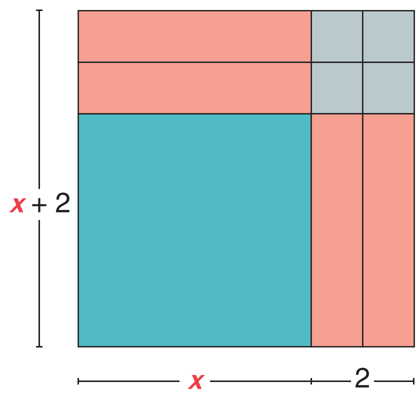
Los bloques algebraicos son una herramienta que permite representar operaciones con expresiones algebraicas. En la secuencia 12 de **Matemáticas II**, volumen I los usaste para multiplicar polinomios; ahora, te ayudarán a encontrar, de manera simplificada, el resultado de elevar al cuadrado un binomio .

Recorta los **Bloques algebraicos** del anexo 1 **Recortables** y pégalos en cartón.

Con bloques de áreas x^2, x y 1 forma cuadrados de diferente tamaño e identifica la expresión algebraica que corresponde a la medida de sus lados como se muestra en las dos figuras siguientes.

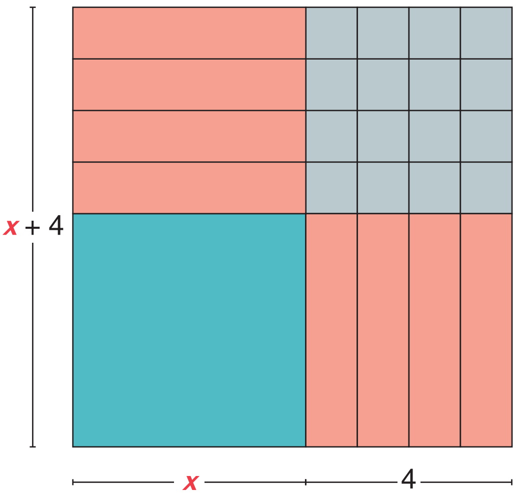


$$A = x^2 + x + x + 1$$
$$= x^2 + 2x + 1$$



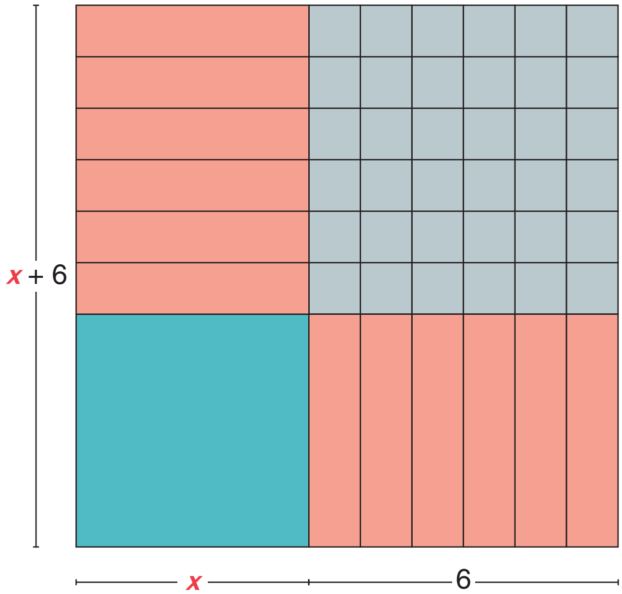
$$A = x^2 + 2x + 2x + 4$$
$$= x^2 + 4x + 4$$

Encuentra el trinomio que representa el área de los dos cuadrados siguientes.



A = ____________

= ____________



A = ____________

= ____________

>>> Consideremos lo siguiente

En la siguiente tabla aparecen binomios que representan las medida del lado de diferentes cuadrados, así como los trinomios que corresponden a sus respectivas áreas.

a) Examina los dos primeros ejemplos y completa la siguiente tabla.

Binomio	Trinomio
$x + 1$	$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$x + 2$	$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
$x + 3$	$(x + 3)^2 =$
$x + 4$	$(x + 4)^2 =$
$x + 6$	$(x + 6)^2 =$
$x + 10$	$(x +10)^2 =$

b) Subraya el trinomio que representa el área de un cuadrado cuyo lado mide $x + 100$.

$x^2 + 100x + 10\ 000$ $\qquad$ $x^2 + 10\ 000$ $\qquad$ $x^2 + 200x + 10\ 000$

Comparen sus soluciones. Comenten cómo obtuvieron los trinomios que son resultado de elevar los binomios al cuadrado.

>>> Manos a la obra

I. La figura 1 muestra un cuadrado que mide de lado $x + 5$.

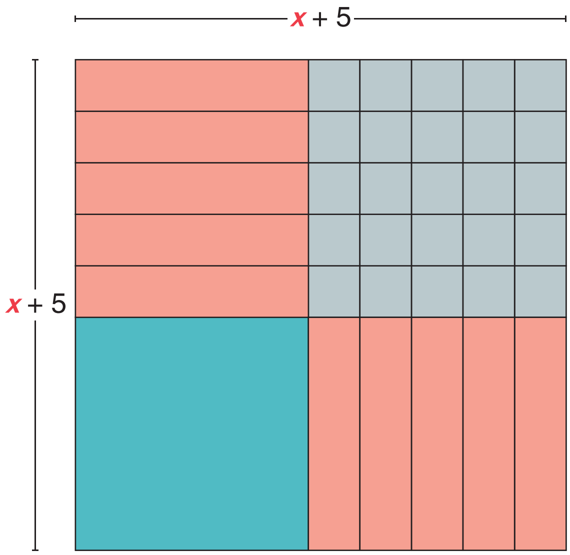


Figura 1

a) ¿Cuántos bloques de área x^2 se utilizaron para formar el cuadrado? ____________

b) ¿Cuántos de área x? ____________

c) ¿Cuántos de área 1? ____________

d) De las siguientes expresiones, subrayen las que representan el área del cuadrado.

$x + 5$

$x^2 + 5x + 5x + 25$

$x^2 + 25$

$x^2 + 10x + 25$

e) Verifiquen si las expresiones que subrayaron se obtienen al elevar al cuadrado el binomio $x + 5$. Para eso, completen la multiplicación $(x + 5)(x + 5)$ y luego sumen los términos semejantes para obtener un trinomio.

$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$

$=$ ____________________

$=$ ____________________

Recuerden que:

Para multiplicar dos binomios se multiplica cada término de un binomio por todos los términos del otro y luego se suman los términos que son semejantes.

$(x + 7)(x + 7) = x^2 + 7x + 7x + 49$

$= x^2 + 14x + 49$

Comparen sus soluciones y comenten cuál de los siguientes procedimientos usarían para hacer de manera simplificada la multiplicación $(x + 8)(x + 8)$, sin necesidad de hacer una multiplicación término por término.

- El resultado se obtiene sumando el cuadrado del primer término (x^2) y el cuadrado del segundo término (64).
- El resultado se obtiene sumando el cuadrado del primer término (x^2) más el producto de los dos términos ($8x$) más el cuadrado del segundo término (64).
- El resultado se obtiene sumando el cuadrado del primer término (x^2) más el doble del producto de los dos términos ($16x$) más el cuadrado del segundo término (64).

Verifiquen sus reglas haciendo la multiplicación $(x + 8)(x + 8)$.

II. Eleven al cuadrado el binomio $(2x + 3)$ y multipliquen término por término para obtener cuatro productos parciales como lo indican las líneas. Luego sumen los términos semejantes hasta obtener un trinomio.

$\boxed{4x^2}$ $\boxed{}$

$$(2x + 3)(2x + 3) = 4x^2 + 6x + \underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$\boxed{}$ $+$

$\boxed{6x}$ $\boxed{12x}$

Trinomio cuadrado perfecto

a) ¿Qué relación hay entre el término $4x^2$ del trinomio y el término $2x$ del binomio?

____

b) ¿Qué relación hay entre el 9 del trinomio y el 3 del binomio? _______________

c) ¿Cuántas veces aparece el producto parcial $6x$ en la multiplicación? __________

d) ¿Qué términos del binomio se multiplicaron para obtenerlo? _______________

e) ¿Qué relación hay entre el término $12x$ del trinomio y el producto de los dos términos del binomio? _______________________

Comparen sus soluciones y encuentren una procedimiento simplificado para obtener el trinomio que resulta al efectuar la operación $(3x + 2)^2$, sin necesidad de hacer una multiplicación término por término.

>>> A lo que llegamos

La expresión que resulta al elevar al cuadrado un binomio se llama trinomio cuadrado perfecto.

El siguiente procedimiento permite obtener el resultado de manera simplificada.

El primer término del binomio se eleva al cuadrado

El segundo término del binomio se eleva al cuadrado

$$(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

Se multiplican ambos términos
$(3x)(5) = 15x$

Se duplica el producto
$(2)(15x) = 30x$

>>> Lo que aprendimos

Escribe el binomio al cuadrado o el trinomio cuadrado perfecto que falta en cada renglón de la siguiente tabla.

Binomio al cuadrado	Trinomio cuadrado perfecto
$(x + 9)^2$	
$(3x + 1)^2$	
	$x^2 + 24x + 144$
$(2m + 5)^2$	
	$4x^2 + 36x + 81$

SESIÓN 2

EL CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

>>> Consideremos lo siguiente

Del cuadrado de la figura 2 se recortaron algunas partes hasta que quedó otro cuadrado más pequeño, como se muestra en la figura 3.

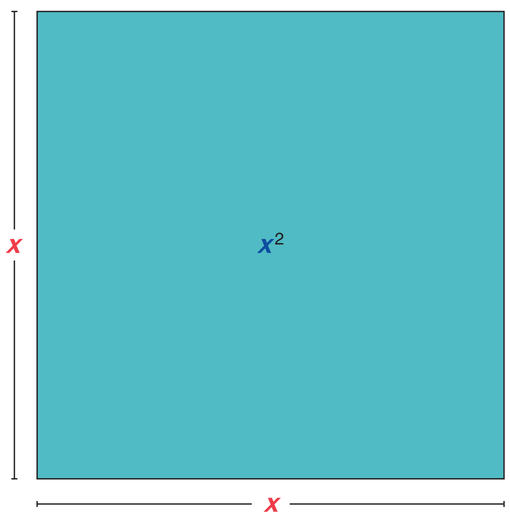


Figura 2

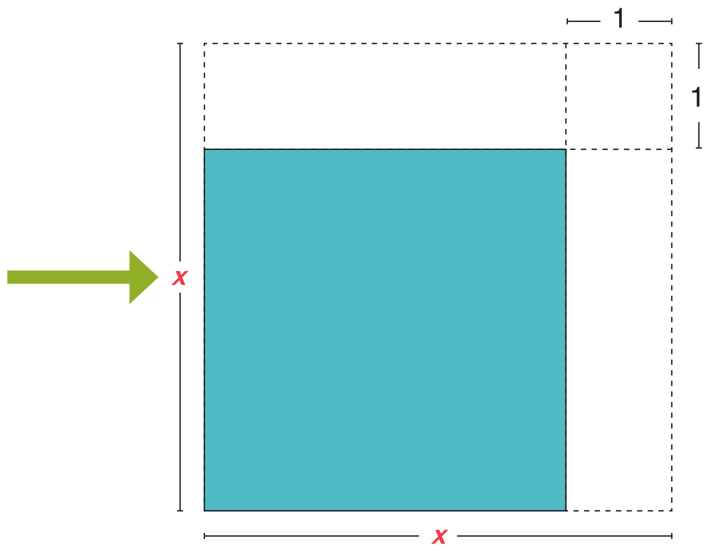


Figura 3

a) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado azul de la figura 3? ______________

b) La expresión algebraica que representa el área del cuadrado azul es: ______________

Comparen sus soluciones.

>>> Manos a la obra

I. Ana y Ricardo decidieron usar algunos bloques algebraicos para completar el área del cuadrado azul de la figura 3.

Ricardo se dio cuenta de que con un bloque de área x y otro de área $x - 1$ podía completar el cuadrado de lado x.

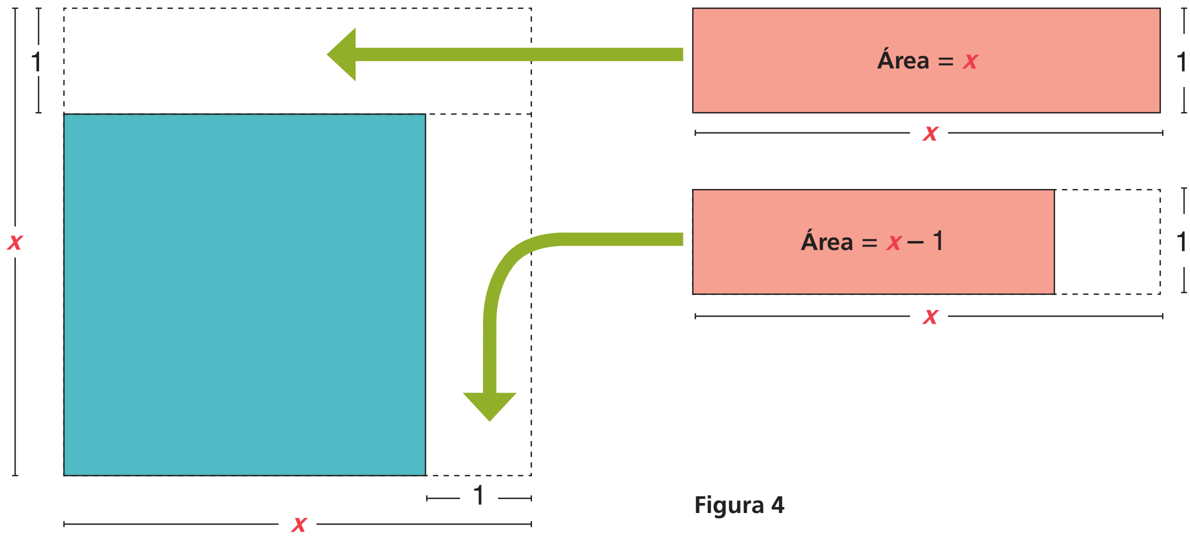


Figura 4

Después de completar el cuadrado de lado x, expresó que el área del cuadrado azul de la figura 3 era: $x^2 - x - (x - 1)$.

Ana, por su parte, usó tres bloques para cubrir el cuadrado de lado x; después expresó el área del cuadrado azul como $x^2 - 2(x - 1) - 1$.

a) Usen los bloques algebraicos de la derecha (de áreas $x - 1$ y 1) para completar el cuadrado de lado x como crean que lo hizo Ana; luego tracen cada bloque sobre la figura 5 e ilumínenlos de acuerdo a su color.

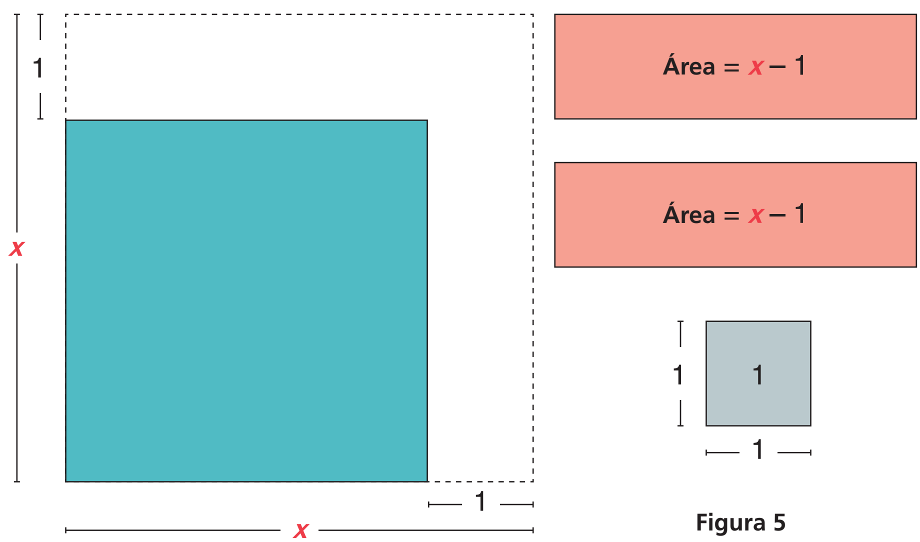


Figura 5

b) Completen la igualdad y simplifiquen ambas expresiones hasta obtener un trinomio.

Procedimiento de Ana:

$A = (x - 1)^2 = x^2 - 2(x - 1) - 1 =$ ____________________ = ____________________

Procedimiento de Ricardo:

$A = (x - 1)^2 = x^2 - x - (x - 1) =$ ____________________ = ____________________

Los trinomios que obtuvieron en ambos procedimientos deben ser iguales. Si no resultaron así, revisen sus operaciones y corríjanlas hasta obtener el mismo trinomio cuadrado perfecto.

c) Otra manera de obtener el área del cuadrado azul de la figura 3 consiste en elevar al cuadrado el binomio $x - 1$. Háganlo y no olviden reducir los términos semejantes.

$\boxed{x^2}$ $\boxed{}$

$(x - 1)^2 = (x - 1)\,(x - 1) = x^2 - x -$ ________ + ________ = ____________________

$\boxed{}$ +

Trinomio cuadrado perfecto

$\boxed{-x}$ $\boxed{-2x}$

II. Otengan el resultado de $(y - a)^2$, para verificar si al elevar al cuadrado cualquier binomio que representa una diferencia se obtiene un trinomio cuadrado perfecto. No olviden sumar los términos semejantes.

$\boxed{y^2}$ $\boxed{}$

$(y - a)^2 = (y - a)\,(y - a) = y^2 - ay -$ ______ + ______ = ____________________

$\boxed{}$

$\boxed{ay}$ $\boxed{-2ay}$

¿Obtuvieron un trinomio cuadrado perfecto? __________

Comparen sus soluciones y comenten cómo se puede obtener el trinomio cuadrado perfecto que corresponde al cuadrado de una diferencia, sin seguir el procedimiento de la actividad **II**.

>>> A lo que llegamos

Al elevar al cuadrado una diferencia también se obtiene un trinomio cuadrado perfecto, pero ahora el doble del producto de los términos del binomio tiene signo menos.

El siguiente procedimiento permite obtener el resultado de manera simplificada.

x se eleva al cuadrado

b se eleva al cuadrado

$$(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$$

El producto de (x) y ($-b$) se duplica

Te recomendamos tomar en cuenta los dos aspectos siguientes:

a) El cuadrado de una diferencia puede expresarse como el cuadrado de una suma. Por ejemplo:

$$(x - 12)^2 = [x + (-12)]^2 = x^2 + 2(x)(-12) + (-12)^2$$
$$= x^2 - 24x + 144$$

b) Hay expresiones que parecen trinomios cuadrados perfectos pero no lo son, por ejemplo: $x^2 - 2x + 9$.

Como tiene dos términos que son cuadrados: x^2 y 9, podría suponerse que el trinomio es resultado de desarrollar $(x - 3)^2$, sin embargo $(x - 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 - 6x + 9$.

Recuerda que:

El producto de un número negativo elevado al cuadrado es positivo.

$(-12)^2 = (-12)(-12) = +144$

>>> Lo que aprendimos

1. Encuentra el cuadrado de los siguientes números aplicando la regla para elevar al cuadrado un binomio, tal como se muestra en los dos ejemplos.

$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2(100)(3) + 2^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$

$499^2 = (500 - 1)^2 = 500^2 + 2(500)(-1) + 1^2 = 250\,000 - 1\,000 + 1 = 249\,001$

a) $19^2 = (20 - 1)^2 = (\_\_\_\_)^2 - 2(\_\_\_\_)(\_\_\_\_) + (\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

b) $51^2 = (50 + 1)^2 = (\_\_\_\_)^2 + 2(\_\_\_\_)(\_\_\_\_) + (\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

c) $105^2 = (100 + 5)^2 = ($ ______ $)^2 + 2 ($ ______ $) ($ ______ $) + ($ ______ $)^2 =$ ________________ = __________

d) $198^2 = (200 - 2)^2 = ($ ______ $)^2 - 2 ($ ______ $) ($ ______ $) + ($ ______ $)^2 =$ ________________ = __________

e) $999^2 = ($ _______ $)^2 = ($ ______ $)^2 - 2 ($ ______ $) ($ ______ $) + ($ ______ $)^2 =$ ________________ = __________

2. Escribe el binomio al cuadrado o el trinomio que falta en cada renglón. ¡Ten cuidado, hay un trinomio que no es cuadrado perfecto! Eleva al cuadrado los binomios que obtengas para verificar si corresponden al trinomio presentado en la columna izquierda de la tabla.

Binomio al cuadrado	Trinomio
$(x - 7)^2$	
$(2x + 1)^2$	
	$x^2 - 24x + 144$
$(x + 12)^2$	
	$x^2 - 14x + 9$
	$x^2 + 3x + 2.25$
$(x + \frac{1}{2})^2$	
	$4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

a) Escribe el trinomio de la tabla que no es cuadrado perfecto: ________________

b) ¿Por qué no es un trinomio cuadrado perfecto? ____________________________

____

SESIÓN 3

LA DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS

>>> Para empezar

Dos binomios que sólo difieren en el signo de uno de sus términos se llaman *binomios conjugados*, por ejemplo $x + 3$ es el binomio conjugado de $x - 3$; $2x + 6$ es el binomio conjugado $-2x + 6$.

>>> Consideremos lo siguiente

A un cuadrado de área x^2 se le ha cortado en una de sus esquinas un cuadrado de área a^2 en una de sus esquinas, tal como se muestra en la figura 6.

La figura 6 se cortó por la línea punteada roja y con las dos piezas se formó el rectángulo de la figura 7.

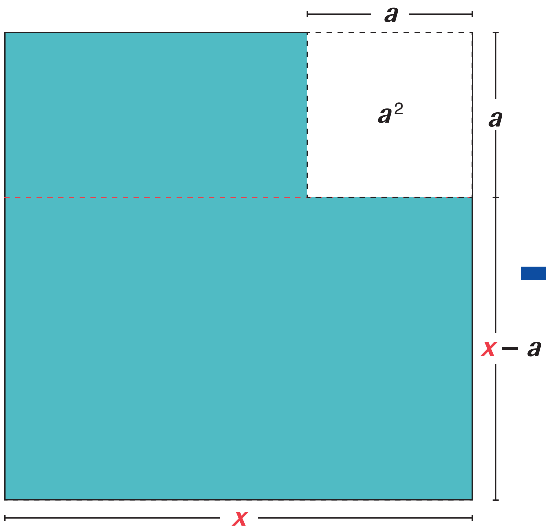


Figura 6

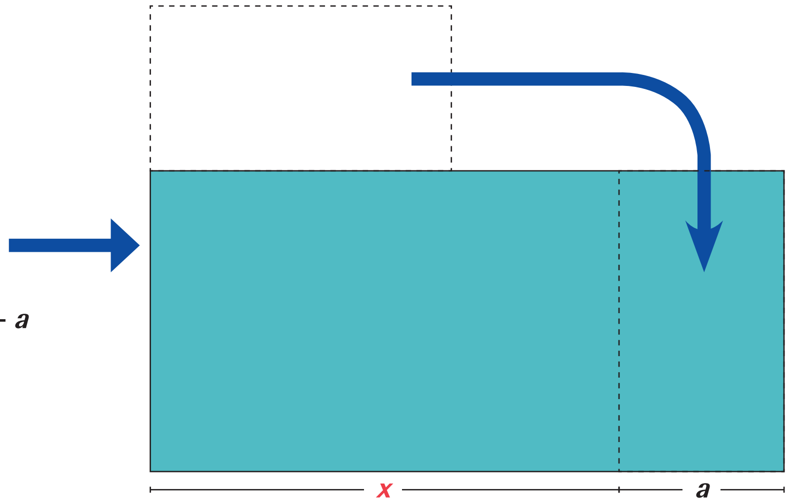


Figura 7

a) ¿Cuál es el área de la superficie azul de la figura 6? ________________

b) ¿Qué binomios tienes que multiplicar para obtener el área del rectángulo formado por las dos piezas en la figura 7?

Área = (____________) (____________)

c) Realiza la multiplicación término por término y suma los términos semejantes para obtener el área de la figura 7.

(____________) (____________) = ______________________________

= ______________________________

Comparen sus soluciones.

>>> Manos a la obra

I. Calquen en una hoja la figura 6, corten por la línea punteada y formen el rectángulo de la figura 7.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la medida de la base del rectángulo azul de la figura 7? ________________

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la medida de su altura?

____

c) Expresen la diferencia de los cuadrados x^2 y a^2 como el producto de dos binomios conjugados.

$x^2 - a^2 =$ (________________) (________________)

d) Factoricen $16 - 9x^2$ como una diferencia de cuadrados.

$16 - 9x^2 =$ ( ) ( )

II. Realicen las siguientes multiplicaciones término por término y verifiquen si después de sumar los términos semejantes obtienen una diferencia de cuadrados.

$\boxed{4x^2}$ $\boxed{}$

a) $(2x + 3)\ (2x - 3) = 4x^2 - 6x +$ _______ $-$ _______ $=$ _______________

$\boxed{}$ $\boxed{-6x}$

b) $(-2x + 3)\ (2x + 3) =$ ______________________ $=$ ________________

c) $(-2x - 3)\ (2x - 3) =$ ______________________ $=$ ________________

d) $(-2x + 3)\ (-2x - 3) =$ ______________________ $=$ ________________

e) ¿En qué casos se obtuvo una diferencia de cuadrados? ____________

f) ¿En qué casos no? ____________

Comenten como, a partir de una diferencia de cuadrados, podrían identificar los binomios conjugados que la producen al ser multiplicados.

>>> A lo que llegamos

El producto de dos binomios conjugados es una diferencia de cuadrados.

$\boxed{\text{Binomios conjugados}}$ $\quad (x + y)\ (x - y) = x^2 - y^2 \quad$ $\boxed{\text{Diferencia de cuadrados}}$

La factorización de una diferencia de cuadrados son dos binomios conjugados.

La relación anterior puede aplicarse para multiplicar parejas de números,. Para ello, tienen que presentarlos como si fueran binomios conjugados. Ejemplos:

$$(102)\ (98) = (100 + 2)\ (100 - 2) = 10\,000 - 4 = 9\,996$$

$$(47)\ (53) = (50 - 3)\ (50 + 3) = 2\,500 - 9 = 2\,491$$

>>> Lo que aprendimos

1. Realiza las siguientes multiplicaciones. Expresa cada pareja de factores como binomios conjugados s y obtén el producto mediante una diferencia de cuadrados.

a) (21) (19) = ______________________ = ________________ = ____________

b) (32) (28) = ______________________ = ________________ = ____________

c) (97) (103) = ______________________ = ________________ = ____________

d) (1 002) (998) = ______________________ = ________________ = ____________

2. Completa la siguiente tabla escribiendo para cada pareja de binomios conjugados su respectiva diferencia de cuadrados y viceversa.

Binomios conjugados	**Diferencia de cuadrados**
$(x + 8)\ (x - 8)$	
$(2x + 3)\ (2x - 3)$	
	$x^2 - 100$
	$4x^2 - 25$
$(-3x + 2y)\ (3x + 2y)$	

A FORMAR RECTÁNGULOS

SESIÓN 4

>>> Para empezar

I. En la figura 8 se muestra un rectángulo formado con los bloques algebraicos.

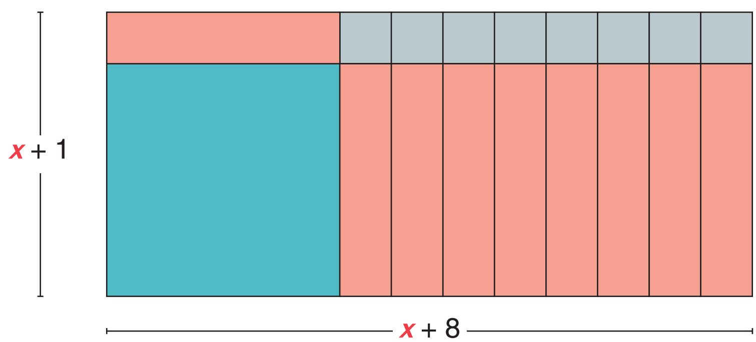


Figura 8

a) ¿Cuántos bloques de área x^2 se utilizaron? ____________

b) ¿Cuántos de área x? ____________

c) ¿Cuántos de área 1? ____________

d) ¿Cuál es su área? ____________

II. Con los bloques algebraicos apropiados x^2, x y 1 reproduce las figuras 9, 10 y 11 de tal manera que tengan el área indicada. Traza en cada caso los bloques que utilizaste para formarla y escribe la medida de su base y de su altura.

Área = $x^2 + 9x + 14$

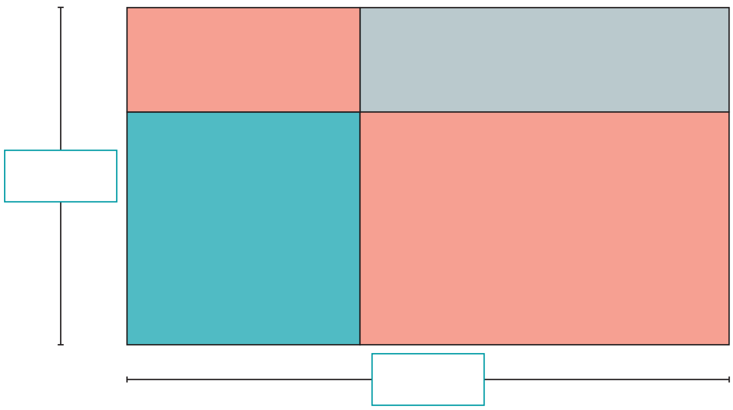


Figura 9

Área = $x^2 + 9x + 18$

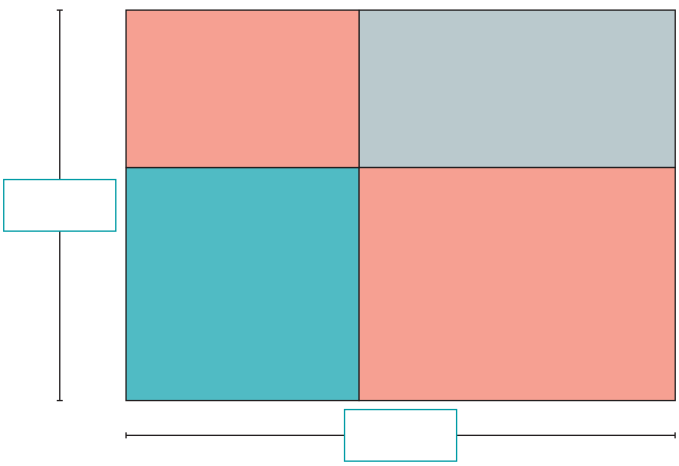


Figura 10

Área = $x^2 + 9x + 20$

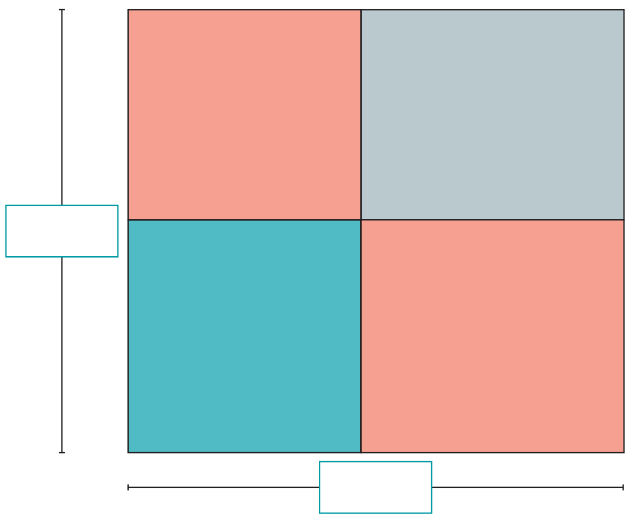


Figura 11

>>> Consideremos lo siguiente

Completa la tabla siguiente.

Primer factor (Medida de la base)	Segundo factor (Medida de la altura)	Producto (Área del rectángulo)
$x + 8$	$x + 1$	
$x + 7$	$x + 2$	
		$x^2 + 9x + 18$
$x + 5$	$x + 4$	
$x + 3$	$x + 2$	
		$x^2 + 5x + 4$

a) ¿Qué regla sigues para encontrar el producto si conoces los dos factores?

____

____

____

b) Si conoces el producto, ¿cómo obtienes los factores? ___________________

____

Comparen sus soluciones.

>>> Manos a la obra

I. En la figura 12, con bloques algebraicos se formó un rectángulo de base $x + 5$ y altura $x + 2$.

a) Observen la figura 12 y, sin hacer la multiplicación término por término, encuentren el producto de $(x + 5)(x + 2) =$ ___________________

b) ¿Cómo lo obtuvieron? ___________________

____

____

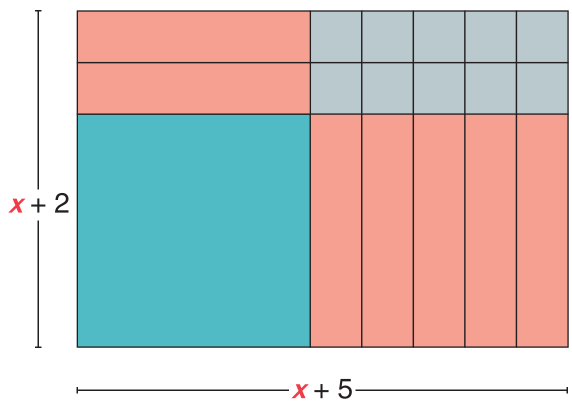


Figura 12

Los binomios $(x + 5)$ *y* $(x + 2)$ *tienen un término común que es* x. *Estos binomios se llaman binomios de término común.*

5 *y* 2 *son los términos NO comunes.*

c) Ahora realicen la multiplicación término por término.

$\boxed{x^2}$ $\boxed{}$

$(x + 5)\ (x + 2) = x^2 + 2x +$ ________ $+ 10 =$ ____________________

$\boxed{}$ $+$

$\boxed{2x}$ $\boxed{7x}$

d) ¿Qué operación hacen para obtener el término x^2? ________________________

e) ¿Qué operación hacen con los términos 5 y 2 de los binomios para obtener el coeficiente del término $7x$ del producto? ________________________________

f) ¿Qué operación hacen con 5 y 2 para obtener el término 10?

____

g) Apliquen lo anterior para completar la igualdad.

$(x + 6)\ (x + 3) = x^2 +$ __________ $x +$ __________

Comparen sus soluciones y discutan cómo obtuvieron la regla para multiplicar dos binomios con término común.

>>> A lo que llegamos

Para obtener el producto de dos binomios con término común se puede hacer lo siguiente:

$$(x + 4)\ (x + 3) = x^2 + 7x + 12$$

1°. El término común x se eleva al cuadrado.

2°. Se suman los términos no comunes: 4 + 3 = 7; el resultado 7 se multiplica por x.

3°. Se multiplican los términos no comunes: (4) (3) = 12

II. Apliquen la regla anterior para obtener el producto de $(x + 5)\ (x - 2)$:

a) ¿Cuánto obtienen al sumar (+5) + (–2)? __________

b) ¿Cuánto obtienen al multiplicar (+5) + (–2)? __________

c) Escriban el producto sin realizar la multiplicación término por término

$(x + 5)\ (x - 2) =$ __________________________

d) Ahora multipliquen término por término para verificar el resultado anterior.

$\boxed{x^2}$ $\boxed{}$

$(x + 5)\ (x - 2) = x^2 - 2x +$ _______ $-$ _______ $=$ ______________

$\boxed{}$

$\boxed{-2x}$

e) ¿Son iguales los productos obtenidos en los incisos c) y d)? __________

Comparen sus soluciones, discutan y verifiquen si la regla funciona par cualquier multiplicación de binomios con término común.

III. Al multiplicar dos binomios con término común se obtuvo:

$$(\qquad\qquad)\ (\qquad\qquad) = y^2 + 10y + 16$$

a) ¿Cuál es el término común? __________

b) ¿Qué números se multiplicaron para obtener 16? __________

c) ¿Cuánto deben sumar esos números? __________

d) Escriban en los paréntesis los factores que correspondan al trinomio $y^2 + 10y + 16$.

e) Multipliquen en su cuaderno los binomios término por término para verificar el resultado anterior.

Comparen sus soluciones y comenten qué operaciones tienen que realizar para encontrar el término común y los términos no comunes de los binomios.

>>> A lo que llegamos

Para factorizar el trinomio $x^2 + 5x + 4$, se puede hacer lo siguiente:

1º. Se obtiene el término común; en este caso es x, porque $(x)\ (x) = x^2$

$$x^2 + 5x + 4 = (x + \underline{\qquad})\ (x + \underline{\qquad})$$

2º. Se buscan parejas de números enteros que multiplicados den 4.

$(2)\ (2) = 4$ $\qquad$ $(-2)\ (-2) = 4$ $\qquad$ $(4)\ (1) = 4$ $\qquad$ $(-4)\ (-1) = 4$

3. Se selecciona la pareja de números que sumada dé el coeficiente del término $5x$; en este caso, se seleccionan 4 y 1 porque $4 + 1 = 5$.

Por lo tanto:

$x^2 + 5x + 4 = (x + 4)\ (x + 1)$

>>> Lo que aprendimos

1. Aplica el producto de los binomios con término común en cada multiplicación.

a) (23) (25) = (20 + 3) (20 + 5) = 400 + (8) (20) + 15 = ____________

b) (105) (98) = (100 + 5) (100 - 2) = ____________

c) (48) (49) = ____________

2. Completa la tabla.

Binomios con término común	Trinomio de segundo grado
$(x + 8)(x + 2)$	
	$x^2 + 9x + 18$
	$x^2 - 3x - 10$
	$x^2 + 3x + 2$
	$x^2 - 3x + 2$
$(x + a)(x + b)$	

SESIÓN 5

UN CASO ESPECIAL DE FACTORIZACIÓN

>>> Consideremos lo siguiente

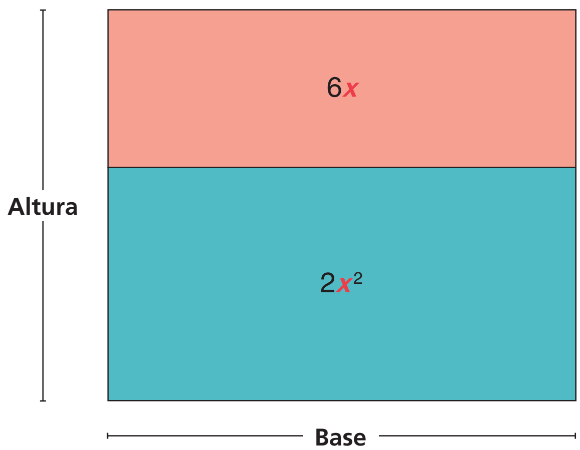


Figura 13

No siempre ocurre que el área de un rectángulo corresponda a un trinomio. Por ejemplo, en la figura 13 se representa un rectángulo de área $2x^2 + 6x$.

a) ¿Cuál es la medida de la base?

____

b) ¿Cuál es la medida de la altura?

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Sobre la figura 13, tracen dos bloques de área x^2 y seis de área x. Después, completen la tabla siguiente:

Rectángulo	Área	(Base) (Altura)
Azul	$2x^2$	$(2x)$ ( )
Rojo	$6x$	$(2x)$ ( )
Completo	$2x^2 + 6x$	$(2x)$ ( )

Como el factor $2x$ aparece en las tres multiplicaciones de la última columna, es un factor común de los términos $2x^2$ y $6x$.

¿Son iguales las expresiones que representan las medidas de las alturas de los rectángulos azul y rojo? ____________

Estas expresiones se llaman *factores no comunes* de los términos $2x^2$ y $6x$.

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Qué otros factores comunes pueden tener los términos $2x^2$ y $6x$?

b) ¿Pueden formarse rectángulos diferentes al de figura 13, con dos bloques de área x^2 y seis de área x? Dibújenlos en el pizarrón y expresen su área $2x^2 + 6x$ por medio de dos factores.

>>> A lo que llegamos

Para factorizar un binomio tal como $4x^2 + 20x$ se puede hacer lo siguiente:

1º. Se factoriza cada término del binomio de manera que el factor común contenga la literal y el máximo valor posible del coeficiente:

$$4x^2 = (4x)(x)$$

$$20x = (4x)(5)$$

2º. Se expresa la factorización:

$$4x^2 + 20x = (4x)(x + 5)$$

II. Apliquen la regla anterior para factorizar $14x^2y - 21xy^2$

$$14x^2y = (7xy)\;(\underline{\qquad\quad})$$

$$-21xy^2 = (7xy)\;(\underline{\qquad\quad})$$

$$14xy^2 - 21xy^2 = (7xy)\;(\underline{\qquad\quad} - \underline{\qquad\quad})$$

Comparen sus soluciones, discutan y verifiquen si la regla funciona para factorizar cualquier tipo de polinomios.

>>> Lo que aprendimos

1. Expresa los siguientes polinomios como el producto de dos factores.

a) $x^2 - 18x + 81 = (\underline{\qquad\qquad})\;(\underline{\qquad\qquad})$

b) $x^2 + 20x + 100 = (\underline{\qquad\qquad})\;(\underline{\qquad\qquad})$

c) $x^2 - 400 = (\underline{\qquad\qquad})\;(\underline{\qquad\qquad})$

d) $x^2 + 8x - 20 = (\underline{\qquad\qquad})\;(\underline{\qquad\qquad})$

e) $4x^2 + 8x = (\underline{\qquad\qquad})\;(\underline{\qquad\qquad})$

f) $x^2 + 11x + 24 = (\underline{\qquad\qquad})\;(\underline{\qquad\qquad})$

g) $x^2 + 10x + 24 = (\underline{\qquad\qquad})\;(\underline{\qquad\qquad})$

h) $x^2 + 14x + 24 = (\underline{\qquad\qquad})\;(\underline{\qquad\qquad})$

i) $x^2 + 2x - 24 = (\underline{\qquad\qquad})\;(\underline{\qquad\qquad})$

j) $9x^2 - 36x = (\underline{\qquad\qquad})\;(\underline{\qquad\qquad})$

2. Factorizando podría establecerse una regla útil para calcular el producto de ciertos números; examina las siguientes multiplicaciones y trata de encontrar la relación entre los factores involucrados y el resultado. ¿Se puede establecer una regla general?

(12) (18) = 216 (23) (27) = 621 (31) (39) = 1 209 (54) (56) = 3 024

a) ¿Qué relación matemática encuentras entre las cifras de las unidades de los factores? ______________________________

b) ¿Cómo obtienes el número formado por las dos cifras de la derecha del producto?

____

____

c) ¿Cómo obtienes el número formado por las demás cifras de la izquierda del producto? ____

____

d) Si ya descubriste la regla, calcula mentalmente el resultado de cada operación.

(13) (17) = ________ (43) (47) = ________ (61) (69) = ________

(74) (76) = ________ (88) (82) = ________ (191) (199) = ________

>>> Para saber más

Sobre productos notables y factorización, consulta:
http://interactiva.matem.unam.mx
Ruta1: Álgebra → Una embarrada de álgebra → Binomio al cuadrado
Ruta1: Álgebra → Una embarrada de álgebra → Diferencia de cuadrados
[Fecha de consulta: 1 de abril de 2008].
Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora (PUEMAC), UNAM.

SECUENCIA 2

Triángulos congruentes y cuadriláteros

En esta secuencia aplicarás criterios de congruencia para la justificación de propiedades sobre los cuadriláteros.

LADOS OPUESTOS IGUALES

SESIÓN 1

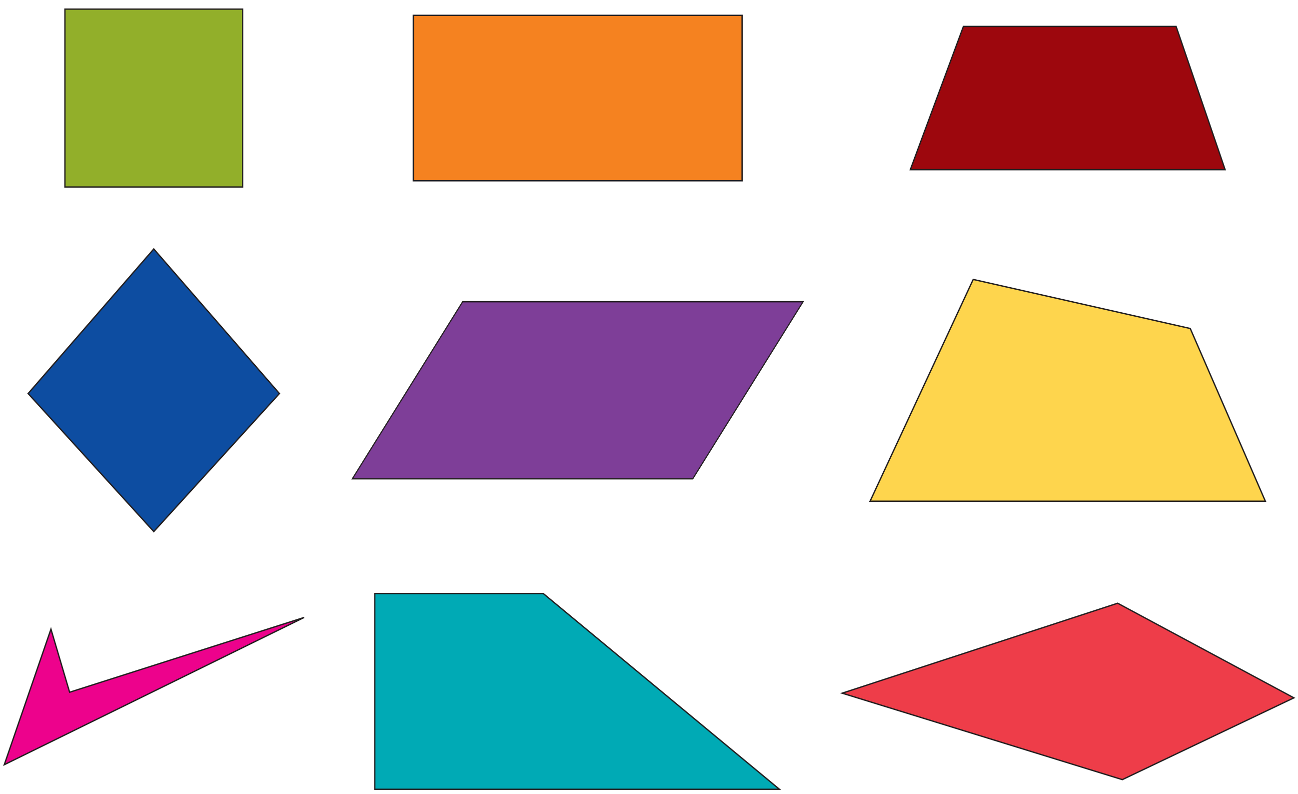
>>> Para empezar

A lo largo de la historia se han hecho afirmaciones matemáticas que por mucho tiempo se creyeron ciertas, luego fueron reconocidas como erróneas. Para evitarlo, los matemáticos exigieron que las afirmaciones matemáticas tuvieran una prueba rigurosa, es decir, una justificación que no deje lugar a dudas.

En esta sesión conocerás una de estas justificaciones rigurosas en la geometría.

>>> Consideremos lo siguiente

Observen los siguientes cuadriláteros, escojan cuáles tienen sus lados opuestos iguales.



De las siguientes propiedades, ¿cuál tienen en común los cuadriláteros que eligieron?

a) Sus cuatro lados son iguales.

b) Cualesquiera de sus lados opuestos son paralelos.

c) Sus cuatro ángulos son iguales.

d) Sus diagonales son perpendiculares.

Dibujen dos cuadriláteros que satisfagan la propiedad que eligieron anteriormente y verifiquen si cualesquiera de sus lados opuestos son iguales.

Comparen sus respuestas y comenten:

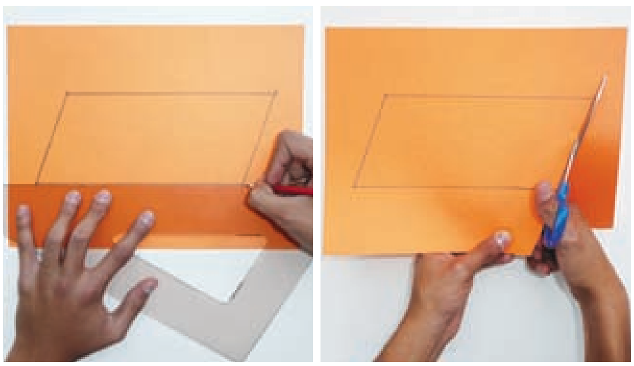
¿Qué diferencia hay entre que un cuadrilátero sea paralelogramo y que tenga sus pares de lados opuestos paralelos?

¿Será cierta la siguiente afirmación? Todos los paralelogramos tienen sus pares de lados opuestos iguales.

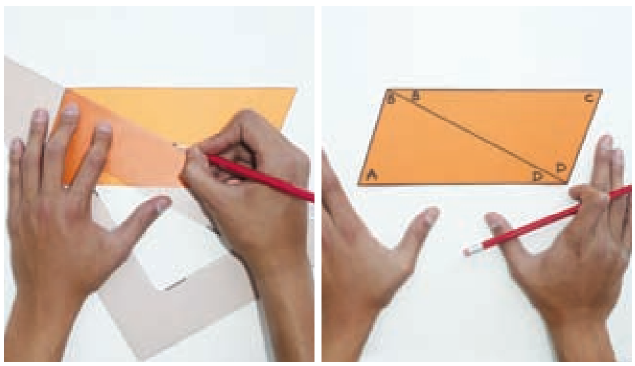
>>> Manos a la obra

I. Realicen la siguiente actividad.

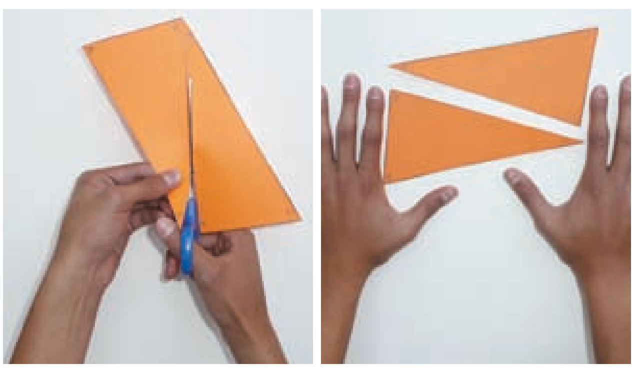
Paso 1. Dibujen en un papel un paralelogramo y recórtenlo.



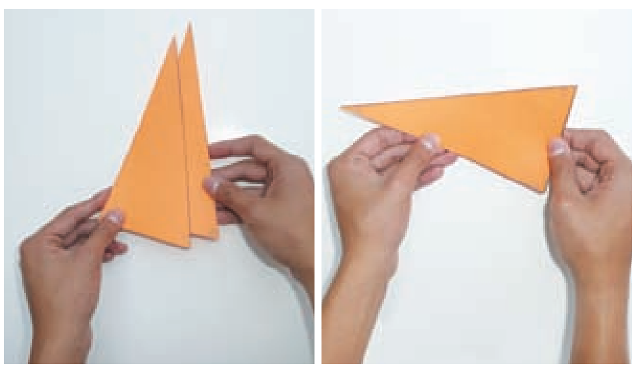
Paso 2. Después tracen una diagonal y anoten los nombres a los vértices del paralelogramo tal como se muestra.



Paso 3. Recorten los dos triángulos por la diagonal.



Paso 4. Pongan un triángulo encima del otro hasta que parezcan uno solo.



> *Recuerden que:*
>
> *Dos triángulos son congruentes si se pueden hacer corresponder sus lados y ángulos de tal manera que lados y ángulos correspondientes midan lo mismo.*

a) ¿Qué lado quedó sobrepuesto con el lado **AB**? ___________

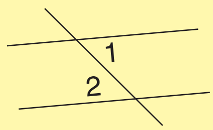
b) ¿Qué lado quedó sobrepuesto con el lado **BD**? ___________

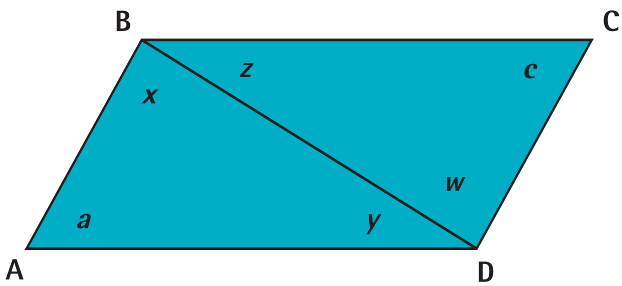
c) ¿Qué lado quedó sobrepuesto con el lado **DA**? ___________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Son congruentes △**ABD** y △**CDB**?

II. Resuelvan las siguientes actividades para justificar que los triángulos **ABD** y **CDB** son congruentes.

> *Recuerden que:*
>
> *Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales.*
>
> 
>
>
> $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$



a) De los ángulos marcados en la figura, ¿cuáles son alternos internos? (Por lo tanto iguales).

___________ = ___________ y ___________ = ___________

b) De los siguientes criterios de congruencia, ¿cuál usarían para justificar que los triángulos **ABD** y **CDB** son congruentes? Justifiquen su respuesta.

____

____

i) LLL (lado, lado, lado) ii) LAL (lado, ángulo, lado) iii) ALA (ángulo, lado, ángulo)

c) Algunas de las siguientes afirmaciones son consecuencia de que los triángulos **ABD** y **CDB** son congruentes, ¿cuáles son?

i) Los tres lados del △**ABD** son iguales y respectivamente los del △**CBD**.

ii) Los lados del △**ABD** son iguales a los correspondientes del △**CDB**.

iii) $\overline{\mathbf{BD}}$ es igual al lado $\overline{\mathbf{CB}}$.

iv) $\overline{\mathbf{AD}}$ es igual al lado $\overline{\mathbf{BC}}$.

v) $\overline{\mathbf{AB}}$ es igual al lado $\overline{\mathbf{CB}}$.

III. Expliquen cómo a partir de que los triángulos **ABD** y **CBD** son congruentes se puede afirmar que los lados opuestos del paralelogramo son iguales.

Comparen sus respuestas y comenten:

Además de los paralelogramos, ¿habrá otros cuadriláteros con lados opuestos son iguales?

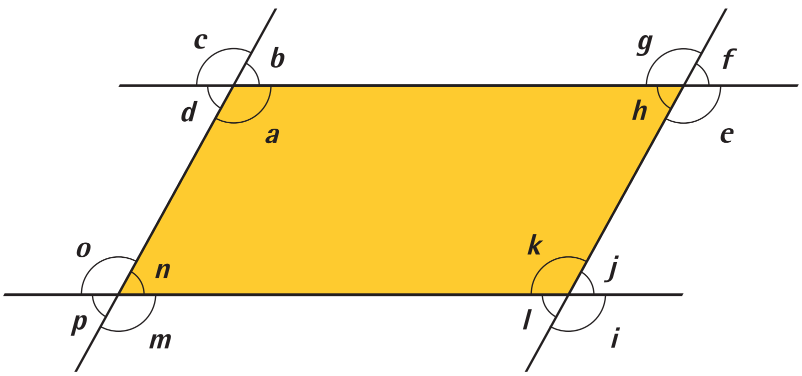
>>> A lo que llegamos

Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales, pues si se traza una de sus diagonales, se obtienen dos triángulos congruentes.

>>> Lo que aprendimos

La siguiente figura tiene marcados con diferentes letras algunos de los ángulos que en ella aparecen. Usa las etiquetas de esta figura para completar la justificación a la siguiente afirmación:

En un paralelogramo, ángulos opuestos son iguales.



Justificación:

*Los ángulos **a** y _____ son opuestos en el paralelogramo. Para justificar que son iguales, observemos que ∡**a** es igual a ∡ _____ pues son ángulos correspondientes (respecto a las dos paralelas horizontales y la transversal de la izquierda, ver figura). Luego ∡ _____ es igual a ∡**k** pues son ángulos alternos internos (respecto a las dos paralelas no horizontales y la transversal definida por la base del paralelogramo, ver figura). Lo cual muestra que los ángulos opuestos ∡ _____ y ∡**k** son iguales pues ambos son iguales a ∡ _____.*

De manera similar se puede justificar que los otros ángulos opuestos _____ y _____ son iguales.

Comparen sus respuestas.

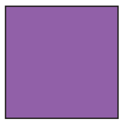
SESIÓN 2

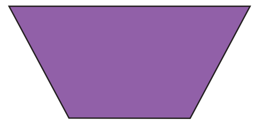
PUNTOS MEDIOS

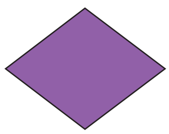
>>> Para empezar

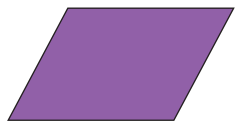
En geometría existen muchos cuadriláteros y se clasifican en varios tipos, tales como cuadrados, rectángulos y paralelogramos. Estos tipos no son excluyentes, es decir, un mismo cuadrilátero puede ser de dos o más tipos. Por ejemplo, un cuadrado es a la vez un rectángulo, un trapecio y un paralelogramo.

Describe a qué tipos pertenecen cada uno de los siguientes cuadriláteros:



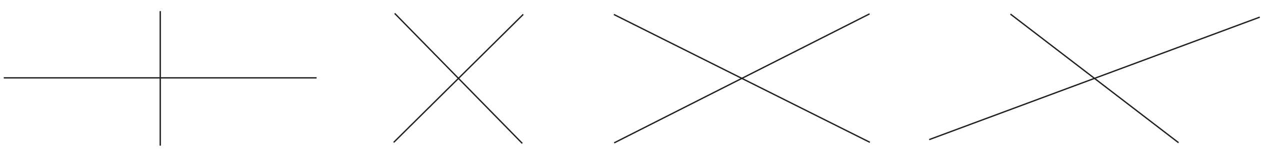






>>> Consideremos lo siguiente

Los siguientes pares de segmentos se intersecan en su punto medio. Unan los extremos de los segmentos, para formar cuadriláteros, y después contesten lo que se les pide.



¿Cuáles de los siguientes tipos de cuadrilátero aparecieron? Márquenlos con una ✓.

☐ Cuadrado ☐ Rectángulo ☐ Trapecio ☐ Paralelogramo ☐ Rombo

Los cuatro cuadriláteros que se formaron son todos de un mismo tipo. ¿Cuál es? Márquenlo con una ✓.

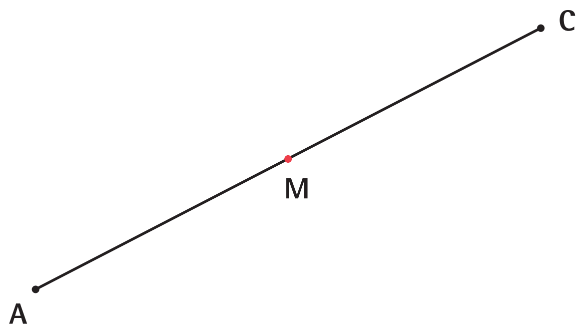
☐ Cuadrado ☐ Rectángulo ☐ Trapecio ☐ Paralelogramo ☐ Rombo

Cada uno dibuje otro par de rectas que se intersequen en su punto medio. Unan los extremos de los segmentos para formar un cuadrilátero y decidan si éste es del mismo tipo que el que marcaron en la pregunta anterior.

Comparen sus respuestas y comenten si siempre se formará un paralelogramo al unir los extremos de dos segmentos que se intersequen por su punto medio.

>>> Manos a la obra

I. En el segmento con extremos **A** y **C** se ha marcado el punto medio **M** con rojo. Dibuja otro segmento cuyo punto medio coincida con el punto **M** y etiqueta sus extremos con las letras **B** y **D**. Después traza los segmentos **AB**, **BC**, **CD** y **DA**.



a) Agrupa los segmentos **AM**, **BM**, **CM** y **DM** en parejas de segmentos iguales y justifica por qué son iguales.

_________ = _________ . Justificación: ___________________________

y

_________ = _________ . Justificación: ___________________________

b) Agrupa los ángulos **AMB**, **BMC**, **CMD** y **DMA** en parejas de ángulos iguales y justifica por qué son iguales.

_________ = _________ . Justificación: ___________________________

y

_________ = _________ . Justificación: ___________________________

II. De los siguientes criterios de congruencia, ¿cuál usarías para justificar que los triángulos **AMB** y **CMD** son congruentes?

i) LLL ii) LAL iii) ALA

Explica por qué los otros dos criterios no funcionan:

____

____

____

III. Como los triángulos **AMB** y **CMD** son congruentes, se pueden escribir algunas igualdades de lados y ángulos. Relaciona las siguientes dos columnas uniendo con una línea los elementos que tienen la misma magnitud.

$\overline{AM}$	$\overline{CM}$
$\overline{MB}$	$\overline{DC}$
$\overline{BA}$	$\measuredangle MDC$
$\measuredangle AMB$	$\measuredangle DCM$
$\measuredangle MBA$	$\overline{MD}$
$\measuredangle BAM$	$\measuredangle CMD$

IV. De las igualdades anteriores, ¿cuál crees que te sirva para argumentar que los segmentos **AB** y **CD** son paralelos?

_________ = _________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cómo podrían argumentar que los lados **AD** y **BC** son paralelos?

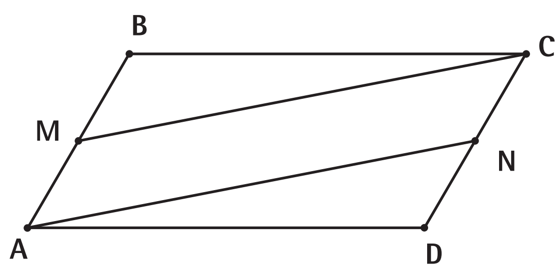
>>> A lo que llegamos

Si un cuadrilátero satisface que sus diagonales se intersecan en su punto medio, entonces este cuadrilátero debe ser un paralelogramo. Para justificar esta propiedad de manera formal se pueden emplear los criterios de congruencia.

>>> Lo que aprendimos

Elige algunos de los textos que están en el recuadro de razones para completar la justificación del siguiente hecho geométrico.

*Sean **M** y N los puntos medios de los lados **AB** y **CD** del paralelogramo **ABCD**, respectivamente. Entonces, se satisface que los triángulos **MBC** y **NDA** son congruentes.*



Razones
• En un paralelogramo los lados opuestos son iguales. • En un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales. • En un paralelogramo los ángulos adyacentes son complementarios. • Son la mitad de lados iguales. • Es un paralelogramo. • Ángulos alternos internos entre paralelas son iguales. • Son congruentes por el criterio de lado, ángulo, lado. • Son congruentes por el criterio de lado, lado, lado. • Son congruentes por el criterio de ángulo, lado, ángulo.

Justificación

Afirmación	Razón
$\overline{AB} = \overline{CD}$	
$\overline{MB} = \overline{ND}$	
$\overline{BC} = \overline{AD}$	
$\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$	
$\triangle$MBC es congruente con $\triangle$NDA	

>>> Para saber más

Sobre la justificación de los hechos geométricos en la historia, consulta:
Ruiz, Concepción y Sergio de Régules. "Geometría práctica y geometría deductiva" en *Crónicas geométricas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Entre rectas y circunferencias

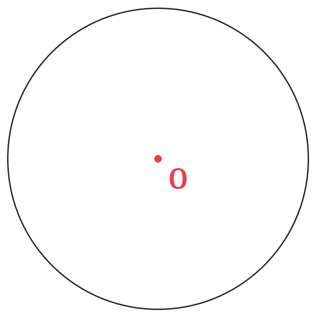
En esta secuencia identificarás las posiciones relativas entre una recta y una circunferencia y entre circunferencias. Conocerás algunas propiedades de las rectas secante y tangente de una circunferencia.

SESIÓN 1

PUNTOS EN COMÚN

>>> Para empezar

I. La circunferencia de centro **O** mide 2 cm de radio. Traza las rectas que se piden.



a) Una recta ***e*** que no interseque a la circunferencia.

b) Una recta ***s*** que interseque a la circunferencia en dos puntos.

c) Una recta ***t*** que interseque a la circunferencia en sólo un punto.

d) Una recta ***d*** que pase por el centro de la circunferencia.

Comparen sus trazos y verifiquen si cumplen con las condicione pedidas.

II. Mide las distancias de cada una de las rectas al centro de la circunferencia.

Recuerda que:

La distancia de un punto a una recta es la medida de la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta.

a) ¿Para cuál de las rectas la distancia es cero? ____________

b) ¿Para cuál de las rectas la distancia es 2 cm? ____________

c) ¿Para cuál de las rectas la distancia es mayor que 2 cm? ____________

d) ¿Para cuál de las rectas la distancia es menor que 2 cm? ____________

Comparen y justifiquen sus respuestas.